

ĐĂNG THỨC PASCAL VÀ ỨNG DỤNG

I. NHẮC LẠI MỘT SỐ CÔNG THỨC.

1. Chỉnh hợp: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

2. Tổ hợp: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

3. Một số tính chất cơ bản của tổ hợp.

Với n, k là các số nguyên dương, $k \leq n$: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Chứng minh: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}$.

Đặc biệt là Hằng đẳng thức Pascal: $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ hoặc $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$.

Chứng minh:

$$\begin{aligned} C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

II. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP

1. Giải phương trình

a) $C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}$.

b) $x^2 - C_4^x \cdot x + C_3^2 \cdot C_3^1 - 6 = 0$.

c) $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$.

d) $C_{8+x}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$.

e) $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14$.

Không thể giải tìm x bằng SOLVE, giải các phương trình trên bằng TABLE.

a) Nhập biểu thức $F(x) = C_{10+x}^{x+4} - C_{10+x}^{2x-10}$ với x chạy từ 0 tới 10, bước nhảy là 1, ta được:

MODE 7 (1 0 + ALPHA)) SHIFT ÷ ALPHA (ALPHA) + 4) - (1 0 + ALPHA)) SHIFT ÷ (2 ALPHA) - 1 0) = = 0 = 2 0 = 1 = =

Di chuyển mũi tên xuống ta được $x=8$ và $x=14$. :

7 8 9 x 6 F(x) 7888 9996 0 Math	12 13 14 x 12 F(x) -2.105 -1.105 0 Math
8	14

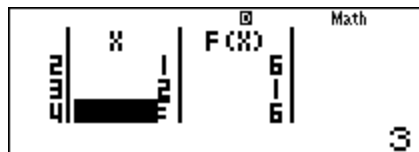
Giải tự luận: Từ biểu thức $C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}$, biến đổi:

$$\begin{aligned}
 C_{10+x}^{x+4} &= C_{10+x}^{2x-10} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 2x-10 \\ x+4 = 10+x-(2x-10) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=14 \end{cases}
 \end{aligned}$$

b) Nhập biểu thức $F(x) = x^2 - C_4^x \cdot x + C_3^2 \cdot C_3^1$ với x chạy từ 0 tới 10, bước nhảy là 1, ta được:

MODE 7 ALPHA) x^2 - 4 SHIFT ÷ ALPHA) $\times$ ALPHA) + 3 SHIFT ÷ 2 $\times$ 3
SHIFT ÷ 1 - 6 = = 1 = 1 0 = 1 =

Thu được $x=1; x=3$.



c) Tương tự nhập vào biểu thức:

MODE 7 (ALPHA) - 2) SHIFT $\times$ 2 + ALPHA) SHIFT ÷ (ALPHA) - 2
) - 1 0 1 = = 0 = 1 0 = 1 =



Vậy $x=10$. Qua bài này chúng ta nhận thấy cần tăng (Start; End) lên một khoảng lớn hơn để rà soát được đầy đủ nghiệm.

d), e) thực hiện tương tự.

2. Tìm hệ số trong khai triển.

Định lý đa thức (multimimal theorem)

Với $n \in N^*$ và $x_1, x_2, \dots, x_n \in C$ thì

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times \dots \times k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

Khi $k_1, k_2, \dots, k_m \in N^*$ thỏa mãn $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

Bài toán 1: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển biểu thức $(1 + 2x)^{15}$

$$T_{11} = \frac{15!}{k_1! \times k_2!} (1)^{k_1} (2x)^{k_2} = \frac{15!}{k_1! \times k_2!} (1)^{k_1} 2^{k_2} x^{k_2}$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 15 \\ k_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 5 \\ k_2 = 10 \end{cases}$$

Vậy hệ số x^{10} trong khai triển biểu thức $(1 + 2x)^{15}$ là: $\frac{15!}{5! \times 10!} (1)^5 2^{10} = 307572$.

Bài toán 2: Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển biểu thức $(3x - 2x^2)^7$

Ta có hệ số chứa x^{10} là

$$T_{11} = \frac{7!}{k_1! \times k_2!} (3x)^{k_1} (-2x^2)^{k_2} = \frac{7!}{k_1! \times k_2!} (3)^{k_1} (-2)^{k_2} (x)^{k_1+2k_2}$$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 7 \\ k_1 + 2k_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ số x^{10} trong khai triển biểu thức $(3x - 2x^2)^7$ là $\frac{7!}{4! \times 3!} (3)^4 (-2)^3 = -2268$.

Bài toán 3: Tìm hệ số chứa x^7 trong khai triển $(1 + 3x - 2x^3)^{10}$

- Hệ số chứa x^7 là:
- $T_8 = \frac{10!}{k_1! \times k_2! \times k_3!} (1)^{k_1} (3x)^{k_2} (-2x^3)^{k_3} = \frac{10!}{k_1! \times k_2! \times k_3!} (3)^{k_2} (-2)^{k_3} (x)^{k_2+3k_3}$
- Ta lập hệ phương trình:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 10 \\ k_2 + 3k_3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 + k_3 = 10 - k_1 \\ k_2 + 3k_3 = 7 \end{cases}$$

Chọn $0 \leq k_1 \leq 10$ sao cho k_2, k_3 nguyên dương.

Dùng máy tính cầm tay thử từng giá trị ta được các cặp nghiệm thỏa mãn hệ phương trình trên là:

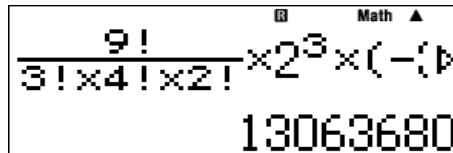
$$(k_1; k_2; k_3) = (3; 7; 0), (5; 4; 1), (7; 1; 2)$$

Vậy hệ số chứa x^7 là:

$$\frac{10!}{3! \times 7! \times 0!} (3)^7 (-2)^0 + \frac{10!}{5! \times 4! \times 1!} (3)^4 (-2)^1 + \frac{10!}{7! \times 1! \times 2!} (3)^1 (-2)^2 = 62640$$

Bài toán 4: Tìm hệ số của $x^3y^4z^2$ trong khai triển $(2x - 3y + 4z)^9$.

- Số hạng tổng quát của $(2x - 3y + 4z)^9$ là:
- $$\frac{9!}{k_1!k_2!k_3!} (2x)^{k_1} (-3y)^{k_2} (4z)^{k_3} = \frac{9!}{k_1!k_2!k_3!} 2^{k_1} (-3)^{k_2} 4^{k_3} \cdot x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$$
- Cho $k_1 = 3; k_2 = 4; k_3 = 2$ thu được hệ số:



The image shows a calculator screen with the following display:
$$\frac{9!}{3! \times 4! \times 2!} \times 2^3 \times (-3)^4 \times 4^2$$
 and the result 13063680 .