

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

PHẠM VĂN DƯỠNG

TIỂU LUẬN

SÁNG TÁC 10 BÀI TOÁN VỀ
CHUYÊN ĐỀ Dãy số và số học

Chuyên ngành : PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP

Mã số : 60.46.01.13

Khóa : 15

Người hướng dẫn khoa học: TS. TRỊNH ĐÀO CHIẾN

BÌNH ĐỊNH - THÁNG 12 NĂM 2013

Sáng tác một số bài toán về dãy số và giới hạn

Để tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) bằng phương pháp lặp ta thường tìm các hàm số $f(x)$ và $h(x)$ sao cho

$$f(u_n) = h(f(u_{n-1})). \quad (*)$$

Sử dụng $(*)$ liên tiếp ta thu được

$$\begin{aligned} f(u_n) &= h(f(u_{n-1})) \\ &= h(h(f(u_{n-2}))) := h_2(f(u_{n-2})) = \dots = h_n(f(u_0)). \end{aligned} \quad (**)$$

Từ $(**)$ ta tìm được u_n . Hàm số f được gọi là hàm số phụ, còn hàm số h được gọi là hàm lặp. Để sáng tác các bài toán cho phần này, ta cần xây dựng một số lớp hàm có thể lặp được.

1. Lớp hàm $g(x) = x^2 + ax + b$.

Ta có

$$g(x) - c = x^2 + ax + b - c.$$

Vậy cần chọn a, b, c sao cho

$$\begin{aligned} x^2 + ax + