

§ 1. SỐ THỰC VÀ CĂN BẬC HAI

1. Chứng minh $\sqrt{7}$ là số vô tỉ.
2. a) Chứng minh : $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
b) Chứng minh bất đẳng thức Bunhiacôpxki : $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
3. Cho $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $S = x^2 + y^2$.
4. a) Cho $a \geq 0, b \geq 0$. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
b) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng : $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$
c) Cho $a, b > 0$ và $3a + 5b = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của tích $P = ab$.
5. Cho $a + b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $M = a^3 + b^3$.
6. Cho $a^3 + b^3 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $N = a + b$.
7. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh : $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a + b + c)$
8. Tìm liên hệ giữa các số a và b bất đẳng thức : $|a + b| > |a - b|$
9. a) Chứng minh bất đẳng thức $(a + 1)^2 \geq 4a$
b) Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Chứng minh : $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq 8$
10. Chứng minh các bất đẳng thức :
a) $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ b) $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$
11. Tìm các giá trị của x sao cho :
a) $|2x - 3| = |1 - x|$ b) $x^2 - 4x \leq 5$ c) $2x(2x - 1) \leq 2x - 1$.
12. Tìm các số a, b, c, d bất đẳng thức : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a(b + c + d)$
13. Cho biểu thức $M = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2001$. Với giá trị nào của a và b thì M đạt giá trị nhỏ nhất ? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.
14. Cho biểu thức $P = x^2 + xy + y^2 - 3(x + y) + 3$. CMR giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.
15. Chứng minh rằng không có giá trị nào của x, y, z thỏa mãn đẳng thức sau :
$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 2a + 8y - 6z + 15 = 0$$
16. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A = \frac{1}{x^2 - 4x + 9}$
17. So sánh các số thức sau (không dùng máy tính) :
a) $\sqrt{7} + \sqrt{15}$ và 7 b) $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 1$ và $\sqrt{45}$
c) $\frac{23 - 2\sqrt{19}}{3}$ và $\sqrt{27}$ d) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ và $\sqrt{2\sqrt{3}}$
18. Hãy viết một số hữu tỉ và một số vô tỉ lớn hơn $\sqrt{2}$ nhỏ hơn $\sqrt{3}$
19. Giải phương trình : $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 21} = 5 - 2x - x^2$.
20. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^2y$ với các điều kiện $x, y > 0$ và $2x + xy = 4$.
21. Cho $S = \frac{1}{\sqrt{1.1998}} + \frac{1}{\sqrt{2.1997}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k(1998 - k + 1)}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1998 - 1}}$.
Hãy so sánh S và $2 \cdot \frac{1998}{1999}$.
22. Chứng minh rằng : Nếu số tự nhiên a không phải là số chính phương thì $\sqrt{a}$ là số vô tỉ.
23. Cho các số x và y cùng dấu. Chứng minh rằng :
a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$
b) $\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 0$

$$c) \left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} \right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \geq 2.$$

24. Chứng minh rằng các số sau là số vô tỉ:

a) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

b) $m + \frac{\sqrt{3}}{n}$ với m, n là các số hữu tỉ, $n \neq 0$.

25. Có hai số vô tỉ điển hình nào mà tổng là số hữu tỉ không?

26. Cho các số x và y khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$.

27. Cho các số x, y, z dương. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

28. Chứng minh rằng tổng của một số hữu tỉ với một số vô tỉ là một số vô tỉ.

29. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

b) $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$

c) $(a_1+a_2+\dots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)$.

30. Cho $a^3+b^3=2$. Chứng minh rằng $a+b \leq 2$.

31. Chứng minh rằng: $[x] + [y] \leq [x+y]$.

32. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^2-6x+17}$.

33. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$.

34. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $A = x^2 + y^2$ biết $x+y=4$.

35. Tìm giá trị lớn nhất của: $A = xyz(x+y)(y+z)(z+x)$ với $x, y, z \geq 0$; $x+y+z=1$.

36. Xét xem các số a và b có thể là số vô tỉ không nếu:

a) ab và $\frac{a}{b}$ là số vô tỉ.

b) $a+b$ và $\frac{a}{b}$ là số hữu tỉ ($a+b \neq 0$)

c) $a+b, a^2$ và b^2 là số hữu tỉ ($a+b \neq 0$)

37. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $a^3+b^3+abc \geq ab(a+b+c)$

38. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$

39. Chứng minh rằng $[2x]$ bằng $2[x]$ hoặc $2[x]+1$

40. Cho số nguyên dương a . Xét các số có dạng: $a+15; a+30; a+45; \dots; a+15n$. Chứng minh rằng trong các số đó, tồn tại hai số mà hai chữ số đầu tiên là 96.

§ 2. HƯỚNG DẪN GIẢI C $\sqrt{A^2} = |A|$

41. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa:

$$A = \sqrt{x^2-3} \quad B = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x-5}} \quad C = \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \quad D = \frac{1}{1-\sqrt{x^2-3}} \quad E = \sqrt{x+\frac{2}{x}} + \sqrt{-2x}$$

$$G = \sqrt{3x-1} - \sqrt{5x-3} + \sqrt{x^2+x+1}$$

42. a) Chứng minh rằng: $|A+B| \leq |A| + |B|$. Dùng “=” xảy ra khi nào?

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $M = \sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9}$.

c) Giải phương trình : $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} = \sqrt{x^2 + 18x + 81}$

43. Giải phương trình : $2x^2 - 8x - 3\sqrt{x^2 - 4x - 5} = 12$.

44. Tìm các giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa :

$$A = \sqrt{x^2 + x + 2} \quad B = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} \quad C = 2 - \sqrt{1-9x^2} \quad D = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x}} \quad G = \frac{x}{x^2 - 4} + \sqrt{x-2} \quad H = \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 3\sqrt{1-x^2}$$

45. Giải phương trình : $\frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x-3}} = 0$

46. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = \sqrt{x} + x$.

47. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $B = \sqrt{3-x} + x$

48. So sánh : a) $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ và $b = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}$ và $\sqrt{3}-1$

c) $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ và $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (n là số nguyên dương)

49. Với giá trị nào của x, biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất : $A = 1 - \sqrt{1-6x+9x^2} + (3x-1)^2$.

50. Tính : a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$

d) $A = \sqrt{m^2 + 8m + 16} + \sqrt{m^2 - 8m + 16}$ e) $B = \sqrt{n+2\sqrt{n-1}} + \sqrt{n-2\sqrt{n-1}}$ (n ≥ 1)

51. Rút gọn biểu thức : $M = \frac{8\sqrt{41}}{\sqrt{45+4\sqrt{41}} + \sqrt{45-4\sqrt{41}}}$.

52. Tìm các số x, y, z thỏa mãn đẳng thức : $(2x-y)^2 + (y-2)^2 + \sqrt{(x+y+z)^2} = 0$

53. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \sqrt{25x^2 - 20x + 4} + \sqrt{25x^2 - 30x + 9}$.

54. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{x^2 - x - 2} - \sqrt{x-2} = 0$ b) $\sqrt{x^2 - 1} + 1 = x^2$ c) $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$

d) $x - \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = 1$ e) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} + |x-4| = 0$ g) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = -5$

h) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$ i) $\sqrt{x+5} + \sqrt{2-x} = x^2 - 25$

k) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$ l) $\sqrt{8x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{2x-2}$

55. Cho hai số thực x và y thỏa mãn các điều kiện : $xy = 1$ và $x > y$. CMR: $\frac{x^2 + y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$.

56. Rút gọn các biểu thức :

a) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$ b) $\sqrt{m+2\sqrt{m-1}} + \sqrt{m-2\sqrt{m-1}}$

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$ d) $\sqrt{227-30\sqrt{2}} + \sqrt{123+22\sqrt{2}}$

57. Chứng minh rằng $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

58. Rút gọn các biểu thức :

a) $C = \frac{\sqrt{6+2(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})} - \sqrt{6-2(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}}$ b) $D = \frac{\sqrt{9-6\sqrt{2}} - \sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

59. So sánh :

a) $\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{20}}$ và $\sqrt{1 + \sqrt{6}}$ b) $\sqrt{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}$ và $\sqrt{2} + 1$ c) $\sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}$ và $\sqrt{3} - 2$

60. Cho biểu thức : $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

- a) Tìm tập xác định của biểu thức A.
b) Rút gọn biểu thức A.

61. Rút gọn các biểu thức sau : a) $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$ b) $\sqrt{9 - 2\sqrt{14}}$

c) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}}}$

62. Cho $a + b + c = 0$; $a, b, c \neq 0$. Chứng minh đẳng thức : $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$

63. Giải bất phương trình : $\sqrt{x^2 - 16x + 60} < x - 6$.

64. Tìm x sao cho : $\sqrt{x^2 - 3} + 3 \leq x^2$.

65. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = x^2 + y^2$, biết rằng :
 $x^2(x^2 + 2y^2 - 3) + (y^2 - 2)^2 = 1$ (1)

66. Tìm x để biểu thức có nghĩa: a) $A = \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$ b) $B = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{x^2 - 8x + 8}$.

67. Cho biểu thức : $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x}}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$.

- a) Tìm giá trị của x để biểu thức A có nghĩa.
b) Rút gọn biểu thức A. c) Tìm giá trị của x để $A < 2$.

68. Tìm 20 chữ số thập phân đầu tiên của số : $\sqrt{0,9999...9}$ (20 chữ số 9)

69. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của : $A = |x - \sqrt{2}| + |y - 1|$ với $|x| + |y| = 5$

70. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^4 + y^4 + z^4$ biết rằng $xy + yz + zx = 1$

§ 3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

71. Trong hai số : $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$ và $2\sqrt{n+1}$ (n là số nguyên dương), số nào lớn hơn ?

72. Cho biểu thức $A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$. Tính giá trị của A theo hai cách.

73. Tính : $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$

74. Chứng minh các số sau là số vô tỉ : $\sqrt{3} + \sqrt{5}$; $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; $2\sqrt{2} + 3$

75. Hãy so sánh hai số : $a = 3\sqrt{3} - 3$ và $b = 2\sqrt{2} - 1$; $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ và $\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}}$

76. So sánh $\sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2}$ và số 0.

77. Rút gọn biểu thức : $Q = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$.

78. Cho $P = \sqrt{14 + \sqrt{40}} + \sqrt{56} + \sqrt{140}$. Hãy biểu diễn P dưới dạng tổng của 3 căn thức bậc hai

79. Tính giá trị của biểu thức $x^2 + y^2$ biết rằng : $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1$.

80. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của : $A = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$.

81. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ với $a, b > 0$ và $a + b \leq 1$.
82. CMR trong các số $2b + c - 2\sqrt{ad}$; $2c + d - 2\sqrt{ab}$; $2d + a - 2\sqrt{bc}$; $2a + b - 2\sqrt{cd}$ có ít nhất hai số dương ($a, b, c, d > 0$).
83. Rút gọn biểu thức: $N = \sqrt{4\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 18}$.
84. Cho $x + y + z = \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$, trong đó $x, y, z > 0$. Chứng minh $x = y = z$.
85. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $a_1 a_2 \dots a_n = 1$. Chứng minh: $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$.
86. Chứng minh: $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ ($a, b \geq 0$).
87. Chứng minh rằng nếu các độ dài của các cạnh a, b, c lập thành một tam giác thì các độ dài $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ cũng lập thành một tam giác.

§ 4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

88. Rút gọn: a) $A = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}}$ b) $B = \frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$.
89. Chứng minh rằng với mọi số thực a , ta đều có: $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$. Khi nào có đẳng thức?
90. Tính: $A = \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ bằng hai cách.
91. So sánh: a) $\frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ và 6,9 b) $\sqrt{13} - \sqrt{12}$ và $\sqrt{7} - \sqrt{6}$
92. Tính: $P = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$.
93. Giải phương trình: $\sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x - 5}} + \sqrt{x - 2 - \sqrt{2x - 5}} = 2\sqrt{2}$.
94. Chứng minh rằng ta luôn có: $P_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; $\forall n \in \mathbf{Z}_+$
95. Chứng minh rằng nếu $a, b > 0$ thì $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}}$.
96. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$.
97. Chứng minh các đẳng thức sau: a) $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}} : \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = a - b$ ($a, b > 0$; $a \neq b$)
 b) $\left(\frac{\sqrt{14} - \sqrt{7}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2$ c) $\left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right) = 1 - a$ ($a > 0$).
98. Tính: a) $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{29 - 6\sqrt{20}}}$; b) $2\sqrt{3 + \sqrt{5} - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$.
 c) $\left(\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{48}} - \sqrt{\sqrt{28 - 16\sqrt{3}}}\right) \cdot \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{48}}$.
99. So sánh: a) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ và $\sqrt{15}$ b) $2 + \sqrt{15}$ và $\sqrt{12} + \sqrt{7}$

c) $\sqrt{18} + \sqrt{19}$ và 9 d) $\frac{16}{\sqrt{2}}$ và $\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}$

100. Cho hằng đẳng thức :

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} \quad (a, b > 0 \text{ và } a^2 - b > 0).$$

Áp dụng kết quả để rút gọn :

a) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$; b) $\frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 - 12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{17 + 12\sqrt{2}}}$
 c) $\sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3} - 1}$

101. Xác định giá trị các biểu thức sau :

a) $A = \frac{xy - \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{y^2 - 1}}{xy + \sqrt{x^2 - 1} \cdot \sqrt{y^2 - 1}}$ với $x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$, $y = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right)$ ($a > 1$; $b > 1$)
 b) $B = \frac{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a - bx}}{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a - bx}}$ với $x = \frac{2am}{b(1 + m^2)}$, $|m| < 1$.

102. Cho biểu thức $P(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 - 1}}{3x^2 - 4x + 1}$

- a) Tìm tất cả các giá trị của x để P(x) xác định. Rút gọn P(x).
 b) Chứng minh rằng nếu $x > 1$ thì $P(x) \cdot P(-x) < 0$.

103. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x + 2 - 4\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x + 2 + 4\sqrt{x - 2}}}{\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x}} + 1}$.

- a) Rút gọn biểu thức A. b) Tìm các số nguyên x để biểu thức A là một số nguyên.

104. Tìm giá trị lớn nhất (nếu có) hoặc giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các biểu thức sau:

a) $\sqrt{9 - x^2}$ b) $\sqrt{x} - x$ ($x > 0$) c) $1 + \sqrt{2 - x}$ d) $\sqrt{x - 5} - 4$
 e) $1 - 2\sqrt{1 - 3x}$ g) $\sqrt{2x^2 - 2x + 5}$ h) $1 - \sqrt{-x^2 + 2x + 5}$ i) $\frac{1}{2x - \sqrt{x} + 3}$

105. Rút gọn biểu thức : $A = \sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}$, bằng ba cách ?

106. Rút gọn các biểu thức sau : a) $\sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48 - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}}$

b) $\sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ c) $\sqrt{94 - 42\sqrt{5}} - \sqrt{94 + 42\sqrt{5}}$.

107. Chứng minh các hằng đẳng thức với $b \geq 0$; $a \geq \sqrt{b}$

a) $\sqrt{a + \sqrt{b}} \pm \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{2(a \pm \sqrt{a^2 - b})}$ b) $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$

108. Rút gọn biểu thức : $A = \sqrt{x + 2\sqrt{2x - 4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x - 4}}$

109. Tìm x và y sao cho : $\sqrt{x + y - 2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{2}$

110. Chứng minh bất đẳng thức : $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$.

111. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh : $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

112. Cho $a, b, c > 0$; $a+b+c=1$. Chứng minh :

a) $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < 3,5$ b) $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$.

113. CM : $\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} + \sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)} \geq (a+b)(c+d)$ với $a, b, c, d > 0$.

114. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A = x + \sqrt{x}$.

115. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $A = \frac{(x+a)(x+b)}{x}$.

116. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = 2x + 3y$ biết $2x^2 + 3y^2 \leq 5$.

117. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x + \sqrt{2-x}$.

118. Giải phương trình : $\sqrt{x-1} - \sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2}$

119. Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

120. Giải phương trình : $3x^2 + 21x + 18 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 2$

121. Giải phương trình : $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$

122. Chứng minh các số sau là số vô tỉ : $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$

123. Chứng minh $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq 2$.

124. Chứng minh bất đẳng thức sau bằng phương pháp hình học :

$$\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{b^2+c^2} \geq b(a+c) \quad \text{với } a, b, c > 0.$$

125. Chứng minh $\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ với $a, b, c, d > 0$.

126. Chứng minh rằng nếu các đoạn thẳng có độ dài a, b, c lập thành một tam giác thì các đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ cũng lập thành một tam giác.

127. Chứng minh $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ với $a, b \geq 0$.

128. Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$ với $a, b, c > 0$.

129. Cho $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 = 1$.

130. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$

131. Tìm GTNN, GTLN của $A = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

132. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-2x+5}$

133. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{-x^2+4x+12} - \sqrt{-x^2+2x+3}$.

134. Tìm GTNN, GTLN của : a) $A = 2x + \sqrt{5-x^2}$ b) $A = x(99 + \sqrt{101-x^2})$

135. Tìm GTNN của $A = x + y$ biết $x, y > 0$ thỏa mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$ (a và b là hằng số dương).

136. Tìm GTNN của $A = (x+y)(x+z)$ với $x, y, z > 0$, $xyz(x+y+z) = 1$.

137. Tìm GTNN của $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ với $x, y, z > 0$, $x+y+z = 1$.

138. Tìm GTNN của $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$ biết $x, y, z > 0$, $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

139. Tìm giá trị nhỏ nhất của : a) $A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ với $a, b > 0, a + b \leq 1$

b) $B = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{c})^4 + (\sqrt{a} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{b} + \sqrt{c})^4 + (\sqrt{b} + \sqrt{d})^4 + (\sqrt{c} + \sqrt{d})^4$
 với $a, b, c, d > 0$ và $a + b + c + d = 1$.

140. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 3^x + 3^y$ với $x + y = 4$.

141. Tìm GTNN của $A = \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b}$ với $b + c \geq a + d$; $b, c > 0$; $a, d \geq 0$.

142. Giải các phương trình sau :

- a) $x^2 - 5x - 2\sqrt{3x} + 12 = 0$ b) $x^2 - 4x = 8\sqrt{x-1}$ c) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x+4} = 1$
 d) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} = 2$ e) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1$ g) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}$
 h) $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$ i) $\sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{1-x}} = 1$
 k) $\sqrt{1-\sqrt{x^2-x}} = \sqrt{x}-1$ l) $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$
 m) $\sqrt{x^2+6} = x-2\sqrt{x^2-1}$ n) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}$
 o) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = 4-2x$
 p) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2} + \sqrt{2x+2-\sqrt{x+2}} = 1+2\sqrt{x+2}$.
 q) $\sqrt{2x^2-9x+4} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x^2+21x-11}$

§ 5. BỒI DƯỠNG HỌC SINH CẦN THƠ CẤP CẤP HAI

143. Rút gọn biểu thức : $A = (2\sqrt{2} - \sqrt{5} + 3\sqrt{2})(\sqrt{18} - \sqrt{20} + 2\sqrt{2})$.

144. Chứng minh rằng, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, ta luôn có : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

145. Tìm căn thức của mẫu : a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$.

146. Tính :

- a) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$ b) $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$ c) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

147. Cho $a = \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot (3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$. Chứng minh rằng a là số tự nhiên.

148. Cho $b = \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$. b có phải là số tự nhiên không ?

149. Giải các phương trình sau :

- a) $(\sqrt{3}-1)x - x + 4 - \sqrt{3} = 0$ b) $(\sqrt{3}-1)x = 2(\sqrt{3}+1)x - 3\sqrt{3}$
 c) $\frac{(5-x)\sqrt{5-x} + (x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3}} = 2$ d) $x + \sqrt{x-5} = 5$

150. Tính giá trị của biểu thức : $M = \sqrt{12\sqrt{5}-29} + \sqrt{25+4\sqrt{21}} - \sqrt{12\sqrt{5}+29} - \sqrt{25-4\sqrt{21}}$

151. Rút gọn : $A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$.

152. Cho biểu thức : $P = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} - \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}-\sqrt{2n+1}}$

a) Rút gọn P.

b) P có phải là số hữu tỉ không ?

153. Tính : $A = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

154. Chứng minh : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

155. Cho $a = \sqrt{17} - 1$. Hãy tính giá trị của biểu thức : $A = (a^5 + 2a^4 - 17a^3 - a^2 + 18a - 17)^{2000}$.

156. Chứng minh : $\sqrt{a} - \sqrt{a-1} < \sqrt{a-2} - \sqrt{a-3} \quad (a \geq 3)$

157. Chứng minh : $x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{2} > 0 \quad (x \geq 0)$

158. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}$, biết $x + y = 4$.

159. Tính giá trị của biểu thức sau với $a = \frac{\sqrt{3}}{4}$: $A = \frac{1+2a}{1+\sqrt{1+2a}} + \frac{1-2a}{1-\sqrt{1-2a}}$.

160. Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = 2$ b) $\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$

c) $\sqrt{3 - \sqrt{5}}(3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 8$ d) $\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{48}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)$ e) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{5} - 2$

161. Chứng minh các bất đẳng thức sau :

a) $\sqrt{27} + \sqrt{6} > \sqrt{48}$ b) $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} - \sqrt{10} < 0$

c) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \right) \left(\sqrt{3} - 4\sqrt{\frac{1}{3}} + 2 \right) \sqrt{0,2 - \sqrt{1,01}} > 0$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}} > 0$

e) $\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} > 1,9$ g) $\sqrt{\sqrt{17+12\sqrt{2}} - \sqrt{2}} > \sqrt{3} - 1$

h) $(\sqrt{\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{7}}) - (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}) < 3$ i) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{2}} + \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4} < 0,8$

162. Chứng minh rằng : $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$. Từ đó suy ra :

$$2004 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1006009}} < 2005$$

163. Trắc căn thức của m: a) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$ b) $\frac{3}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

164. Cho $x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ và $y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Tính $A = 5x^2 + 6xy + 5y^2$.

165. Chứng minh bất đẳng thức sau : $\frac{2002}{\sqrt{2003}} + \frac{2003}{\sqrt{2002}} > \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$.

166. Tính giá trị của biểu thức : $A = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{x + y + 2}$ với $x = 3 + \sqrt{5}$ và $y = 3 - \sqrt{5}$.

167. Giải phương trình : $\frac{6x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}} = 3 + 2\sqrt{x-x^2}$.

168. Giải bất các pt : a) $3\sqrt{3+5x} \geq \sqrt{72}$ b) $\frac{1}{4}\sqrt{10x-14} \geq 1$ c) $\sqrt{2+2\sqrt{2+\sqrt{2x}}} \geq 4$.

169. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ b) $B = \sqrt{1-a} + \sqrt{a(a-1)} + a\sqrt{\frac{a-1}{a}}$

c) $C = \frac{x+3+2\sqrt{x^2-9}}{2x-6+\sqrt{x^2-9}}$ d) $D = \frac{x^2+5x+6+x\sqrt{9-x^2}}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$

$E = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \dots - \frac{1}{\sqrt{24}-\sqrt{25}}$

170. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $A = \frac{1}{2 - \sqrt{3-x^2}}$.

171. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

172. Tìm GTLN của : a) $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}$ biết $x+y=4$; b) $B = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y}$

173. Cho $a = \sqrt{1997} - \sqrt{1996}$; $b = \sqrt{1998} - \sqrt{1997}$. So sánh a với b, số nào lớn hơn?

174. Tìm GTNN, GTLN của : a) $A = \frac{1}{5+2\sqrt{6-x^2}}$ b) $B = \sqrt{-x^2+2x+4}$.

175. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x\sqrt{1-x^2}$.

176. Tìm giá trị lớn nhất của $A = |x-y|$ biết $x^2+4y^2=1$.

177. Tìm GTNN, GTLN của $A = x^3 + y^3$ biết $x, y \geq 0$; $x^2 + y^2 = 1$.

178. Tìm GTNN, GTLN của $A = x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$ biết $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

179. Giải phương trình : $\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2-3x+2} + (x-2)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 3$.

§ 6. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHứa CĂN BẬC HAI

180. Giải phương trình : $x^2 + 2x - 9 = \sqrt{6+4x+2x^2}$.

181. CMR, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, ta có : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$.

182. Cho $A = \frac{1}{\sqrt{1.1999}} + \frac{1}{\sqrt{2.1998}} + \frac{1}{\sqrt{3.1997}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1999.1}}$. Hãy so sánh A và 1,999.

183. Cho 3 số x, y và $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ là số hữu tỉ. Chứng minh rằng mỗi số $\sqrt{x}$; $\sqrt{y}$ đều là số hữu tỉ

184. Cho $a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$; $b = \sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$. CMR : a, b là các số hữu tỉ.

185. Rút gọn biểu thức : $P = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \cdot \frac{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}}$. ($a > 0$; $a \neq 1$)

186. Chứng minh : $\left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) = 4a$. ($a > 0$; $a \neq 1$)

187. Rút gọn : $\frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$ ($0 < x < 2$)

188. Rút gọn : $\left(\sqrt{a} + \frac{b - \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : \left(\frac{a}{\sqrt{ab} + b} + \frac{b}{\sqrt{ab} - a} - \frac{a + b}{\sqrt{ab}} \right)$

189. Giải bất phương trình : $2\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) \leq \frac{5a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ ($a \neq 0$)

190. Cho $A = (1 - a^2) : \left[\left(\frac{1 - a\sqrt{a}}{1 - \sqrt{a}} + \sqrt{a} \right) \left(\frac{1 + a\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) \right] + 1$

a) Rút gọn biểu thức A. b) Tính giá trị của A với $a = 9$.

c) Với giá trị nào của a thì $|A| = A$.

191. Cho biểu thức : $B = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1}{a + \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{2\sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{a - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{ab}} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của B nếu $a = 6 + 2\sqrt{5}$.

c) So sánh B với -1.

192. Cho $A = \left(\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a - b}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a + b}} \right) : \left(1 + \frac{\sqrt{a + b}}{\sqrt{a - b}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm b biết $|A| = -A$.

c) Tính giá trị của A khi $a = 5 + 4\sqrt{2}$; $b = 2 + 6\sqrt{2}$.

193. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A nếu $a = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}}$.

c) Tìm giá trị của a để $\sqrt{A} > A$.

194. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} - \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A để $A = -4$

195. Thực hiện phép tính : $A = \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right) : \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \right)$

196. Thực hiện phép tính : $B = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

197. Rút gọn các biểu thức sau :

$$a) A = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}} : \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \right]$$

$$\forall x = 2 - \sqrt{3}; y = 2 + \sqrt{3}.$$

$$b) B = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x - \sqrt{x^2 - y^2}}}{\sqrt{2(x - y)}} \quad \forall x > y > 0$$

$$c) C = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x} \quad \forall x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right) ; 0 < a < 1$$

$$d) D = (a+b) - \sqrt{\frac{(a^2+1)(b^2+1)}{c^2+1}} \quad \forall a, b, c > 0 \text{ và } ab + bc + ca = 1$$

$$e) E = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} \cdot \sqrt{2x-1}$$

$$198. \text{ Chứng minh: } \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2-4}{x}}} = \sqrt{\frac{2x+4}{\sqrt{x}}} \quad \forall x \geq 2.$$

$$199. \text{ Cho } a = \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, b = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}. \text{ Tính } a^7 + b^7.$$

$$200. \text{ Cho } a = \sqrt{2} - 1$$

$$a) \text{ Viết } a^2; a^3 \text{ dưới dạng } \sqrt{m} - \sqrt{m-1}, \text{ trong đó } m \text{ là số tự nhiên.}$$

$$b) \text{ Chứng minh rằng với mọi } m \text{ số nguyên dương } n, \text{ số } a^n \text{ viết dưới dạng } \sqrt{m} - \sqrt{m-1} \text{ trên.}$$

$$201. \text{ Cho bất phương trình } x = \sqrt{2} \text{ là nghiệm của phương trình } x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{ với các hệ số hữu tỉ.}$$

$$\text{Tìm các nghiệm còn lại.}$$

$$202. \text{ Chứng minh } 2\sqrt{n} - 3 < \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 2.$$

$$203. \text{ Tìm phần nguyên của số } \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} \quad (\text{có 100 dấu căn}).$$

$$204. \text{ Cho } a = 2 + \sqrt{3}. \text{ Tính a) } [a^2] \quad b) [a^3].$$

$$205. \text{ Cho 3 số } x, y, \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ là số hữu tỉ. Chứng minh rằng mỗi số } \sqrt{x}, \sqrt{y} \text{ đều là số hữu tỉ}$$

$$206. \text{ CMR, } \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}: \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2$$

$$207. \text{ Cho 25 số tự nhiên } a_1, a_2, a_3, \dots, a_{25} \text{ thỏa mãn: } \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} = 9. \text{ Chứng}$$

$$\text{minh rằng trong 25 số tự nhiên đó tồn tại 2 số bằng nhau.}$$

$$208. \text{ Giải phương trình } \frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} + \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{x}}} = \sqrt{2}.$$

$$209. \text{ Giải và biện luận với tham số } a \quad \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \sqrt{a}.$$

210. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x}(1+y) = 2y \\ \sqrt{y}(1+z) = 2z \\ \sqrt{z}(1+x) = 2x \end{cases}$$

211. Chứng minh rằng :

a) Số $(8+3\sqrt{7})^7$ có 7 chữ số 9 liên tiếp sau dấu phẩy.

b) Số $(7+4\sqrt{3})^{10}$ có nhiều chữ số 9 liên tiếp sau dấu phẩy.

212. Ký hiệu a_n là số nguyên gần $\sqrt{n}$ nhất ($n \in \mathbb{N}^*$), ví dụ :

$$\sqrt{1}=1 \Rightarrow a_1=1; \quad \sqrt{2} \approx 1,4 \Rightarrow a_2=1; \quad \sqrt{3} \approx 1,7 \Rightarrow a_3=2; \quad \sqrt{4}=2 \Rightarrow a_4=2$$

Tính : $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{1980}}$.

213. Tìm phần nguyên của các số (có dấu căn) : a) $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$

b) $a_n = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4 + \sqrt{4}}}}$ c) $a_n = \sqrt{1996 + \sqrt{1996 + \dots + \sqrt{1996 + \sqrt{1996}}}}$

214. Tìm phần nguyên của A với $n \in \mathbb{N}$: $A = \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}$

215. Chứng minh rằng khi viết số $x = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{200}$ dưới dạng thập phân, ta thấy chữ số liên tiếp của dấu phẩy là 1, chữ số liên tiếp sau dấu phẩy là 9.

216. Tìm chữ số tận cùng của phần nguyên của $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{250}$.

217. Tính tổng $A = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{24}]$

§ 6. CĂN BẬC BA

218. Tìm giá trị lớn nhất của $A = x^2(3-x)$ với $x \geq 0$.

219. Giải hệ phương trình : a) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{7-x} = 2$ b) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.

220. Có tồn tại các số hữu tỉ dương a, b không nào : a) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2}$ b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt[4]{2}$.

221. Chứng minh các số sau là số vô tỉ : a) $\sqrt[3]{5}$ b) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

222. Chứng minh bất đẳng thức Cauchy với 3 số không âm : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

223. Cho $a, b, c, d > 0$. Biết $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \leq 1$. Chứng minh rằng : $abcd \leq \frac{1}{81}$.

224. Chứng minh bất đẳng thức : $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$

225. Cho $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}}$; $b = 2\sqrt[3]{3}$. Chứng minh rằng : $a < b$.

226. a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

b) Chứng minh rằng trong các số có dạng $\sqrt[n]{n}$ (n là số tự nhiên), số $\sqrt[3]{3}$ có giá trị lớn nhất

227. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$.

228. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2(2-x)$ biết $x \leq 4$.

229. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2\sqrt{9-x^2}$.

230. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $A = x(x^2 - 6)$ biết $0 \leq x \leq 3$.

231. Một miếng bìa hình vuông có cạnh 3 dm. Một góc của hình vuông lớn, gấp lại ta có thể đi một hình vuông nhỏ rồi ghép bìa để được một cái hộp hình hộp chữ nhật không nắp. Tính cạnh hình vuông nhỏ để tích của hộp là lớn nhất.

232. Giải các phương trình sau :

a) $1 + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x+3}$

b) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$

c) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$

d) $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$

e) $\sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} = 2 - \sqrt{3}$

g) $\frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = 6 - x$

h) $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{x^2-1} = 1$

i) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$

k) $\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} = 3$

l) $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{b-x} = \sqrt[4]{a+b-2x}$ (a, b là tham số)

233. Rút gọn $A = \frac{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$.

234. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1}$

235. Xác định các số nguyên a, b sao cho một trong các nghiệm của phương trình : $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ là $1 + \sqrt{3}$.

236. Chứng minh $\sqrt[3]{3}$ là số vô tỉ.

237. Làm phép tính : a) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}$ b) $\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

238. Tính : $a = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

239. Chứng minh : $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-2\sqrt{5}} = 2$.

240. Tính : $A = \left(\sqrt[4]{7+\sqrt{48}} - \sqrt[4]{28-16\sqrt{3}} \right) \cdot \sqrt[4]{7+\sqrt{48}}$.

241. Hãy lập phương trình $f(x) = 0$ với hai số nguyên có một nghiệm là : $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$.

242. Tính giá trị của biểu thức : $M = x^3 + 3x - 14$ với $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}}$.

243. Giải các phương trình : a) $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{25-x} = 3$.

b) $\sqrt[3]{x-9} = (x-3)^2 + 6$

c) $\sqrt{x^2+32} - 2\sqrt[4]{x^2+32} = 3$

244. Tìm GTNN của biểu thức : $A = \sqrt{x^3+2(1+\sqrt{x^3+1})} + \sqrt{x^3+2(1-\sqrt{x^3+1})}$.

245. Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh : $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$.

246. Rút gọn : $P = \frac{8-x}{2-\sqrt[3]{x}} : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}} \right) + \left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2} \right) \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}} \right)$; $x > 0, x \neq 8$

247. CMR : $x = \sqrt[3]{5-\sqrt{17}} + \sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$ là nghiệm của phương trình $x^3 - 6x - 10 = 0$.

248. Cho $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{15}}$. Tính giá trị biểu thức $y = x^3 - 3x + 1987$.

249. Chứng minh đẳng thức :
$$\frac{a + \sqrt{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}}}{\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{a^2}} + \sqrt[3]{a}} = -\sqrt[3]{a} - 1.$$

250. Chứng minh bất đẳng thức :
$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \right) \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} - 2,1 < 0.$$

251. Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = \frac{\sqrt[3]{a^4} + \sqrt[3]{a^2b^2} + \sqrt[3]{b^4}}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$ b) $\left(\frac{b}{b+8} - \frac{4b}{(\sqrt[3]{b}+2)^3} \right) \cdot \left(\frac{1+2\sqrt[3]{\frac{1}{b}}}{1-2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{b}}} \right) - \frac{24}{b+8}$

c) $C = \left(\frac{a\sqrt[3]{a} - 2a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a^2b^2}}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab}} + \frac{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}.$

§ 7. BÀI TẬP ÔN CHỖ NGUYỄN

252. Cho $M = \sqrt{x^2 - 4x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 8}$. Tính giá trị của biểu thức M biết rằng :
$$\sqrt{x^2 - 4x + 9} - \sqrt{x^2 - 4x + 8} = 2.$$

253. Tìm giá trị nhỏ nhất của : $P = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + b^2} \quad (a < b)$

254. Chứng minh rằng, nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì :

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

255. Tìm giá trị của biểu thức $|x-y|$ biết $x+y=2$ và $xy=-1$

256. Biết $a-b = \sqrt{2} + 1$, $b-c = \sqrt{2} - 1$, tìm giá trị của biểu thức :

$$A = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

257. Tìm x, y, z biết rằng : $x + y + z + 4 = 2\sqrt{x-2} + 4\sqrt{y-3} + 6\sqrt{z-5}.$

258. Cho $y = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$. CMR, nếu $1 \leq x \leq 2$ thì giá trị của y là một hằng số.

259. Phân tích thành nhân tử : $M = 7\sqrt{x-1} - \sqrt{x^3 - x^2} + x - 1 \quad (x \geq 1).$

260. Trong tất cả các hình chữ nhật có đường chéo bằng $8\sqrt{2}$, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

261. Cho tam giác vuông ABC có các cạnh góc vuông là a, b và cạnh huyền là c. Chứng minh rằng ta

luôn có : $c \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$

262. Cho các số dương a, b, c, a', b', c'. Chứng minh rằng :

$$\text{Nếu } \sqrt{aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'} = \sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')} \text{ thì } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

263. Giải phương trình : $|x^2 - 1| + |x^2 - 4| = 3.$

264. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phụ thuộc vào x, y :

$$C = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+y}} - \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)} - \frac{x+y}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{(x+y)^4}}{4xy} \quad \forall x > 0; y > 0.$$

265. Chứng minh giá trị biểu thức D không phụ thuộc vào a:

$$D = \left(\frac{2 + \sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2}{a - 1} \right) \frac{a\sqrt{a} + a - \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a}} \quad \forall a > 0; a \neq 1$$

266. Cho biểu thức $B = \left(\sqrt{a} + \frac{c - \sqrt{ac}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} \right) - \frac{1}{\frac{a}{\sqrt{ac} + c} + \frac{c}{\sqrt{ac} - a} - \frac{a + c}{\sqrt{ac}}}$.

a) Rút gọn biểu thức B.

b) Tính giá trị của biểu thức B khi $c = 54$; $a = 24$

c) Với giá trị nào của a và c để $B > 0$; $B < 0$.

267. Cho biểu thức: $A = \left(\sqrt{m + \frac{2mn}{1+n^2}} + \sqrt{m - \frac{2mn}{1+n^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \quad \forall m \geq 0; n \geq 1$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị của A với $m = \sqrt{56 + 24\sqrt{5}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

268. Rút gọn $D = \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} - \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2} - 1+x} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{1-x}{x} \right) \frac{x}{1-x + \sqrt{1-x^2}}$

269. Cho $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right) \quad \forall x \geq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x sao cho $P < 0$.

270. Xét biểu thức $y = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + 1 - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn y. Tìm x để $y = 2$.

b) Giải số $x > 1$. Chứng minh rằng: $y - |y| = 0$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của y?

-----HẾT-----

GIỚI BÀI THI P NÂNG CAO CHỖ NGƯỜI ĐỎI S 9

§ 1. SỐ THỰC VÀ CĂN BẬC HAI

1. Giả sử $\sqrt{7}$ là số hữu tỉ $\Rightarrow \sqrt{7} = \frac{m}{n}$ (tỉ lệ giản). Suy ra $7 = \frac{m^2}{n^2}$ hay $7n^2 = m^2$ (1). Đẳng thức này

chỉ đúng khi $m^2 : 7$ mà 7 là số nguyên tố nên $m : 7$. Đặt $m = 7k$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta có $m^2 = 49k^2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $7n^2 = 49k^2$ nên $n^2 = 7k^2$ (3). Từ (3) ta lại có $n^2 : 7$ và vì 7 là số nguyên tố nên $n : 7$. m và n cùng chia hết cho 7 nên phân số $\frac{m}{n}$ không tối giản, trái giả thiết. Vậy $\sqrt{7}$ không phải là số hữu tỉ;

do đó $\sqrt{7}$ là số vô tỉ.

2. Khai triển vế trái và đặt nhân tử chung, ta được c vế phải. Từ a) $\Rightarrow$ b) vì $(ad - bc)^2 \geq 0$.

3. Cách 1: Từ $x + y = 2$ ta có $y = 2 - x$. Do đó: $S = x^2 + (2 - x)^2 = 2(x - 1)^2 + 2 \geq 2$.

Với y min $S = 2 \Leftrightarrow x = y = 1$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki với $a = x$, $c = 1$, $b = y$, $d = 1$, ta có:

$$(x + y)^2 \leq (x^2 + y^2)(1 + 1) \Leftrightarrow 4 \leq 2(x^2 + y^2) = 2S \Leftrightarrow S \geq 2. \Rightarrow \min S = 2 \text{ khi } x = y = 1$$

4. b) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các cặp số dương $\frac{bc}{a}$ và $\frac{ca}{b}$; $\frac{bc}{a}$ và $\frac{ab}{c}$; $\frac{ca}{b}$ và $\frac{ab}{c}$, ta

$$\text{ta có: } \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ca}{b}} = 2c; \frac{bc}{a} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{a} \cdot \frac{ab}{c}} = 2b; \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq 2\sqrt{\frac{ca}{b} \cdot \frac{ab}{c}} = 2a$$

đồng thời ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

c) Với các số dương $3a$ và $5b$, theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{3a+5b}{2} \geq \sqrt{3a \cdot 5b}$.

$$\Leftrightarrow (3a+5b)^2 \geq 4 \cdot 15P \text{ (vì } P = a \cdot b) \Leftrightarrow 12^2 \geq 60P \Leftrightarrow P \leq \frac{12}{5} \Rightarrow \max P = \frac{12}{5}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $3a = 5b = 12 : 2 \Leftrightarrow a = 2; b = 6/5$.

5. Ta có $b = 1 - a$, do đó $M = a^3 + (1-a)^3 = 3(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{1}{2}$.

Vậy $\min M = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

6. Đặt $a = 1 + x \Rightarrow b^3 = 2 - a^3 = 2 - (1+x)^3 = 1 - 3x - 3x^2 - x^3 \leq 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1-x)^3$.

Suy ra: $b \leq 1 - x$. Ta lại có $a = 1 + x$, nên: $a + b \leq 1 + x + 1 - x = 2$.

Với $a = 1, b = 1$ thì $a^3 + b^3 = 2$ và $a + b = 2$. Vậy $\max N = 2$ khi $a = b = 1$.

7. Hiểu câu a và trái và phải bình $(a-b)^2(a+b)$.

8. Vì $|a+b| \geq 0, |a-b| \geq 0$, nên: $|a+b| > |a-b| \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 - 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow 4ab > 0 \Leftrightarrow ab > 0$. Vậy a và b là hai số cùng dấu.

9. a) Xét hiểu: $(a+1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$.

b) Ta có: $(a+1)^2 \geq 4a; (b+1)^2 \geq 4b; (c+1)^2 \geq 4c$ và các bất đẳng thức này có hai vế đều dương, nên: $[(a+1)(b+1)(c+1)]^2 \geq 64abc = 64 \cdot 1 = 8^2$. Vậy $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$.

10. a) Ta có: $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$. Do $(a-b)^2 \geq 0$, nên $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

b) Xét: $(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2$. Khai triển và rút gọn, ta được:

$3(a^2 + b^2 + c^2)$. Vậy: $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

$$11. \text{ a) } |2x-3| = |1-x| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=1-x \\ 2x-3=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=4 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ x=2 \end{cases}$$

b) $x^2 - 4x \leq 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 \leq 3^2 \Leftrightarrow |x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$.

c) $2x(2x-1) \leq 2x-1 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq 0$. Nhận thấy $(2x-1)^2 \geq 0$, nên chỉ có thể: $2x-1 = 0$

Vậy: $x = \frac{1}{2}$.

12. Với bất đẳng thức đã cho dùng: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - ab - ac - ad = 0$ (1). Nhân hai vế của (1)

với 4 rồi chia vế dùng: $a^2 + (a-2b)^2 + (a-2c)^2 + (a-2d)^2 = 0$ (2). Do đó ta có:

$a = a - 2b = a - 2c = a - 2d = 0$. Suy ra: $a = b = c = d = 0$.

13. $2M = (a+b-2)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 + 2 \cdot 1998 \geq 2 \cdot 1998 \Rightarrow M \geq 1998$.

Dấu "=" xảy ra khi có đẳng thức: $\begin{cases} a+b-2=0 \\ a-1=0 \\ b-1=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Vậy } \min M = 1998 \Leftrightarrow a = b = 1.$

14. Giải tiếp bài 13.

15. Đặt đẳng thức đã cho vế dùng: $(x-1)^2 + 4(y-1)^2 + (x-3)^2 + 1 = 0$.

16. $A = \frac{1}{x^2 - 4x + 9} = \frac{1}{(x-2)^2 + 5} \leq \frac{1}{5}$. $\max A = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 2$.

17. a) $\sqrt{7} + \sqrt{15} < \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Vậy $\sqrt{7} + \sqrt{15} < 7$

b) $\sqrt{17} + \sqrt{5} + 1 > \sqrt{16} + \sqrt{4} + 1 = 4 + 2 + 1 = 7 = \sqrt{49} > \sqrt{45}$.

c) $\frac{23-2\sqrt{19}}{3} < \frac{23-2\sqrt{16}}{3} = \frac{23-2 \cdot 4}{3} = 5 = \sqrt{25} < \sqrt{27}$.

d) Giả sử $\sqrt{3\sqrt{2}} > \sqrt{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^2 > \left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{18} > \sqrt{12} \Leftrightarrow 18 > 12$.

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, nên : $\sqrt{3\sqrt{2}} > \sqrt{2\sqrt{3}}$.

18. Các số đó có thể là 1,42 và $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

19. Với tất cả mọi giá trị của x ta có : $\sqrt{3(x+1)^2 + 4} + \sqrt{5(x+1)^2 + 16} = 6 - (x+1)^2$.

Vô trái của bất đẳng thức không phải là 6, còn với bất đẳng thức không phải là 6. Với bất đẳng thức chỉ xảy ra khi cả hai vế đều bằng 6, suy ra $x = -1$.

20. Bất đẳng thức Cauchy $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ với tất cả mọi giá trị của $a, b \geq 0$ (*) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (*) ($a, b \geq 0$).

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với hai số dương $2x$ và xy ta được :

$$2x \cdot xy \leq \left(\frac{2x + xy}{2}\right)^2 = 4$$

Đu “ “ xảy ra khi : $2x = xy = 4 : 2$ tức là khi $x = 1, y = 2 \Rightarrow \max A = 2 \Leftrightarrow x = 2, y = 2$.

21. Bất đẳng thức Cauchy với tất cả mọi giá trị của a, b : $\frac{1}{\sqrt{ab}} > \frac{2}{a+b}$. Áp dụng ta có $S > 2 \cdot \frac{1998}{1999}$.

22. Chứng minh như bài 1.

23. a) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$. Với $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

b) Ta có : $A = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$. Theo câu a :

$$A \geq \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 2\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 2 = \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{x} - 1\right)^2 \geq 0$$

c) Từ câu b suy ra : $\left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4}\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) \geq 0$. Vì $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (câu a). Do đó :

$$\left(\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4}\right) - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geq 2.$$

24. a) Giả sử $\sqrt{1+\sqrt{2}} = m$ (m : số hữu tỉ) $\Rightarrow \sqrt{2} = m^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{2}$ là số hữu tỉ (vô lý)

b) Giả sử $m + \frac{\sqrt{3}}{n} = a$ (a : số hữu tỉ) $\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{n} = a - m \Rightarrow \sqrt{3} = n(a - m) \Rightarrow \sqrt{3}$ là số hữu tỉ, vô lý.

25. Có, chứng minh như sau $\sqrt{2} + (5 - \sqrt{2}) = 5$

26. Đặt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = a^2$. Dùng chứng minh $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2$ nên $a^2 \geq 4$, do đó

$|a| \geq 2$ (1). Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với : $a^2 - 2 + 4 \geq 3a$

$$\Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $a \geq 2$ hoặc $a \leq -2$. Nếu $a \geq 2$ thì (2) đúng. Nếu $a \leq -2$ thì (2) cũng đúng. Bài toán được chứng minh.

27. Bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với :

$$\frac{x^4z^2 + y^4x^2 + z^4x^2 - (x^2z + y^2x + z^2y)xyz}{x^2y^2z^2} \geq 0.$$

Chứng minh bất đẳng thức không âm, ta có : $x^3z^2(x-y) + y^3x^2(y-z) + z^3y^2(z-x) \geq 0$. (1)

Biểu thức không đổi khi hoán vị vòng $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ nên có thể giả sử x là số lớn nhất. Xét hai trường hợp :

a) $x \geq y \geq z > 0$. Tách $z - x$ (1) thành $-(x - y + y - z)$, (1) trở thành :

$$\begin{aligned} x^3z^2(x-y) + y^3x^2(y-z) - z^3y^2(x-y) - z^3y^2(y-z) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow z^2(x-y)(x^3 - y^2z) + y^2(y-z)(yx^2 - z^3) &\geq 0 \end{aligned}$$

Do thấy $x - y \geq 0$, $x^3 - y^2z \geq 0$, $y - z \geq 0$, $yx^2 - z^3 \geq 0$ nên bất đẳng thức trên đúng.

b) $x \geq z \geq y > 0$. Tách $x - y$ (1) thành $x - z + z - y$, (1) trở thành :

$$\begin{aligned} x^3z^2(x-z) + x^3z^2(z-y) - y^3x^2(z-y) - z^3y^2(x-z) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow z^2(x-z)(x^3 - zy^2) + x^2(xz^2 - y^3)(z-y) &\geq 0 \end{aligned}$$

Do thấy bất đẳng thức trên đúng.

Cách khác : Biểu diễn bất đẳng thức phải chứng minh dưới dạng :

$$\left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - 1\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \geq 3.$$

28. Chứng minh bất đẳng thức. Giả sử tổng của số hữu tỉ và số vô tỉ là số hữu tỉ. Ta có : $b = c - a$. Ta thấy, hiệu của hai số hữu tỉ là số hữu tỉ và a là số hữu tỉ, nên b là số hữu tỉ, trái với giả thiết. Vậy phải là số vô tỉ.

29. a) Ta có : $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2) \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$.

b) Xét : $(a+b+c)^2 + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2$. Khai triển và rút gọn ta được :

$$3(a^2 + b^2 + c^2). \text{ Vậy : } (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

c) Tìm giá trị nhỏ của

$$\begin{aligned} 30. \text{ Giả sử } a+b > 2 &\Rightarrow (a+b)^3 > 8 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3ab(a+b) > 8 \\ &\Rightarrow ab(a+b) > 2 \Rightarrow ab(a+b) > a^3 + b^3. \text{ Chia hai vế cho số dương } a+b : ab > a^2 - ab + b^2 \\ &\Rightarrow (a-b)^2 < 0, \text{ vô lý. Vậy } a+b \leq 2. \end{aligned}$$

31. Cách 1: Ta có : $[x] \leq x$; $[y] \leq y$ nên $[x] + [y] \leq x + y$. Suy ra $[x] + [y]$ là số nguyên

không vượt quá $x + y$ (1). Theo định nghĩa phần nguyên, $[x + y]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $x + y$ (2). Từ (1) và (2) suy ra : $[x] + [y] \leq [x + y]$.

Cách 2 : Theo định nghĩa phần nguyên : $0 \leq x - [x] < 1$; $0 \leq y - [y] < 1$.

Suy ra : $0 \leq (x + y) - ([x] + [y]) < 2$. Xét hai trường hợp :

$$- \text{ Nếu } 0 \leq (x + y) - ([x] + [y]) < 1 \text{ thì } [x + y] = [x] + [y] \quad (1)$$

$$- \text{ Nếu } 1 \leq (x + y) - ([x] + [y]) < 2 \text{ thì } 0 \leq (x + y) - ([x] + [y] + 1) < 1 \text{ nên}$$

$$[x + y] = [x] + [y] + 1 \quad (2). \text{ Trong cả hai trường hợp ta đều có : } [x] + [y] \leq [x + y]$$

32. Ta có $x^2 - 6x + 17 = (x - 3)^2 + 8 \geq 8$ nên tử và mẫu của A là các số dương, suy ra $A > 0$ do đó :

$$A \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \frac{1}{A} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 17 \text{ nhỏ nhất.}$$

$$\text{Vậy } \max A = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 3.$$

33. Không được dùng phép hoán vị vòng quanh $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ và giả sử $x \geq y \geq z$.

Cách 1 : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương x, y, z :

$$A = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 3$$

$$\text{Do đó } \min\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} \Leftrightarrow x = y = z$$

Cách 2 : Ta có : $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{y}{x} \right)$. Ta đã có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ (do $x, y > 0$) nên để

chứng minh $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$ ta chỉ cần chứng minh : $\frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{y}{x} \geq 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow xy + z^2 - yz \geq xz \text{ (nhân hai vế với số dương } xz)$$

$$\Leftrightarrow xy + z^2 - yz - xz \geq 0 \Leftrightarrow y(x - z) - z(x - z) \geq 0 \Leftrightarrow (x - z)(y - z) \geq 0 \quad (2)$$

(2) đúng với mọi thứ tự sắp xếp của x, y, z , do đó (1) đúng. Từ đó tìm được giá trị

nhỏ nhất của $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

34. Ta có $x + y = 4 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 16$. Ta lại có $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$. Từ đó suy ra $2(x^2 + y^2) \geq 16 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 8$. min $A = 8$ khi và chỉ khi $x = y = 2$.

35. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm :

$$1 = x + y + z \geq 3 \sqrt[3]{xyz} \quad (1)$$

$$2 = (x + y) + (y + z) + (z + x) \geq 3 \sqrt[3]{(x + y)(y + z)(z + x)} \quad (2)$$

Nhân từng vế của (1) với (2) (do hai vế đều không âm) : $2 \geq 9 \sqrt[3]{A} \Rightarrow A \leq \left(\frac{2}{9} \right)^3$

$$\max A = \left(\frac{2}{9} \right)^3 \text{ khi và chỉ khi } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

36. a) Có thể. b, c) Không thể.

37. Hiểu câu a và trái và với phép biến đổi $(a - b)^2(a + b)$.

38. Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x + y)^2}$ với $x, y > 0$:

$$\frac{a}{b + c} + \frac{c}{d + a} = \frac{a^2 + ad + bc + c^2}{(b + c)(a + d)} \geq \frac{4(a^2 + ad + bc + c^2)}{(a + b + c + d)^2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{b}{c + d} + \frac{d}{a + b} \geq \frac{4(b^2 + ab + cd + d^2)}{(a + b + c + d)^2} \quad (2)$$

$$\text{Cộng (1) với (2)} \quad \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + d} + \frac{c}{d + a} + \frac{d}{a + b} \geq \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc + ab + cd)}{(a + b + c + d)^2} = 4B$$

Cần chứng minh $B \geq \frac{1}{2}$, bất đẳng thức này tương đương với :

$$2B \geq 1 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + bc + ab + cd) \geq (a + b + c + d)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd \geq 0 \Leftrightarrow (a - c)^2 + (b - d)^2 \geq 0 : \text{đúng.}$$

39. - Nếu $0 \leq x - [x] < \frac{1}{2}$ thì $0 \leq 2x - 2[x] < 1$ nên $[2x] = 2[x]$.

- Nếu $\frac{1}{2} \leq x - [x] < 1$ thì $1 \leq 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 0 \leq 2x - (2[x] + 1) < 1 \Rightarrow [2x] = 2[x] + 1$

40. Ta sẽ chứng minh tồn tại các số tự nhiên m, p sao cho :

$$\underbrace{96\,000\dots 00}_{m \text{ chữ số } 0} \leq a + 15p < \underbrace{97\,000\dots 00}_{m \text{ chữ số } 0}$$

Tức là $96 \leq \frac{a}{10^m} + \frac{15p}{10^m} < 97$ (1). Gọi $a + 15$ là số có k chữ số : $10^{k-1} \leq a + 15 < 10^k$

$\Rightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{a}{10^k} + \frac{15}{10^k} < 1$ (2). Đặt $x_n = \frac{a}{10^k} + \frac{15p}{10^k}$. Theo (2) ta có $x_1 < 1$ và $\frac{15}{10^k} < 1$.

Cho n số nguyên n số tự nhiên các giá trị $2, 3, 4, \dots$, các giá trị của x_n tăng dần, mỗi n tăng không quá 1 đơn vị, khi đó $[x_n]$ sẽ trải qua các giá trị $1, 2, 3, \dots$. Đến một lúc nào đó ta có $[x_p] = 96$. Khi đó $96 \leq x_p$

< 97 tức là $96 \leq \frac{a}{10^k} + \frac{15p}{10^k} < 97$. Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

§ 2. CĂN THỨC BẬC HAI - HỒNG ĐỒNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

42. a) Do hai vế của bất đẳng thức không âm nên ta có :

$$|A + B| \leq |A| + |B| \Leftrightarrow |A + B|^2 \leq (|A| + |B|)^2$$

$$\Leftrightarrow A^2 + B^2 + 2AB \leq A^2 + B^2 + 2|AB| \Leftrightarrow AB \leq |AB| \quad (\text{bất đẳng thức đúng})$$

Điều “=” xảy ra khi $AB \geq 0$.

b) Ta có : $M = |x + 2| + |x - 3| = |x + 2| + |3 - x| \geq |x + 2 + 3 - x| = 5$.

Điều “=” xảy ra khi và chỉ khi $(x + 2)(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$ (ta dễ dàng xét được)

Vậy $\min M = 5 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$.

c) Phân tích đã cho $\Leftrightarrow |2x + 5| + |x - 4| = |x + 9| = |2x + 5 + 4 - x|$
 $\Leftrightarrow (2x + 5)(4 - x) \geq 0 \Leftrightarrow -5/2 \leq x \leq 4$

43. Điều kiện để tìm giá trị của phân tích đã cho : $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 5 \end{cases}$

Đặt phân tích $\sqrt{x^2 - 4x - 5} = y \geq 0$, ta được : $2y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)(2y + 1) = 0$.

45. Vô nghiệm

46. Điều kiện để tìm giá trị của $\sqrt{x}$ là $x \geq 0$. Do đó : $A = \sqrt{x} + x \geq 0 \Rightarrow \min A = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

47. Điều kiện : $x \leq 3$. Đặt $\sqrt{3 - x} = y \geq 0$, ta có : $y^2 = 3 - x \Rightarrow x = 3 - y^2$.

$$B = 3 - y^2 + y = -(y - 1/2)^2 + \frac{13}{4} \leq \frac{13}{4} . \max B = \frac{13}{4} \Leftrightarrow y = 1/2 \Leftrightarrow x = \frac{11}{4} .$$

48. a) Xét a^2 và b^2 . Từ đó suy ra $a = b$.

b) $\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} = \sqrt{5 - (2\sqrt{3} + 1)} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$. Vậy hai số này bằng nhau.

c) Ta có : $(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) = 1$ và $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$.

Mà $\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ nên $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

49. $A = 1 - |1 - 3x| + |3x - 1|^2 = (|3x - 1| - 1/2)^2 + 3/4 \geq 3/4$.

Từ đó suy ra : $\min A = 3/4 \Leftrightarrow x = 1/2$ hoặc $x = 1/6$

51. $M = 4$

52. $x = 1 ; y = 2 ; z = -3$.

53. $P = |5x - 2| + |3 - 5x| \geq |5x - 2 + 3 - 5x| = 1$. $\min P = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{3}{5}$.

54. Cần nhớ cách giải một số phân tích đã cho sau :

$$\text{a) } \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \quad (B \geq 0) \\ A = B \end{cases} \quad \text{b) } \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases} \quad \text{c) } \sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases} \quad \text{e) } |A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} .$$

a) Để phân tích vế đúng : $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.

b) Để phân tích vế đúng : $\sqrt{A} = B$.

c) Phương trình có dạng: $\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0$.

d) Đây là phương trình vô dạng: $\sqrt{A} = B$.

e) Đây là phương trình vô dạng: $|A| + |B| = 0$

g, h, i) Phương trình vô nghiệm.

k) Xét $\sqrt{x-1} = y \geq 0$, đây là phương trình vô dạng: $|y-2| + |y-3| = 1$. Xét dấu trái.

l) Xét: $\sqrt{8x+1} = u \geq 0$; $\sqrt{3x-5} = v \geq 0$; $\sqrt{7x+4} = z \geq 0$; $\sqrt{2x-2} = t \geq 0$.

Ta được hệ:
$$\begin{cases} u+v=z+t \\ u^2-v^2=z^2-t^2 \end{cases}$$
. Từ đó suy ra: $u=z$ thì là: $\sqrt{8x+1} = \sqrt{7x+4} \Leftrightarrow x=3$.

55. Cách 1: Xét $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}(x-y) = x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}(x-y) + 2 - 2xy = (x-y-\sqrt{2})^2 \geq 0$.

Cách 2: Bình đẳng thức đúng $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{(x^2+y^2)^2}{(x-y)^2} \geq 8 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 8(x-y)^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 8(x^2+y^2-2) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 8(x^2+y^2) + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-4)^2 \geq 0$.

Cách 3: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{x^2+y^2-2xy+2xy}{x-y} = \frac{(x-y)^2+2.1}{x-y} = (x-y) + \frac{2}{x-y} \geq 2\sqrt{(x-y) \cdot \frac{1}{x-y}} \quad (x > y).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $y = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} 62. \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(c+b+a)}{abc} = \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

$$63. \text{ Điều kiện: } \begin{cases} x^2 - 16x + 60 \geq 0 \\ x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x-10) \geq 0 \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 10.$$

Bình phương hai vế: $x^2 - 16x + 60 < x^2 - 12x + 36 \Leftrightarrow x > 6$.

Nghiệm của bất phương trình đã cho: $x \geq 10$.

64. Điều kiện $x^2 \geq 3$. Chuyển vế: $\sqrt{x^2-3} \leq x^2-3 \quad (1)$

$$\text{Đặt } t \text{ thì ta có: } \sqrt{x^2-3} \cdot (1 - \sqrt{x^2-3}) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3=0 \\ 1-\sqrt{x^2-3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình: $x = \pm\sqrt{3}$; $x \geq 2$; $x \leq -2$.

65. Ta có $x^2(x^2+2y^2-3) + (y^2-2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 - 4(x^2+y^2) + 3 = -x^2 \leq 0$.

Do đó: $A^2 - 4A + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (A-1)(A-3) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq A \leq 3$.

$\min A = 1 \Leftrightarrow x = 0$, khi đó $y = \pm 1$. $\max A = 3 \Leftrightarrow x = 0$, khi đó $y = \pm \sqrt{3}$.

66. a) $\frac{1}{2} \leq x \neq 1$.

$$\text{b) B có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ x^2 - 8x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ (x - 4)^2 \geq 8 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ \begin{cases} x \leq 4 - 2\sqrt{2} \\ x \geq 4 + 2\sqrt{2} \end{cases} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 4 - 2\sqrt{2}.$$

$$67. \text{ a) A có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x \neq \pm\sqrt{x^2 - 2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2) \geq 0 \\ x^2 \neq x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 0 \end{cases}$$

b) $A = 2\sqrt{x^2 - 2x}$ với điều kiện trên.

$$\text{c) } A < 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x} < 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2} \Rightarrow \text{kq}$$

68. Đặt $0,\underbrace{999\dots99}_{20 \text{ chỗ số } 9} = a$. Ta sẽ chứng minh 20 chữ số thập phân đầu tiên của $\sqrt{a}$ là các chữ số 9.

Muốn vậy chỉ cần chứng minh $a < \sqrt{a} < 1$. Thật vậy ta có: $0 < a < 1 \Rightarrow a(a - 1) < 0 \Rightarrow a^2 - a < 0 \Rightarrow a^2 < a$. Từ $a^2 < a < 1$ suy ra $a < \sqrt{a} < 1$.

$$\text{Vậy } \sqrt{0,\underbrace{999\dots99}_{20 \text{ chỗ số } 9}} = 0,\underbrace{999\dots99}_{20 \text{ chỗ số } 9}.$$

69. a) Tìm giá trị lớn nhất. Áp dụng $|a + b| \geq |a| + |b|$.

$$A \leq |x| + \sqrt{2}|y| + 1 = 6 + \sqrt{2} \Rightarrow \max A = 6 + \sqrt{2} \quad (\text{khi chọn } x = -2, y = -3)$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất. Áp dụng $|a - b| \geq |a| - |b|$.

$$A \geq |x| - \sqrt{2}|y| - 1 = 4 - \sqrt{2} \Rightarrow \min A = 4 - \sqrt{2} \quad (\text{khi chọn } x = 2, y = 3)$$

$$70. \text{ Ta có: } x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2; y^4 + z^4 \geq 2y^2z^2; z^4 + x^4 \geq 2z^2x^2. \text{ Suy ra: } x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \quad (1)$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được: Nếu $a + b + c = 1$ thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

$$\text{Do đó từ (1) suy ra: } x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq \frac{1}{3} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2): } \min A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

§ 3. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP NHÂN VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

71. Làm như bài 8c (§ 2). Thay vì so sánh $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$ và $2\sqrt{n+1}$ ta so sánh $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$ và $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Ta có: $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1}$.

72. Cách 1: Viết các biểu thức dưới căn thành bình phương của một tổng hoặc một hiệu.

Cách 2: Tính A^2 rồi suy ra A.

$$73. \text{ Áp dụng: } (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

74. Ta chứng minh bằng phản chứng.

$$\text{a) Giả sử tồn tại số hữu tỉ } r \text{ mà } \sqrt{3} + \sqrt{5} = r \Rightarrow 3 + 2\sqrt{15} + 5 = r^2 \Rightarrow \sqrt{15} = \frac{r^2 - 8}{2}. \text{ V trái là}$$

số vô tỉ, vô phân là số hữu tỉ, vô lí. Vậy $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ là số vô tỉ.

b), c) Giả sử ngược lại.

$$75. \text{ a) Giả sử } a > b \text{ rồi biểu diễn điều kiện: } 3\sqrt{3} = 3 > 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{3} > 2\sqrt{2} + 2$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{3})^2 > (2\sqrt{2} + 2)^2 \Leftrightarrow 27 > 8 + 4 + 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 15 > 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 225 > 128. \forall y a > b \text{ là đúng.}$$

b) Bình phương hai vế lên rồi so sánh.

76. Cách 1: Đặt $A = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$, rõ ràng $A > 0$ và $A^2 = 2 \Rightarrow A = \sqrt{2}$

Cách 2: Đặt $B = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} - \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}.B = \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - 2 = 0 \Rightarrow B = 0.$

77. $Q = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2.3} + \sqrt{2.4} + 2\sqrt{4}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}) + \sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}} = 1 + \sqrt{2}.$

78. Vì $\sqrt{40} = 2\sqrt{2.5}$; $\sqrt{56} = 2\sqrt{2.7}$; $\sqrt{140} = 2\sqrt{5.7}$. $\forall y P = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}.$

79. Từ giả thiết ta có: $x\sqrt{1-y^2} = 1 - y\sqrt{1-x^2}$. Bình phương hai vế của đẳng thức này ta được: $y = \sqrt{1-x^2}$. Thế đó: $x^2 + y^2 = 1.$

80. Xét A^2 tìm suy ra: $2 \leq A^2 \leq 4$. $\forall y: \min A = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm 1$; $\max A = 2 \Leftrightarrow x = 0.$

81. Ta có: $M = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2a + 2b \leq 2.$

$$\max M = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

82. Xét tổng của hai số:

$$\begin{aligned} (2a + b - 2\sqrt{cd}) + (2c + d - 2\sqrt{ab}) &= (a + b - 2\sqrt{ab}) + (c + d - 2\sqrt{cd}) + a + c = \\ &= (a + c) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{d})^2 \geq a + c > 0. \end{aligned}$$

83. $N = \sqrt{4\sqrt{6} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 18} = \sqrt{12 + 8\sqrt{3} + 4 + 4\sqrt{6} + 4\sqrt{2} + 2} =$
 $= \sqrt{(2\sqrt{3} + 2)^2 + 2\sqrt{2}(2\sqrt{3} + 2) + 2} = \sqrt{(2\sqrt{3} + 2 + \sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2.$

84. Từ $x + y + z = \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \Rightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 = 0.$

$\forall y x = y = z.$

85. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 1 và a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

86. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với hai số $a + b \geq 0$ và $2\sqrt{ab} \geq 0$, ta có:

$$a + b + 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}} \text{ hay } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}.$$

Đu “=” xảy ra khi $a = b$.

87. Giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Ta có $b + c > a$ nên $b + c + 2\sqrt{bc} > a$ hay $(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 > (\sqrt{a})^2$

Do đó: $\sqrt{b} + \sqrt{c} > \sqrt{a}$. Với ba đoạn thẳng $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ lập được thành một tam giác.

§ 4. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP CHIA VÀ PHÉP KHAI PHƯƠNG

88. a) Điều kiện: $ab \geq 0$; $b \neq 0$. Xét hai trường hợp:

* Trường hợp 1: $a \geq 0$; $b > 0$: $A = \frac{\sqrt{b} \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = -1.$

* Trường hợp 2: $a \leq 0$; $b < 0$: $A = \frac{\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}}{-\sqrt{b^2}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} + 1 - \sqrt{\frac{a}{b}} = 1 - 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$

b) Điều kiện :
$$\begin{cases} (x+2)^2 - 8x \geq 0 \\ x > 0 \\ \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$
 Với các điều kiện đó thì :

$$B = \frac{\sqrt{(x+2)^2 - 8x}}{\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{(x-2)^2} \cdot \sqrt{x}}{x-2} = \frac{|x-2| \cdot \sqrt{x}}{x-2}.$$

- Nếu $0 < x < 2$ thì $|x-2| = -(x-2)$ và $B = -\sqrt{x}$.
- Nếu $x > 2$ thì $|x-2| = x-2$ và $B = \sqrt{x}$.

89. Ta có :
$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(\sqrt{a^2+1})^2+1}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}.$$
 Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{a^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}} = 2. \text{ Vậy } \frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi :}$$

$$\sqrt{a^2+1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \Leftrightarrow a = 0.$$

93. Nhân 2 vế của pt với $\sqrt{2}$, ta được : $|\sqrt{2x-5}+3| + |\sqrt{2x-5}-1| = 4 \Leftrightarrow 5/2 \leq x \leq 3.$

94. Ta chứng minh bằng quy nạp toán học :

a) Với $n = 1$ ta có : $P_1 = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ (*) đúng.

b) Giả sử : $P_k < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \Leftrightarrow \frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ (1)

c) Ta chứng minh rằng (*) đúng khi $n = k+1$, tức là :

$$P_{k+1} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \Leftrightarrow \frac{1.3.5...(2k+1)}{2.4.6...(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}} \quad (2)$$

Với mọi số nguyên dương k ta có : $\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}$ (3)

Nhân theo từng vế các bất đẳng thức (1) và (3) ta được bất đẳng thức (2). Vậy $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ ta có

$$P_n = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

95. Bất đẳng thức cần chứng minh : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt{ab}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq a - \sqrt{ab} + b \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

96. Điều kiện :
$$\begin{cases} x - \sqrt{4(x-1)} \geq 0 \\ x + \sqrt{4(x-1)} \geq 0 \\ x^2 - 4(x-1) > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x > 2 \end{cases}$$

Xét trên hai khoảng $1 < x < 2$ và $x > 2$. Kết quả : $A = \frac{2}{1-x}$ và $A = \frac{2}{\sqrt{x}-1}$

105. Cách 1 : Tính $A\sqrt{2}$. Cách 2 : Tính A^2

Cách 3 : Đặt $\sqrt{2x-1} = y \geq 0$, ta có : $2x-1 = y^2$.

$$A = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{y^2+1+2y}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{y^2+1-2y}}{\sqrt{2}} = \frac{y+1}{\sqrt{2}} - \frac{|y-1|}{\sqrt{2}}$$

Với $y \geq 1$ (tức là $x \geq 1$), $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+1-y+1) = \sqrt{2}$.

Với $0 \leq y < 1$ (tức là $\frac{1}{2} \leq x < 1$), $A = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+1+y-1) = \frac{2y}{\sqrt{2}} = y\sqrt{2} = \sqrt{4x-2}$.

108. Nếu $2 \leq x \leq 4$ thì $A = 2\sqrt{2}$. Nếu $x \geq 4$ thì $A = 2\sqrt{x-2}$.

109. Bình phương : $\sqrt{x+y-2} + \sqrt{2} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Bình phương hai vế rồi rút gọn, ta được :

$$\sqrt{2(x+y-2)} = \sqrt{xy}. \text{ Lấy bình phương hai vế rồi rút gọn : } (2-y)(x-2) = 0.$$

Đáp : $x = 2, y \geq 0, x \geq 0, y = 2$.

110. Bình phương từng vế rồi rút gọn :

$$(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd \quad (2)$$

* Nếu $ac + bd < 0$, (2) hiển nhiên đúng.

* Nếu $ac + bd \geq 0$, (2) tương đương với :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd \Leftrightarrow a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd$$

$$\Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0 \quad (3). \text{ Bất đẳng thức (3) đúng, vậy bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng.}$$

111. Cách 1 : Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{b+c}{4}} = 2 \cdot \frac{a}{2} = a \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} \geq a - \frac{b+c}{4}.$$

$$\text{Tương tự : } \frac{b^2}{a+c} \geq b - \frac{a+c}{4}; \quad \frac{c^2}{a+b} \geq c - \frac{a+b}{4}.$$

$$\text{Cộng từng vế 3 bất đẳng thức : } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq (a+b+c) - \frac{a+b+c}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Cách 2 : Theo BĐT Bunhiacôpski : $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$. Ta có :

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c+a}} \right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{a+b}} \right)^2 \right] \times \left[(\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2 \right] \geq \\ & \geq \left(\frac{a}{\sqrt{b+c}} \cdot \sqrt{b+c} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} \cdot \sqrt{c+a} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \cdot \sqrt{a+b} \right)^2 \\ & \Rightarrow \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) \cdot [2(a+b+c)] \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}. \end{aligned}$$

112. a) Ta nhìn từng vế $a+1$ dưới dạng tích $1 \cdot (a+1)$ và áp dụng bất đẳng thức Cauchy : $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

$$\sqrt{a+1} = \sqrt{1 \cdot (a+1)} \leq \frac{(a+1)+1}{2} = \frac{a}{2} + 1$$

$$\text{Tổng} : \sqrt{b+1} = \frac{b}{2} + 1 ; \sqrt{c+1} = \frac{c}{2} + 1$$

$$\text{Cộng từng vế 3 bất đẳng thức} : \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \leq \frac{a+b+c}{2} + 3 = 3,5.$$

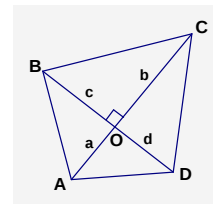
$$\text{Dù " = " xảy ra} \Leftrightarrow a+1 = b+1 = c+1 \Leftrightarrow a=b=c=0, \text{ trái với giả thiết } a+b+c=1.$$

$$\text{Vậy} : \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < 3,5.$$

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki với hai bộ ba số :

$$(1.\sqrt{a+b} + 1.\sqrt{b+c} + 1.\sqrt{c+a})^2 \leq (1+1+1) \times [(\sqrt{a+b})^2 + (\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2] \Rightarrow$$

$$(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})^2 \leq 3(a+b+b+c+c+a) = 6 \Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$$



113. Xét tứ giác ABCD có $AC \perp BD$, O là giao điểm hai đường chéo.

OA = a ; OC = b ; OB = c ; OD = d với a, b, c, d > 0. Ta có :

$$AB = \sqrt{a^2 + c^2} ; BC = \sqrt{b^2 + c^2} ; AD = \sqrt{a^2 + d^2} ; CD = \sqrt{b^2 + d^2}$$

$$AC = a + b ; BD = c + d. \text{ Cần chứng minh} : AB.BC + AD.CD \geq AC.BD.$$

$$\text{Thật vậy ta có} : AB.BC \geq 2S_{ABC} ; AD.CD \geq 2S_{ADC}. \text{ Suy ra} :$$

$$\text{Suy ra} : AB.BC + AD.CD \geq 2S_{ABCD} = AC.BD.$$

$$\text{Vậy} : \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} + \sqrt{(a^2 + d^2)(b^2 + d^2)} \geq (a+b)(c+d).$$

Chú ý : Gọi bộ ba cách áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$(m^2 + n^2)(x^2 + y^2) \geq (mx + ny)^2 \text{ với } m=a, n=c, x=c, y=b \text{ ta có} :$$

$$(a^2 + c^2)(c^2 + b^2) \geq (ac + cb)^2 \Rightarrow \sqrt{(a^2 + c^2)(c^2 + b^2)} \geq ac + cb \quad (1)$$

$$\text{Tổng} : \sqrt{(a^2 + d^2)(d^2 + b^2)} \geq ad + bd \quad (2). \text{ Cộng (1) và (2) suy ra đpcm.}$$

$$114. \text{ Lỗi gì sai} : A = x + \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}. \text{ Vậy } \min A = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Phân tích sai lầm} : \text{Sau khi chứng minh } f(x) \geq -\frac{1}{4}, \text{ chỉ ra rằng } f(x) = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Xảy ra đúng đẳng thức khi và chỉ khi } \sqrt{x} = -\frac{1}{2}. \text{ Vô lý.}$$

$$\text{Lỗi gì đúng} : \text{Đặt } t = \sqrt{x} \text{ phải có } x \geq 0. \text{ Do đó } A = x + \sqrt{x} \geq 0. \min A = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$115. \text{ Ta có } A = \frac{(x+a)(x+b)}{x} = \frac{x^2 + ax + bx + ab}{x} = \left(x + \frac{ab}{x} \right) + (a+b).$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cauchy} : x + \frac{ab}{x} \geq 2\sqrt{ab} \text{ nên } A \geq 2\sqrt{ab} + a + b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

$$\min A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x = \frac{ab}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{ab} \\ x > 0 \end{cases}$$

116. Ta xét biểu thức phải : $A^2 = (2x + 3y)^2$. Nhắc lại bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$(am + bn)^2 \leq (a^2 + b^2)(m^2 + n^2) \quad (1)$$

Nếu áp dụng (1) với a = 2, b = 3, m = x, n = y ta có :

$$A^2 = (2x + 3y)^2 \leq (2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) = 13(x^2 + y^2).$$

Với cách trên ta không chứng minh được $A^2 \leq \alpha$ mà $A^2 \leq \alpha$. Bây giờ, ta viết A^2 dưới dạng :

$A^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}x + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}y)^2$ rồi áp dụng (1) ta có :

$$A^2 = \left[(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 \right] \left[(x\sqrt{2})^2 + (y\sqrt{3})^2 \right] = (2+3)(2x^2 + 3y^2) \leq 5 \cdot 5 = 25$$

Do $A^2 \leq 25$ nên $-5 \leq A \leq 5$. $\min A = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=-1$

$$\max A = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

117. Điều kiện $x \leq 2$. Đặt $\sqrt{2-x} = y \geq 0$, ta có : $y^2 = 2-x$.

$$a = 2 - y^2 + y = -\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \max A = \frac{9}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$$

118. Điều kiện $x \geq 1$; $x \geq 1/5$; $x \geq 2/3 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Chuyển vế, rồi bình phương hai vế : $x-1 = 5x-1+3x-2+2\sqrt{15x^2-13x+2}$ (3)

Rút gọn : $2-7x = 2\sqrt{15x^2-13x+2}$. Cần có thêm điều kiện $x \leq 2/7$.

Bình phương hai vế : $4-28x+49x^2 = 4(15x^2-13x+2) \Leftrightarrow 11x^2-24x+4=0$

$$(11x-2)(x-2)=0 \Leftrightarrow x_1=2/11 ; x_2=2.$$

Cả hai nghiệm đều không thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

119. Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình biến đổi thành :

$$\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|=2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+|\sqrt{x-1}-1|=1$$

* Nếu $x > 2$ thì : $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}-1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1 \Rightarrow x=2$, không thuộc khoảng đang xét.

* Nếu $1 \leq x \leq 2$ thì : $\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2$. Vô số nghiệm $1 \leq x \leq 2$

Kết luận : $1 \leq x \leq 2$.

120. Điều kiện : $x^2+7x+7 \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^2+7x+7} = y \geq 0 \Rightarrow x^2+7x+7=y^2$.

Phương trình đã cho trở thành : $3y^2-3+2y=2 \Leftrightarrow 3y^2+2y-5=0 \Leftrightarrow (y-1)(3y+5)=0$

$\Leftrightarrow y = -5/3$ (loại) ; $y = 1$. Với $y = 1$ ta có $\sqrt{x^2+7x+7} = 1 \Rightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+6)=0$. Các giá trị $x = -1, x = -6$ thỏa mãn $x^2+7x+7 \geq 0$ là nghiệm của (1).

121. Vế trái : $\sqrt{3(x+1)^2+4} + \sqrt{5(x+1)^2+9} \geq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$.

Vế phải : $4-2x-x^2 = 5-(x+1)^2 \leq 5$. Với hai vế đều bằng 5, khi đó $x = -1$. Với giá trị này cả hai bất đẳng thức này đều trở thành đẳng thức. Kết luận : $x = -1$

122. a) Giả sử $\sqrt{3}-\sqrt{2} = a$ (a : hữu tỉ) $\Rightarrow 5-2\sqrt{6} = a^2 \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{5-a^2}{2}$. Vế phải là số hữu tỉ,

vế trái là số vô tỉ. Vô lí. Vậy $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

b) Giải thích ngắn gọn câu a.

123. Đặt $\sqrt{x-2} = a, \sqrt{4-x} = b$, ta có $a^2 + b = 2$. Sử dụng bất đẳng thức $a + b \leq 2$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{đẳng thức : } a \leq \frac{a^2+1}{2} ; b \leq \frac{b^2+1}{2}.$$

124. Đặt các đoạn thẳng $BH = a, HC = c$ trên mặt phẳng thẳng.

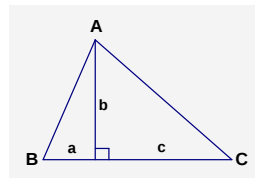
Kẻ $HA \perp BC$ với $AH = b$. Dùng bất đẳng thức $AB \cdot AC \geq 2S_{ABC} = BC \cdot AH$.

125. Bình phương hai vế rồi rút gọn, ta được bất đẳng thức tương đương

đồng : $(ad-bc)^2 \geq 0$. Chú ý : Cũng có thể chứng minh bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

126. Giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Theo đề bài : $b+c > a$. Suy ra : $b+c+2\sqrt{bc} > a \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 > (\sqrt{a})^2 \Rightarrow \sqrt{b}+\sqrt{c} > \sqrt{a}$$



Vì y ba đoạn thẳng có độ dài $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{a}$ lập được thành một tam giác.

127. Ta có $a, b \geq 0$. Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} = \frac{a+b}{2} \left(a+b+\frac{1}{2} \right) \geq \sqrt{ab} \left(a+b+\frac{1}{2} \right)$$

Cần chứng minh : $\sqrt{ab} \left(a+b+\frac{1}{2} \right) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$. Xét hiệu hai vế :

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} \left(a+b+\frac{1}{2} \right) - \sqrt{ab} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) &= \sqrt{ab} \left(a+b+\frac{1}{2} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \right) = \\ &= \sqrt{ab} \left[\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] \geq 0 \end{aligned}$$

Xảy ra dấu đẳng thức : $a = b = \frac{1}{4}$ hoặc $a = b = 0$.

128. Theo bất đẳng thức Cauchy : $\sqrt{\frac{b+c}{a}} \cdot 1 \leq \left(\frac{b+c}{a} + 1 \right) : 2 = \frac{b+c+a}{2a}$.

Do đó : $\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$. Tương tự : $\sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$

Cộng từng vế : $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$.

Xảy ra dấu đẳng thức : $\begin{cases} a = b+c \\ b = c+a \\ c = a+b \end{cases} \Rightarrow a+b+c=0$, trái với giả thiết $a, b, c > 0$.

Vì y dấu đẳng thức không xảy ra.

129. Cách 1 : Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki. Ta có :

$$\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right)^2 \leq (x^2 - y^2)(1 - y^2 + 1 - x^2).$$

Đặt $x^2 + y^2 = m$, ta được : $1^2 \leq m(2-m) \Rightarrow (m-1)^2 \leq 0 \Rightarrow m = 1$ (đpcm).

Cách 2 : Ta giả thiết : $x\sqrt{1-y^2} = 1 - y\sqrt{1-x^2}$. Bình phương hai vế :

$$\begin{aligned} x^2(1-y^2) &= 1 - 2y\sqrt{1-x^2} + y^2(1-x^2) \Rightarrow x^2 = 1 - 2y\sqrt{1-x^2} + y^2 \\ 0 &= (y - \sqrt{1-x^2})^2 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

130. Áp dụng $|A| + |B| \geq |A+B|$. $\min A = 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

131. Xét $A^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$. Do $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 2 + 2\sqrt{1-x^2} \leq 4$
 $\Rightarrow 2 \leq A^2 \leq 4$. $\min A = \sqrt{2}$ với $x = \pm 1$, $\max A = 2$ với $x = 0$.

132. Áp dụng bất đẳng thức : $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ (bài 23)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2+1^2} + \sqrt{(1-x)^2+2^2} \geq \sqrt{(x+1-x)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10} \\ \min A &= \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

133. Ta xác định : $\begin{cases} -x^2 + 4x + 12 \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(6-x) \geq 0 \\ (x+1)(3-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3 \quad (1)$

Xét hiệu : $(-x^2 + 4x + 12)(-x^2 + 2x + 3) = 2x + 9$. Do (1) nên $2x + 9 > 0$ nên $A > 0$.

Xét : $A^2 = \left(\sqrt{(x+2)(6-x)} - \sqrt{(x+1)(3-x)} \right)^2$. Hiển nhiên $A^2 \geq 0$ nhưng dấu “=” không xảy ra (vì $A > 0$). Ta biến đổi A^2 để tìm khác :

$$\begin{aligned} A^2 &= (x+2)(6-x) + (x+1)(3-x) - 2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)} = \\ &= (x+1)(6-x) + (6-x) + (x+2)(3-x) - (3-x) - 2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)} = \\ &= (x+1)(6-x) + (x+2)(3-x) - 2\sqrt{(x+2)(6-x)(x+1)(3-x)} + 3 \\ &= \left(\sqrt{(x+1)(6-x)} - \sqrt{(x+2)(3-x)} \right)^2 + 3. \end{aligned}$$

$$A^2 \geq 3. \text{ Do } A > 0 \text{ nên } \min A = \sqrt{3} \text{ với } x = 0.$$

134. a) Điều kiện : $x^2 \leq 5$.

* Tìm giá trị lớn nhất : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$A^2 = (2x + 1 \cdot \sqrt{5-x^2})^2 \leq (2^2 + 1^2)(x^2 + 5 - x^2) = 25 \Rightarrow A^2 \leq 25.$$

$$A^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \sqrt{5-x^2} \\ x^2 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 4(5-x^2) \\ x^2 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{Với } x = 2 \text{ thì } A = 5. \text{ Vậy } \max A = 5 \text{ với } x = 2.$$

* Tìm giá trị nhỏ nhất : Chú ý rằng tuy $A^2 \leq 25$, ta có $-5 \leq x \leq 5$, nhưng không xảy ra $A^2 = -5$. Do đó xác định của A , ta có $x^2 \leq 5 \Rightarrow -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$. Do đó : $2x \geq -2\sqrt{5}$ và $\sqrt{5-x^2} \geq 0$. Suy ra :

$$A = 2x + \sqrt{5-x^2} \geq -2\sqrt{5}. \text{ Min } A = -2\sqrt{5} \text{ với } x = -\sqrt{5}$$

b) Xét biểu thức phụ $|A|$ và áp dụng các bất đẳng thức Bunhiacôpxki và Cauchy :

$$|A| = |x| \left(\sqrt{99} \cdot \sqrt{99} + 1 \cdot \sqrt{101-x^2} \right) \leq |x| \sqrt{(99+1)(99+101-x^2)} = |x| \cdot 10 \cdot \sqrt{200-x^2} <$$

$$< 10 \cdot \frac{x^2 + 200 - x^2}{2} = 1000$$

$$|A| = 1000 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 101 \\ \frac{\sqrt{99}}{1} = \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{101-x^2}} \\ x^2 = 200 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 10. \text{ Do đó : } -1000 < A < 1000.$$

$$\min A = -1000 \text{ với } x = -10 ; \max A = 1000 \text{ với } x = 10.$$

$$\textbf{135. Cách 1 : } A = x + y = 1 \cdot (x + y) = \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right) (x + y) = a + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} + b.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cauchy với 2 số dương : } \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq 2\sqrt{\frac{ay}{x} \cdot \frac{bx}{y}} = 2\sqrt{ab}.$$

$$\text{Do đó } A \geq a + b + 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

$$\min A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \text{ v} \text{ i } \begin{cases} \frac{ay}{x} = \frac{bx}{y} \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + \sqrt{ab} \\ y = b + \sqrt{ab} \end{cases} \\ x, y > 0 \end{cases}$$

Cách 2 : Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$A = (x + y).1 = (x + y) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \right) \geq \left(\sqrt{x \cdot \frac{a}{x}} + \sqrt{y \cdot \frac{b}{y}} \right)^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2.$$

Tìm đó tìm được giá trị nhỏ nhất của A.

$$136. A = (x + y)(x + z) = x^2 + xz + xy + yz = x(x + y + z) + yz \geq 2\sqrt{xyz(x + y + z)} = 2$$

$$\min A = 2 \text{ khi chọn } y = z = 1, x = \sqrt{2} - 1.$$

$$137. \text{ Theo bất đẳng thức Cauchy : } \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{z} \cdot \frac{yz}{x}} = 2y.$$

$$\text{Tương tự : } \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 2z ; \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \geq 2x. \text{ Suy ra } 2A \geq 2(x + y + z) = 2.$$

$$\min A = 1 \text{ v} \text{ i } x = y = z = \frac{1}{3}.$$

$$138. \text{ Theo bài tập 24 : } \frac{x^2}{x + y} + \frac{y^2}{y + z} + \frac{z^2}{z + x} \geq \frac{x + y + z}{2}. \text{ Theo bất đẳng thức Cauchy :}$$

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} ; \frac{y + z}{2} \geq \sqrt{yz} ; \frac{z + x}{2} \geq \sqrt{zx} \text{ nên } \frac{x + y + z}{2} \geq \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

$$139. \text{ a) } A = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 2a + 2b \leq 2.$$

$$\max A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) Ta có : } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^4 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^4 = 2(a^2 + b^2 + 6ab)$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{c})^4 \leq 2(a^2 + c^2 + 6ac) ; (\sqrt{a} + \sqrt{d})^4 \leq 2(a^2 + d^2 + 6ad)$$

$$\text{Tương tự : } (\sqrt{b} + \sqrt{c})^4 \leq 2(b^2 + c^2 + 6bc) ; (\sqrt{b} + \sqrt{d})^4 \leq 2(b^2 + d^2 + 6bd)$$

$$(\sqrt{c} + \sqrt{d})^4 \leq 2(c^2 + d^2 + 6cd)$$

$$\text{Suy ra : } B \leq 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd) = 6(a + b + c + d)^2 \leq 6$$

$$\max B = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c} = \sqrt{d} \\ a + b + c + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{4}$$

$$140. A = 3^x + 3^y \geq 2\sqrt{3^x \cdot 3^y} = 2\sqrt{3^{x+y}} = 2\sqrt{3^4} = 18. \min A = 18 \text{ v} \text{ i } x = y = 2.$$

141. Không mặt tính tổng quát, giả sử $a + b \geq c + d$. Tìm giá trị tối thiểu suy ra :

$$b+c \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

$$A = \frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b} = \frac{b+c}{c+d} - \left(\frac{c}{c+d} - \frac{c}{a+b} \right) \geq \frac{a+b+c+d}{2(c+d)} - \left(\frac{c+d}{c+d} - \frac{c+d}{a+b} \right)$$

Đặt $a+b=x$; $c+d=y$ với $x \geq y > 0$, ta có:

$$A \geq \frac{x+y}{2y} - \frac{y}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x}{2y} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{y}{x} = \left(\frac{x}{2y} + \frac{y}{x} \right) - \frac{1}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{2y} \cdot \frac{y}{x}} - \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

$$\min A = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow d=0, x=y\sqrt{2}, b+c \geq a+d; \text{ chỉ đúng khi}$$

$$a=\sqrt{2}+1, b=\sqrt{2}-1, c=2, d=0$$

142. a) $(x-3)^2 + (\sqrt{x}-\sqrt{3})^2 = 0$. Đáp số: $x=3$.

b) Bình phương hai vế, đưa vế: $(x^2+8)(x^2-8x+8)=0$. Đáp số: $x=4+2\sqrt{2}$.

c) Đáp số: $x=20$.

d) $\sqrt{x-1}=2+\sqrt{x+1}$. Vế phải lớn hơn vế trái. Vô nghiệm.

e) Chuyển vế: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1+\sqrt{x-1}$. Bình phương hai vế. Đáp số: $x=1$.

g) Bình phương hai vế. Đáp số: $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

h) Đặt $\sqrt{x-2}=y$. Đưa vế đúng $|y-2|+|y-3|=1$. Chú ý điểm bất đẳng thức:

$$|y-2|+|3-y| \geq |y-2+3-y|=1. \text{ Tìm được } 2 \leq y \leq 3. \text{ Đáp số: } 6 \leq x \leq 11.$$

i) Chuyển vế: $\sqrt{x+\sqrt{1-x}}=1-\sqrt{x}$, rồi bình phương hai vế. Đáp: $x=0$ (chú ý loại $x=\frac{16}{25}$)

k) Đáp số: $\frac{16}{25}$.

l) Điều kiện: $x \geq 1$ hoặc $x=-1$. Bình phương hai vế rồi rút gọn:

$$2\sqrt{2(x+1)^2(x+3)(x-1)}=x^2-1.$$

Bình phương hai vế: $8(x+1)^2(x+3)(x-1)=(x+1)^2(x-1)^2 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)(7x+25)=0$

$$x=-\frac{25}{7} \text{ loại. Nghiệm là: } x=\pm 1.$$

m) Vế trái lớn hơn x , vế phải không lớn hơn x . Phương trình vô nghiệm.

n) Điều kiện: $x \geq -1$. Bình phương hai vế, xuất hiện điều kiện $x \leq -1$. Nghiệm là: $x=-1$.

o) Do $x \geq 1$ nên vế trái lớn hơn hoặc bằng 2, vế phải nhỏ hơn hoặc bằng 2. Suy ra hai vế bằng 2, khi đó $x=1$, thế vào mẫu phương trình.

p) Đặt $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+2}=y$; $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+2}=z$ (1). Ta có:

$$y^2-z^2=1+2\sqrt{x+2}; y+z=1+2\sqrt{x+2}. \text{ Suy ra } y-z=1.$$

Từ đó $z=\sqrt{x+2}$ (2). Từ (1) và (2) tính được x . Đáp số: $x=2$ (chú ý loại $x=-1$).

q) Đặt $2x^2-9x+4=a \geq 0$; $2x-1 \geq b \geq 0$. Phương trình là: $\sqrt{a}+3\sqrt{b}=\sqrt{a+15b}$. Bình phương

hai vế rồi rút gọn ta được: $b=0$ hoặc $b=a$. Đáp số: $\frac{1}{2}; 5$

§ 5. BỒI DƯỠNG HS GIỎI VÀ NĂNG KHIẾU CẤP C HAI

144. Ta có : $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$

Vậy : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 2(\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$
 $= 2(\sqrt{n+1} - 1) \quad (\text{đpcm}).$

150. Đưa các biểu thức đã cho vào căn và dùng các bình phương đúng. $M = -2$

151. Tìm căn thức của mẫu và tìm hằng số. Kết quả : $A = \sqrt{n} - 1.$

152. Ta có : $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a+1}} = -(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}) \Rightarrow P = -(\sqrt{2} + \sqrt{2n+1}).$

P không phải là số hữu tỉ (chứng minh bằng phản chứng).

153. Ta hãy chứng minh : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Rightarrow A = \frac{9}{10}$

154. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n}.$

155. Ta có $a + 1 = \sqrt{17}$. Biểu thức đa thức trong ngoặc thành tổng các lũy thừa của $a + 1$
 $A = [(a + 1)^5 - 3(a + 1)^4 - 15(a + 1)^3 + 52(a + 1)^2 - 14(a + 1)]^{2000}$
 $= (259\sqrt{17} - 225\sqrt{17} - 34\sqrt{17} - 1)^{2000} = 1.$

156. Biểu thức : $\sqrt{a} - \sqrt{a-1} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}} ; \sqrt{a-2} - \sqrt{a-3} = \frac{1}{\sqrt{a-2} + \sqrt{a-3}}.$

157. $x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{4} + x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$

Dù “=” không xảy ra vì không thể có đồng thời : $x = \frac{1}{2}$ và $\sqrt{x} = \frac{1}{2}.$

158. Tìm giá trị nhỏ nhất của chứng minh : $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \quad (*) \quad (a + b \geq 0)$

Áp dụng (*) ta có : $S = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} \leq \sqrt{2(x-1+y-2)} = \sqrt{2}$

$$\max S = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=y-2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

* Có thể tính S^2 rồi áp dụng bất đẳng thức Cauchy.

170. Ta phải có $|A| \leq \sqrt{3}$. Đặt thay $A > 0$. Ta xét biểu thức : $B = \frac{1}{A} = 2 - \sqrt{3-x^2}$. Ta có :

$$0 \leq \sqrt{3-x^2} \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq -\sqrt{3-x^2} \leq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{3} \leq 2 - \sqrt{3-x^2} \leq 2.$$

$$\min B = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow x = 0. \text{ Khi đó } \max A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \max B = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}. \text{ Khi đó } \min A = \frac{1}{2}$$

171. Để áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta xét biểu thức : $B = \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x}$. Khi đó :

$$B \geq 2\sqrt{\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2}. \quad B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x} & (1) \\ 0 < x < 1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải (1): } 2x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow |x\sqrt{2}| = |1-x|. \text{ Do } 0 < x < 1 \text{ nên } x\sqrt{2} = 1-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1.$$

$$\text{Như vậy } \min B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}-1.$$

$$\text{Bây giờ ta xét hiệu: } A - B = \left(\frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x}\right) = \frac{2-2x}{1-x} + \frac{1-1+x}{x} = 2+1=3$$

$$\text{Do đó } \min A = 2\sqrt{2} + 3 \text{ khi và chỉ khi } x = \sqrt{2}-1.$$

172. a) Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 2$. Bất đẳng thức Cauchy cho phép làm giảm một phần:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad \text{đây ta muốn làm tăng một phần. Ta dùng bất đẳng thức: } a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

$$A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} \leq \sqrt{2(x-1+y-3)} = \sqrt{2}$$

$$\max A = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = y-2 \\ x+y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,5 \\ y = 2,5 \end{cases}$$

Cách khác: Xét A^2 rồi dùng bất đẳng thức Cauchy.

b) Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 2$. Bất đẳng thức Cauchy cho phép làm tăng một phần: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$$\text{Ta xem các biểu thức } \sqrt{x-1}, \sqrt{y-2} \text{ là các tích: } \sqrt{x-1} = \sqrt{1 \cdot (x-1)}, \sqrt{y-2} = \frac{\sqrt{2(y-2)}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cauchy: } \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{1 \cdot (x-1)}{x} \leq \frac{1+x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{y-2}}{y} = \frac{\sqrt{2 \cdot (y-2)}}{y\sqrt{2}} \leq \frac{2+y-2}{2y\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\max B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{173. } a = \frac{1}{\sqrt{1997} + \sqrt{1996}}, b = \frac{1}{\sqrt{1998} + \sqrt{1997}}. \text{ Ta thấy } \sqrt{1997} + \sqrt{1996} < \sqrt{1998} + \sqrt{1997}$$

Nên $a < b$.

$$\text{174. a) } \min A = 5 - 2\sqrt{6} \text{ với } x = 0. \max A = \frac{1}{5} \text{ với } x = \pm \sqrt{6}.$$

$$\text{b) } \min B = 0 \text{ với } x = 1 \pm \sqrt{5}. \max B = \sqrt{5} \text{ với } x = 1$$

$$\text{175. Xét } -1 \leq x \leq 0 \text{ thì } A \leq 0. \text{ Xét } 0 \leq x \leq 1 \text{ thì } A = \sqrt{x^2(1-x^2)} \leq \frac{x^2 + (1-x^2)}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\max A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1-x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

176. $A = |x-y| \geq 0$, do đó A là một số không âm và chỉ khi A^2 là một số không âm. Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski:

$$A^2 = (x-y)^2 = \left(1 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot 2y\right)^2 \leq \left(1 + \frac{1}{4}\right)(x^2 + 4y^2) = \frac{5}{4}$$

$$\max A = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x} = -\frac{1}{2} \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

177. a) Tìm giá trị lớn nhất: Tìm giá trị:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq x^2 \\ y^3 \leq y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 = 1$$

$$\max A = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = x^2 \\ y^3 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = 1 \text{ V } x = 1, y = 0$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất: $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) = 2 \Rightarrow x+y \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{2}} \leq 1$. Do đó:

$x^3 + y^3 \geq \frac{(x^3+y^3)(x+y)}{\sqrt{2}}$. Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

$$(x^3+y^3)(x+y) = \left[(\sqrt{x^3})^2 + (\sqrt{y^3})^2 \right] \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \right] \geq (\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{y^3} \cdot \sqrt{y})^2 = (x^2+y^2) = 1$$

$$\min A = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

179. Đặt $\sqrt{x} = a$; $\sqrt{y} = b$, ta có $a, b \geq 0$, $a+b=1$.

$$A = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^2-ab+b^2 = (a+b)^2 - 3ab = 1 - 3ab.$$

Do $ab \geq 0$ nên $A \leq 1$. $\max A = 1 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1, y = 0$.

$$\text{Ta có } ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1-3ab \geq \frac{1}{4}. \min A = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{4}$$

180. Điều kiện: $1-x \geq 0$, $2-x \geq 0$ nên $x \leq 1$. Ta có:

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{(x-1)(x-2)} - |x-2|\sqrt{\frac{x-1}{x-2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{(x-1)(x-2)} - \sqrt{(x-1)(x-2)} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 3 \Leftrightarrow x = -8.$$

§ 6. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨNG A CĂN BẬC HAI

181. Ta có: $6+4x+2x^2 = 2(x^2+2x+1)+4 = 2(x+1)^2+4 > 0$ với mọi x . Với mọi x ta có:

Đặt $\sqrt{x^2+2x+3} = y \geq 0$, phương trình có dạng:

$$y^2 - y\sqrt{2} - 12 = 0 \Leftrightarrow (y-3\sqrt{2})(y+2\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (loại vì } y \geq 0)$$

Do đó $\sqrt{x^2+2x+3} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+2x+3 = 18 \Leftrightarrow (x-3)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $x = -5$.

182. Ta có: $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \sqrt{k} \cdot \frac{1}{(k+1)k} = \sqrt{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sqrt{k} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right). \text{ Do đó: } \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right).$$

$$\forall y: \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2 \quad (\text{đpcm}).$$

183. Dùng bất đẳng thức Cauchy $\frac{1}{\sqrt{ab}} > \frac{2}{a+b}$ ($a, b > 0; a \neq 0$).

184. Cho $x - y = a$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ (1) thì $a, b \in \mathbf{Q}$.

a) Nếu $b = 0$ thì $x = y = 0$, do đó $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbf{Q}$.

b) Nếu $b \neq 0$ thì $\frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{a}{b} \in \mathbf{Q}$ (2).

Từ (1) và (2): $\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) \in \mathbf{Q}$; $\sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{b}\right) \in \mathbf{Q}$.

190. Nhận xét: $(\sqrt{x^2 + a^2} + x)(\sqrt{x^2 + a^2} - x) = a^2$. Do đó:

$$2\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) \leq \frac{5a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (1) \Leftrightarrow 2\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) \leq \frac{5(\sqrt{x^2 + a^2} + x)(\sqrt{x^2 + a^2} - x)}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Do $a \neq 0$ nên: $\sqrt{x^2 + a^2} + x > \sqrt{x^2} + x = |x| + x \geq 0$. Suy ra: $\sqrt{x^2 + a^2} + x > 0$, $\forall x$.

Vì vậy: (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + a^2} \leq 5(\sqrt{x^2 + a^2} - x) \Leftrightarrow 5x \leq 3\sqrt{x^2 + a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x > 0 \\ 25x^2 \leq 9x^2 + 9a^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 0 < x \leq \frac{3}{4}|a| \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{4}|a|.$$

198. c) Tính x theo a để $x = \frac{1-2a}{2\sqrt{a(1-a)}}$. Sau đó tính $\sqrt{1+x^2}$ để $\frac{1}{2\sqrt{a(1-a)}}$.

Đáp số: $B = 1$.

d) Ta có $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$. Tương tự:

$b^2 + 1 = (b+a)(b+c)$; $c^2 + 1 = (c+a)(c+b)$. Đáp số: $M = 0$.

199. Giả sử trái là $A > 0$. Ta có $A^2 = \frac{2x+4}{\sqrt{x}}$. Suy ra điều phi chứng minh.

200. Ta có: $a + b = -1$, $ab = -\frac{1}{4}$ nên: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{9} = \frac{17}{8}$; $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$

Do đó: $a^7 + b^7 = (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) - a^3b^3(a+b) = -\frac{7}{4} \cdot \frac{17}{8} - \left(-\frac{1}{64}\right)(-1) = -\frac{239}{64}$.

201. a) $a^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8}$.

$a^3 = (\sqrt{2} - 1)^3 = 2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1 = 5\sqrt{2} - 7 = \sqrt{50} - \sqrt{49}$.

b) Theo khai triển Newton: $(1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2}$; $(1 + \sqrt{2})^n = A + B\sqrt{2}$ với $A, B \in \mathbf{N}$

Suy ra: $A^2 - 2B^2 = (A + B\sqrt{2})(A - B\sqrt{2}) = [(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})]^n = (-1)^n$.

Nếu n chẵn thì $A^2 - 2B^2 = 1$ (1). Nếu n lẻ thì $A^2 - 2B^2 = -1$ (2).

Bây giờ ta xét a^n . Có hai trường hợp:

* Nếu n chẵn thì : $a^n = (\sqrt{2} - 1)^n = (1 - \sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2} = \sqrt{A^2 - 2B^2}$. Điều kiện $A^2 - 2B^2 = 1$ để có thể a mãi do (1).

* Nếu n lẻ thì : $a^n = (\sqrt{2} - 1)^n = -(1 - \sqrt{2})^n = B\sqrt{2} - A = \sqrt{2B^2 - A^2}$. Điều kiện $2B^2 - A^2 = 1$ để có thể a mãi do (2).

202. Thay $a = \sqrt{2}$ vào phương trình đã cho : $2\sqrt{2} + 2a + b\sqrt{2} + c = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(b+2) = -(2a+c).$$

Do a, b, c hữu tỉ nên phải có $b+2=0$ do đó $2a+c=0$. Thay $b=-2, c=-2a$ vào phương trình đã cho : $x^3 + ax^2 - 2x - 2a = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) + a(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(x + a) = 0$.

Các nghiệm phương trình đã cho là : $\pm\sqrt{2}$ và $-a$.

203. Xét $A = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

a) Chứng minh $A > 2\sqrt{n} - 3$: Làm gì mà mới sẽ chứng minh được A :

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } A &> 2\left[(-\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (-\sqrt{3} + \sqrt{4}) + \dots + (-\sqrt{n} + \sqrt{n+1})\right] = \\ &= 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} > 2\sqrt{n+1} - 3 > 2\sqrt{n} - 3. \end{aligned}$$

b) Chứng minh $A < 2\sqrt{n} - 2$: Làm thế nào mới sẽ chứng minh được A :

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$\text{Do đó : } A < 2\left[(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + \dots + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1})\right] = 2\sqrt{n} - 2.$$

204. Ký hiệu $a_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}$ có n dấu căn. Ta có :

$$a_1 = \sqrt{6} < 3; a_2 = \sqrt{6 + a_1} < \sqrt{6 + 3} = 3; a_3 = \sqrt{6 + a_2} < \sqrt{6 + 3} = 3 \dots a_{100} = \sqrt{6 + a_{99}} < \sqrt{6 + 3} = 3$$

Hiển nhiên $a_{100} > \sqrt{6} > 2$. Nhảy vảy $2 < a_{100} < 3$, do đó $[a_{100}] = 2$.

205. a) Cách 1 (tính trực tiếp) : $a^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$.

Ta có $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$ nên $6 < 4\sqrt{3} < 7 \Rightarrow 13 < a^2 < 14$. Vậy $[a^2] = 13$.

Cách 2 (tính gián tiếp) : Xét $x = (2 + \sqrt{3})^2$ thì $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

Xét biểu thức $y = (2 - \sqrt{3})^2$ thì $y = 7 - 4\sqrt{3}$. Suy ra $x + y = 14$.

Đặt $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$ nên $0 < (2 - \sqrt{3})^2 < 1$, tức là $0 < y < 1$. Do đó $13 < x < 14$.

$$\text{Vậy } [x] = 13 \text{ tức là } [a^2] = 13.$$

b) Đáp số : $[a^3] = 51$.

206. Xét $x - y = a; \sqrt{x} + \sqrt{y} = b$ (1) thì a và b là số hữu tỉ. Xét hai trường hợp :

a) Nếu $b \neq 0$ thì $\frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{a}{b}$ là số hữu tỉ (2). Từ (1) và (2) ta có :

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a}{b}\right) \text{ là số hữu tỉ ; } \sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a}{b}\right) \text{ là số hữu tỉ.}$$

b) Nếu $b = 0$ thì $x = y = 0$, hiển nhiên $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ là số hữu tỉ.

207. Ta có $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right). \text{ Từ đó ta giải được bài toán.}$$

208. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Giả sử trong 25 số tự nhiên đã cho, không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_{25}$. Suy ra : $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots$

$a_{25} \geq 25$. Khi đó : $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}} \quad (1)$. Ta lại có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{25}} + \frac{1}{\sqrt{24}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} &= \frac{2}{\sqrt{25} + \sqrt{25}} + \frac{2}{\sqrt{24} + \sqrt{24}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + 1 < \\ < \frac{2}{\sqrt{24} + \sqrt{24}} + \frac{2}{\sqrt{23} + \sqrt{23}} + \dots + \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} + 1 &= 2(\sqrt{25} - \sqrt{24} + \sqrt{24} - \sqrt{23} + \dots + \sqrt{2} - \sqrt{1}) + 1 = \\ &= 2(\sqrt{25} - \sqrt{1}) + 1 = 9 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} < 9$, trái với giả thiết. Vậy tồn tại hai số bằng nhau

trong 25 số $a_1, a_2, \dots, a_{25}$.

209. Điều kiện : $0 \leq x \leq 4$. Đặt $\sqrt{2 + \sqrt{x}} = a \geq 0; \sqrt{2 - \sqrt{x}} = b \geq 0$.

Ta có : $ab = \sqrt{4 - x}, a^2 + b^2 = 4$. Phương trình là : $\frac{a^2}{\sqrt{2+a}} + \frac{b^2}{\sqrt{2-b}} = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2 \sqrt{2} - a^2 b + b^2 \sqrt{2} + ab^2 &= \sqrt{2}(2 - b\sqrt{2} + a\sqrt{2} - ab) \\ \Rightarrow \sqrt{2}(a^2 + b^2 - 2 + ab) - ab(a - b) &= 2(a - b) \\ \Rightarrow \sqrt{2}(2 + ab) = (a - b)(2 + ab) \quad (\text{chú ý : } a^2 + b^2 = 4) \\ \Rightarrow a - b &= \sqrt{2} \quad (\text{do } ab + 2 \neq 0) \end{aligned}$$

Bình phương : $a^2 + b^2 - 2ab = 2 \Rightarrow 2ab = 2 \Rightarrow ab = 1 \Rightarrow \sqrt{4 - x} = 1$. Tìm được $x = 3$.

210. Điều kiện : $0 < x \leq 1, a \geq 0$. Bình phương hai vế rồi thu gọn : $\sqrt{1 - x^2} = \frac{a - 1}{a + 1}$.

Với $a \geq 1$, bình phương hai vế, cuối cùng được : $x = \frac{2\sqrt{a}}{a + 1}$.

Điều kiện $x \leq 1$ thỏa mãn (theo bất đẳng thức Cauchy). Kết luận : Nghiệm là $x = \frac{2\sqrt{a}}{a + 1}$. Với $a \geq 1$.

211. Nếu $x = 0$ thì $y = 0, z = 0$. Tổng thì đúng với y và z . Nếu $xyz \neq 0$, hiển nhiên $x, y, z > 0$

Tổng phương trình đã cho ta có : $\sqrt{x} = \frac{2y}{1+y} \leq \frac{2y}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}$.

Tổng thì $\sqrt{y} \leq \sqrt{z}; \sqrt{z} \leq \sqrt{x}$. Suy ra $x = y = z$. Xét ra dấu "=" các bất đẳng thức trên với $x = y = z = 1$. Kết luận : Hai nghiệm $(0; 0; 0), (1; 1; 1)$.

212. a) Đặt $A = (8 + 3\sqrt{7})^7$. Để chứng minh bài toán, cần tìm số B sao cho $0 < B < \frac{1}{10^7}$ và

$A + B$ là số tự nhiên.

Chọn $B = (8 - 3\sqrt{7})^7$. Dễ thấy $B > 0$ vì $8 > 3\sqrt{7}$. Ta có $8 + 3\sqrt{7} > 10$ suy ra :

$$\frac{1}{(8 + 3\sqrt{7})^7} < \frac{1}{10^7} \Rightarrow (8 - 3\sqrt{7})^7 < \frac{1}{10^7}$$

Theo khai triển Newton ta lại có : $A = (8 + 3\sqrt{7})^7 = a + b\sqrt{7}$ với $a, b \in \mathbb{N}$.

$B = (8 - 3\sqrt{7})^7 = a - b\sqrt{7}$. Suy ra $A + B = 2a$ là số tự nhiên.

Do $0 < B < \frac{1}{10^7}$ và $A + B$ là số tự nhiên nên A có bảy chữ số 9 liên tiếp sau dấu phẩy.

Chú ý: $10^{-7} = 0,0000001$.

b) Giải thích nguyên nhân câu a.

213. Ta thấy với n là số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số tự nhiên, nếu n khác số chính phương thì $\sqrt{n}$ là số vô tỉ, nên $\sqrt{n}$ không có dạng $\overline{...,5}$. Do đó trong dãy với mỗi số $n \in \mathbb{N}^*$ có duy nhất một số nguyên a_n gần $\sqrt{n}$ nhất.

Ta thấy rằng, với n bằng 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... thì a_n bằng 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, ... Ta sẽ chứng minh rằng a_n liên tiếp nhận các giá trị: hai số 1, bốn số 2, sáu số 3... Nói cách khác ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$1 - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 1 + \frac{1}{2} \quad \text{có hai nghiệm tự nhiên.}$$

$$2 - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 2 + \frac{1}{2} \quad \text{có bốn nghiệm tự nhiên.}$$

$$3 - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 3 + \frac{1}{2} \quad \text{có sáu nghiệm tự nhiên.}$$

Tổng quát: $k - \frac{1}{2} < \sqrt{x} < k + \frac{1}{2}$ có $2k$ nghiệm tự nhiên. Thử thay, bất đẳng thức tương đương với:

$k^2 - k + \frac{1}{4} < x < k^2 + k + \frac{1}{4}$. Rõ ràng bất đẳng thức này có $2k$ nghiệm tự nhiên là: $k^2 - k + 1$; $k^2 - k + 2$; ...; $k^2 + k$. Do đó:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1980}} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{44} + \frac{1}{44} + \dots + \frac{1}{44} \right) = 2.44 = 88.$$

214. Giải thích nguyên nhân bài 24.

a) $1 < a_n < 2$. Với $[a_n] = 1$.

b) $2 \leq a_n \leq 3$. Với $[a_n] = 2$.

c) Ta thấy: $44^2 = 1936 < 1996 < 2025 = 45^2$, còn $46^2 = 2116$.

$$a_1 = \sqrt{1996} = 44 < a_1 < 45.$$

Hãy chứng minh với $n \geq 2$ thì $45 < a_n < 46$.

Như vậy với $n = 1$ thì $[a_n] = 44$, với $n \geq 2$ thì $[a_n] = 45$.

215. Cần tìm số tự nhiên B sao cho $B \leq A < B + 1$. Làm gì và làm thế nào để tìm hai số tự nhiên liên tiếp.

$$\text{Ta có: } (4n + 1)^2 < 16n^2 + 8n + 3 < (4n + 2)^2 \Rightarrow 4n + 1 < \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < 4n + 2$$

$$\Rightarrow 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < 4n^2 + 4n + 2 < 4n^2 + 8n + 4$$

$$\Rightarrow (2n + 1)^2 < 4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < (2n + 2)^2.$$

$$\text{Lấy căn bậc hai: } 2n + 1 < A < 2n + 2. \text{ Với } [A] = 2n + 1.$$

216. Để chứng minh bài toán, ta chứng minh hai mệnh đề sau: $0 < y < 0,1$ (1).

$x + y$ là một số tự nhiên có cùng chữ số hàng 2 (2).

Ta chọn $y = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{200}$. Ta có $0 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,3$ nên $0 < y < 0,1$. Điều kiện (1) được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh $x + y$ là một số tự nhiên có cùng chữ số hàng 2. Ta có:

$$x + y = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{200} + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{200} = (5 + 2\sqrt{6})^{100} + (5 - 2\sqrt{6})^{100}.$$

Xét biểu thức tổng quát $S_n = a^n + b^n$ với $a = 5 + 2\sqrt{6}$, $b = 5 - 2\sqrt{6}$.

$$S_n = (5 + 2\sqrt{6})^n + (5 - 2\sqrt{6})^n$$

A và b có tổng bằng 10, tích bằng 1 nên chúng là nghiệm của phương trình $X^2 - 10X + 1 = 0$, tức là : $a^2 = 10a - 1$ (3); $b^2 = 10b - 1$ (4).

Nhân (3) với a^n , nhân (4) với b^n : $a^{n+2} = 10a^{n+1} - a^n$; $b^{n+2} = 10b^{n+1} - b^n$.

$$\text{Suy ra } (a^{n+2} + b^{n+2}) = 10(a^{n+1} + b^{n+1}) - (a^n + b^n),$$

$$\text{tức là } S_{n+2} = 10S_{n+1} - S_n, \text{ hay } S_{n+2} \equiv -S_{n+1} \pmod{10}$$

$$\text{Do đó } S_{n+4} \equiv -S_{n+2} \equiv S_n \pmod{10} \quad (5)$$

Ta có $S_0 = (5 + 2\sqrt{6})^0 + (5 - 2\sqrt{6})^0 = 1 + 1 = 2$; $S_1 = (5 + 2\sqrt{6}) + (5 - 2\sqrt{6}) = 10$.

Từ công thức (5) ta có $S_2, S_3, \dots, S_n$ là số tự nhiên, và $S_0, S_4, S_8, \dots, S_{100}$ có cùng cùng bằng 2, tức là tổng $x + y$ là một số tự nhiên có cùng cùng bằng 2. Điều kiện (2) được chứng minh. Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

217. Biểu thức $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{250} = (5 + 2\sqrt{6})^{125}$. Phân nguyên của nó có chữ số tận cùng bằng 9.

(Giải tiếp theo bài 36)

218. Ta có :

$$A = ([\sqrt{1}] + \dots + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + \dots + [\sqrt{8}]) + ([\sqrt{9}] + \dots + [\sqrt{15}]) + ([\sqrt{16}] + \dots + [\sqrt{24}])$$

Theo cách chia nhóm như trên, nhóm 1 có 3 số, nhóm 2 có 5 số, nhóm 3 có 7 số, nhóm 4 có 9 số.

Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4.

$$\text{Vậy } A = 1.3 + 2.5 + 3.7 + 4.9 = 70$$

§ 7. CĂN BẬC BA

219. a) Xét $0 \leq x \leq 3$. Với t A được định nghĩa : $A = 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (3 - x)$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

$$\text{cho 3 số không âm } \frac{x}{2}, \frac{x}{2}, (3 - x) \text{ ta được : } \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (3 - x) \leq \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 3 - x}{3} \right)^3 = 1.$$

Do đó $A \leq 4$ (1)

b) Xét $x > 3$, khi đó $A \leq 0$ (2). So sánh (1) và (2) ta đi đến kết luận :

$$\max A = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 3 - x \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

220. a) Lập phương hai vế, áp dụng hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, ta được :

$$x + 1 + 7 - x + 3\sqrt[3]{(x+1)(7-x)} \cdot 2 = 8 \Leftrightarrow (x+1)(7-x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 7 \text{ (thỏa)}$$

b) Điều kiện : $x \geq -1$ (1). Đặt $\sqrt[3]{x-2} = y$; $\sqrt{x+1} = z$. Khi đó $x - 2 = y^3$; $x + 1 = z^2$ nên $z^2 - y^3 = 3$. Phương trình đã cho được đưa về :

$$\begin{cases} y + z = 3 & (2) \\ z^2 - y^3 = 3 & (3) \\ z \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Rút từ (2) : $z = 3 - y$. Thay vào (3) : $y^3 - y^2 + 6y - 6 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)(y^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Suy ra $z = 2$, thỏa mãn (4). Từ đó $x = 3$, thỏa mãn (1). Kết luận : $x = 3$.

221. a) Có, chứng minh : $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

b) Không. Giả sử tồn tại các số hữu tỉ dương a, b mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt[4]{2}$. Bình phương hai vế :

$$a + b + 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{ab} = \sqrt{2} - (a + b).$$

Bình phương 2 vế : $4ab = 2 + (a + b)^2 - 2(a + b)\sqrt{2} \Rightarrow 2(a + b)\sqrt{2} = 2 + (a + b)^2 - 4ab$
 Vế phải là số hữu tỉ, vế trái là số vô tỉ (vì $a + b \neq 0$), mâu thuẫn.

222. a) Giả sử $\sqrt[3]{5}$ là số hữu tỉ $\frac{m}{n}$ (phân số tối giản). Suy ra $5 = \frac{m^3}{n^3}$. Hãy chứng minh rằng

m và n đều chia hết cho 5, trái giả thiết $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

b) Giả sử $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ là số hữu tỉ $\frac{m}{n}$ (phân số tối giản). Suy ra :

$$\frac{m^3}{n^3} = (\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})^3 = 6 + 3\sqrt[3]{8} \cdot \frac{m}{n} = 6 + \frac{6m}{n} \Rightarrow m^3 = 6n^3 + 6mn^2 \quad (1) \Rightarrow m^3 : 2 \Rightarrow m : 2$$

Thay $m = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) vào (1) : $8k^3 = 6n^3 + 12kn^2 \Rightarrow 4k^3 = 3n^3 + 6kn^2$. Suy ra $3n^3$ chia hết cho 2
 $\Rightarrow n^3$ chia hết cho 2 $\Rightarrow n$ chia hết cho 2. Như vậy m và n cùng chia hết cho 2, trái với giả thiết $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản.

223. Cách 1 : Đặt $a = x^3, b = y^3, c = z^3$. Bất đẳng thức cần chứng minh $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ tương đương

đồng với $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz$ hay $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$. Ta có hằng đẳng thức :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]. \quad (\text{bài tập sbt})$$

Do $a, b, c \geq 0$ nên $x, y, z \geq 0$, do đó $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$. Như vậy : $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

Xét ra dấu đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2 : Trùng hợp hết ta chứng minh bất đẳng thức Cauchy cho bốn số không âm. Ta có :

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \right) \geq \frac{1}{2} (\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \geq \sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

Trong bất đẳng thức $\left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^4 \geq abcd$, đặt $d = \frac{a+b+c}{3}$ ta được :

$$\left(\frac{a+b+c + \frac{a+b+c}{3}}{4} \right)^4 \geq abc \cdot \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^4 \geq abc \cdot \frac{a+b+c}{3}.$$

Chia hai vế cho số đồng nhất $\frac{a+b+c}{3}$ (trùng hợp hết p m t trong các số a, b, c bằng 0, bài toán đồng nhất

chứng minh) : $\left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 \geq abc \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$

Xét ra đẳng thức : $a = b = c = \frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

224. Từ giả thiết suy ra : $\frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} \leq 1 - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+1}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy

cho 3 số dương : $\frac{1}{a+1} \geq \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{bcd}{(b+1)(c+1)(d+1)}}$. Từ đó suy ra :

$$\frac{1}{b+1} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{acd}{(a+1)(c+1)(d+1)}}$$

$$\frac{1}{c+1} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abd}{(a+1)(b+1)(d+1)}}$$

$$\frac{1}{d+1} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}}$$

$$\text{Nhân từng vế nhân bất đẳng thức : } 1 \geq 81abcd \Rightarrow abcd \leq \frac{1}{81}.$$

225. Gọi $A = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$$3A = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \right) (1+1+1) \geq \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right)^2 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với ba số không âm : $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 3 \quad (2)$

Nhân từng vế (1) với (2) : $3A \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right) \geq 3 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \right)^2 \Rightarrow A \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

226. Đặt $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}}$; $y = \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}}$ thì $x^3 + y^3 = 6 \quad (1)$. Xét hiệu $b^3 - a^3$, ta được :

$$b^3 - a^3 = 24 - (x+y)^3 = 24 - (x^3 + y^3) - 3xy(x+y)$$

Do (1), ta thay 24 bởi $4(x^3 + y^3)$, ta có :

$$b^3 - a^3 = 4(x^3 + y^3) - (x^3 + y^3) - 3xy(x+y) = 3(x^3 + y^3) - 3xy(x+y) = 3(x+y)(x^2 - xy + y^2 - xy) = 3(x+y)(x-y)^2 > 0 \quad (\text{vì } x > y > 0).$$

$$\forall y \quad b^3 > a^3, \text{ do đó } b > a.$$

227. a) Bất đẳng thức đúng với $n = 1$. Với $n \geq 2$, theo khai triển Newton, ta có :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &< 1 + 1 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Dễ dàng chứng minh : } \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1. \text{ Do đó } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

b) Với $n = 2$, ta chứng minh $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2} \quad (1)$. Thật vậy, $(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3})^6 > (\sqrt{2})^6 \Leftrightarrow 3^2 > 2^2$.

Với $n \geq 3$, ta chứng minh $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \quad (2)$. Thật vậy :

$$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt[n+1]{n+1}\right)^{n(n+1)} < \left(\sqrt[n]{n}\right)^{n(n+1)} \Leftrightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^n}{n^n} < n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n \quad (3)$$

Theo câu a ta có $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$, mà $3 \leq n$ nên (3) được chứng minh.

Do đó (2) được chứng minh.

228. Cách 1: $A^2 = 2(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}) \geq 4$. $\min A = 2$ với $x = 0$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy: $A \geq 2\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} = 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \geq 2$
 $\min A = 2$ với $x = 0$.

229. Với $x < 2$ thì $A \geq 0$ (1). Với $2 \leq x \leq 4$, xét $-A = x^2(x - 2)$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm:

$$-\frac{A}{4} = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (x - 2) \leq \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + x - 2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2x - 2}{3}\right)^3 \leq 8$$

$$-A \leq 32 \Rightarrow A \geq -32. \min A = -32 \text{ với } x = 4.$$

230. Điều kiện: $x^2 \leq 9$.

$$A^2 = x^4(9 - x^2) = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} (9 - x^2) \leq 4 \left(\frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + 9 - x^2}{3}\right)^3 = 4 \cdot 27$$

$$\max A = 6\sqrt{3} \text{ với } x = \pm \sqrt{6}.$$

231. a) Tìm giá trị lớn nhất:

Cách 1: Với $0 \leq x < \sqrt{6}$ thì $A = x(x^2 - 6) \leq 0$.

Với $x \geq \sqrt{6}$. Ta có $\sqrt{6} \leq x \leq 3 \Rightarrow 6 \leq x^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq x^2 - 6 \leq 3$.

Suy ra $x(x^2 - 6) \leq 9$. $\max A = 9$ với $x = 3$.

Cách 2: $A = x(x^2 - 9) + 3x$. Ta có $x \geq 0$, $x^2 - 9 \leq 0$, $3x \leq 9$, nên $A \leq 9$.
 $\max A = 9$ với $x = 3$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất:

Cách 1: $A = x^3 - 6x = x^3 + (2\sqrt{2})^3 - 6x - (2\sqrt{2})^3 =$

$$\begin{aligned} &= (x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 8) - 6x - 16\sqrt{2} \\ &= (x + 2\sqrt{2})(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) + (x + 2\sqrt{2}) \cdot 6 - 6x - 16\sqrt{2} \\ &= (x + 2\sqrt{2})(x - \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} \geq -4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\min A = -4\sqrt{2} \text{ với } x = \sqrt{2}.$$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với 3 số không âm:

$$x^3 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \geq 3\sqrt[3]{x^3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = 6x.$$

$$\text{Suy ra } x^3 - 6x \geq -4\sqrt{2}. \min A = -4\sqrt{2} \text{ với } x = \sqrt{2}.$$

232. Gọi x là cạnh của hình vuông nhỏ, V là thể tích của hình hộp.

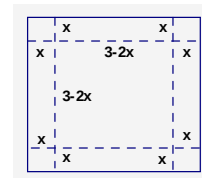
Cần tìm giá trị lớn nhất của $V = x(3 - 2x)^2$.

Theo bất đẳng thức Cauchy với ba số dương:

$$4V = 4x(3 - 2x)(3 - 2x) \leq \left(\frac{4x + 3 - 2x + 3 - 2x}{3}\right)^3 = 8$$

$$\max V = 2 \Leftrightarrow 4x = 3 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Thể tích lớn nhất của hình hộp là 2 dm^3 khi cạnh hình vuông nhỏ bằng $\frac{1}{2} \text{ dm}$.



233. a) Đáp số : 24 ; - 11. b) Đt $\sqrt[3]{2-x}=a$; $\sqrt{x-1}=b$. Đáp số : 1 ; 2 ; 10.

c) Lập phương hai vế. Đáp số : 0 ; $\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

d) Đt $\sqrt[3]{2x-1}=y$. Giải h : $x^3+1=2y$, $y^3+1=2x$, đc $(x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0$
 $\Leftrightarrow x=y$. Đáp số : 1 ; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

e) Rút gọn vế trái đc : $\frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-4})$. Đáp số : $x=4$.

g) Đt $\sqrt[3]{7-x}=a$; $\sqrt[3]{x-5}=b$. Ta có : $a^3+b^3=2$, $a^3-b^3=12-2x$, do đó vế phải của phương trình đã cho là $\frac{a^3-b^3}{2}$. Phương trình đã cho trở thành : $\frac{a-b}{a+b} = \frac{a^3-b^3}{2}$.

Do $a^3+b^3=2$ nên $\frac{a-b}{a+b} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} \Rightarrow (a-b)(a^3+b^3) = (a+b)(a^3-b^3)$

Do $a+b \neq 0$ nên : $(a-b)(a^2-ab+b^2) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

T $\Rightarrow$ $a=b$ ta đc $x=6$. T $\Rightarrow$ $ab=0$ ta đc $x=7$; $x=5$.

h) Đt $\sqrt[3]{x+1}=a$; $\sqrt[3]{x-1}=b$. Ta có : $a^2+b^2+ab=1$ (1) ; $a^3-b^3=2$ (2).

T $\Rightarrow$ (1) và (2) : $a-b=2$. Thay $b=a-2$ vào (1) ta đc $a=1$. Đáp số : $x=0$.

i) Cách 1 : $x=-2$ nghiệm đúng phương trình. Với $x+2 \neq 0$, chia hai vế cho $\sqrt[3]{x+2}$.

Đt $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x+2}}=a$; $\sqrt[3]{\frac{x+3}{x+2}}=b$. Giải h $a^3+b^3=2$, $a+b=-1$. H $\Rightarrow$ này vô nghiệm.

Cách 2 : Đt $\sqrt[3]{x+2}=y$. Chuyển vế : $\sqrt[3]{y^3-1}+\sqrt[3]{y^3+1}=-y$. Lập phương hai vế ta đc :

$$y^3-1+y^3+1+3.\sqrt[3]{y^6-1}.(-y)=-y^3 \Leftrightarrow y^3=y.\sqrt[3]{y^6-1}.$$

V $\Rightarrow$ $y=0$, có nghiệm $x=-2$. V $\Rightarrow$ $y \neq 0$, có $y^2=\sqrt[3]{y^6-1}$. Lập phương : $y^6=y^6-1$. Vô n $\Rightarrow$.

Cách 3 : Ta thấy $x=-2$ nghiệm đúng phương trình. Với $x < -2$, $x > -2$, phương trình vô nghiệm, xem bảng dưới đây :

x	$\sqrt[3]{x+1}$	$\sqrt[3]{x+2}$	$\sqrt[3]{x+3}$	V $\Rightarrow$ trái
$x < -2$	< -1	< 0	< 1	< 0
$x > -2$	> -1	> 0	> 1	> 0

k) Đt $1+x=a$, $1-x=b$. Ta có : $a+b=2$ (1), $\sqrt[4]{ab}+\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}=3$ (2)

Theo bất đẳng thức Cauchy $\sqrt{mn} \leq \frac{m+n}{2}$, ta có :

$$\begin{aligned} 3 &= \sqrt{\sqrt{a}.\sqrt{b}} + \sqrt{1.\sqrt{a}} + \sqrt{1.\sqrt{b}} \leq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} + \frac{1+\sqrt{a}}{2} + \frac{1+\sqrt{b}}{2} = \\ &= \sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 \leq \frac{1+a}{2} + \frac{1+b}{2} + 1 = \frac{a+b}{2} + 2 = 3. \end{aligned}$$

Ph $\Rightarrow$ $x=y$ ra đt đng th $\Rightarrow$ c, t $\Rightarrow$ c là : $a=b=1$. Do đó $x=0$.

l) Đt $\sqrt[4]{a-x}=m \geq 0$; $\sqrt[4]{b-x}=n \geq 0$ thì $m^4+n^4=a+b-2x$.

Phương trình đã cho trở thành : $m+n=\sqrt[4]{m^4+n^4}$. Nâng lên lũy thừa bậc bốn hai vế rồi thu gọn : $2mn(2m^2+3mn+2n^2)=0$.

Suy ra $m=0$ ho $\Rightarrow$ c $n=0$, còn n $\Rightarrow$ u $\Rightarrow$ m, $n > 0$ thì $2m^2+3mn+2n^2 > 0$.

Do đó $x = a, x = b$. Ta phải có $x \leq a, x \leq b$ để các căn thức có nghĩa.

Giả sử $a \leq b$ thì nghiệm của phương trình đã cho là $x = a$.

234. Điều kiện để biểu thức có nghĩa : $a^2 + b^2 \neq 0$ (a và b không đồng thời bằng 0).

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{a} = x; \sqrt[3]{b} = y, \text{ ta có : } A = \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2} = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2}{x^2 + xy + y^2} = \\ = \frac{(x^2 + y^2)^2 - (xy)^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)}{x^2 + y^2 + xy} = x^2 + y^2 - xy.$$

$$\forall y : A = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{ab} \quad (\forall i \ a^2 + b^2 \neq 0).$$

235. Do A là tổng của hai biểu thức đồng biến nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$A = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2 - x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}} = 2\sqrt{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} = \\ = 2\sqrt{x^4 + x^2 + 2} \geq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi :}$$

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = x^2 - x + 1 \\ x^4 + x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có $A \geq 2$, đẳng thức xảy ra khi $x = 0$. $\forall y : \min A = 2 \Leftrightarrow x = 0$.

236. Vì $1 + \sqrt{3}$ là nghiệm của phương trình $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$, nên ta có :

$$3(1 + \sqrt{3})^3 + a(1 + \sqrt{3})^2 + b(1 + \sqrt{3}) + 12 = 0.$$

Sau khi thực hiện các phép biến đổi, ta được biểu thức thu gọn :

$$(4a + b + 42) + (2a + b + 18)\sqrt{3} = 0.$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $p = 4a + b + 42 \in \mathbb{Z}$ và $q = 2a + b + 18 \in \mathbb{Z}$. Ta phải tìm các số nguyên a, b sao cho $p + q\sqrt{3} = 0$.

Nếu $q \neq 0$ thì $\sqrt{3} = -\frac{p}{q}$, vô lý. Do đó $q = 0$ và từ $p + q\sqrt{3} = 0$ ta suy ra $p = 0$.

$\forall y \ 1 + \sqrt{3}$ là một nghiệm của phương trình $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 4a + b + 42 = 0 \\ 2a + b + 18 = 0 \end{cases}. \text{ Suy ra } a = -12; b = 6.$$

237. Giả sử $\sqrt[3]{3}$ là số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ ($\frac{p}{q}$ là phân số tối giản). Suy ra : $3 = \frac{p^3}{q^3}$. Hãy chứng minh p và

q cùng chia hết cho 3, trái với giả thiết $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản.

$$238. \text{ a) Ta có : } \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} = \sqrt[6]{(1 + \sqrt{2})^2} = \sqrt[6]{1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Do đó : } \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1.$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = -1.$$

239. Áp dụng hằng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, ta có :

$$a^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 20 - 14\sqrt{2} + 3\sqrt{(20 + 14\sqrt{2})(20 - 14\sqrt{2})} \cdot a \Leftrightarrow a^3 = 40 + 3\sqrt{20^2 - (14\sqrt{2})^2} \cdot a \\ \Leftrightarrow a^3 - 6a - 40 = 0 \Leftrightarrow (a - 4)(a^2 + 4a + 10) = 0. \text{ Vì } a^2 + 4a + 10 > 0 \text{ nên } \Rightarrow a = 4.$$

240. Giải tiếp bài 21.

$$241. A = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

242. Áp dụng : $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$.

$$\text{Ta có } x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}. \text{ Suy ra } x^3 = 12 + 3 \cdot 3x \Leftrightarrow x^3 - 9x - 12 = 0.$$

243. Số đông hằng đẳng thức $(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B)$. Tính x^3 . Kết quả $M = 0$

244. a) $x_1 = -2$; $x_2 = 25$.

b) Đặt $u = \sqrt[3]{x-9}$, $v = x-3$, ta được $\begin{cases} u = v^3 + 6 \\ v = u^3 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = -2 \Rightarrow x = 1$.

c) Đặt $\sqrt[4]{x^2+32} = y > 0$. Kết quả $x = \pm 7$.

245. Đặt biểu thức và dùng : $A = \left| \sqrt{x^3+1}+1 \right| + \left| \sqrt{x^3+1}-1 \right|$. Áp dụng $|A| + |B| \geq |A+B|$
 $\min A = 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0$.

246. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy hai lần.

247. Đặt $\sqrt[3]{x} = y$ thì $\sqrt[3]{x^2} = y^2 \Rightarrow P = 2\sqrt[3]{x} + 2$

BÀI TẬP ÔN CHỖ NG I

249. Ta có : $P = \sqrt{(x-a)^2} + \sqrt{(x-b)^2} = |x-a| + |x-b| \geq |x-a+b-x| = b-a$ ($a < b$).

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(x-a)(x-b) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq x \leq b$. Vậy $\min P = b-a \Leftrightarrow a \leq x \leq b$.

250. Vì $a+b > c$; $b+c > a$; $c+a > b$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho từng cặp số được

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq \frac{(a+b-c) + (b+c-a)}{2} = b$$

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{(b+c-a) + (c+a-b)}{2} = c$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq \frac{(c+a-b) + (a+b-c)}{2} = a$$

Các vế của 3 bất đẳng thức trên đều bằng. Nhân 3 bất đẳng thức này theo từng vế ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$a+b-c = b+c-a = c+a-b \Leftrightarrow a = b = c \text{ (tam giác đều)}.$$

251. $|x-y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

252. $2A = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

Ta có : $c-a = -(a-c) = -[(a-b) + (b-c)] = -(\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1) = -2\sqrt{2}$.

Do đó : $2A = (\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 + (-2\sqrt{2})^2 = 14$. Suy ra $A = 7$.

253. Đặt a pt và dùng : $(\sqrt{x-2}-1)^2 + (\sqrt{y-3}-2)^2 + (\sqrt{z-5}-3)^2 = 0$.

254. Nếu $1 \leq x \leq 2$ thì $y = 2$.

255. Đặt : $\sqrt{x-1} = y \geq 0$. $M = \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}+2)(3-\sqrt{x-1})$.

256. Gọi các kích thước của hình chữ nhật là x, y . Với mọi x, y ta có : $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Nhưng $x^2 + y^2 = (8\sqrt{2})^2 = 128$, nên $xy \leq 64$. Do đó : $\max xy = 64 \Leftrightarrow x = y = 8$.

257. Với mọi a, b ta luôn có : $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Nhưng $a^2 + b^2 = c^2$ (định lý Pytago) nên :

$$c^2 \geq 2ab \Leftrightarrow 2c^2 \geq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 2c^2 \geq (a+b)^2 \Leftrightarrow c\sqrt{2} \geq a+b \Leftrightarrow c \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

258. Biện pháp đặt : $(\sqrt{a'b}-\sqrt{ab'})^2 + (\sqrt{a'c}-\sqrt{ac'})^2 + (\sqrt{b'c}-\sqrt{bc'})^2 = 0$

259. $-2 \leq x \leq -1$; $1 \leq x \leq 2$.

-----Hết-----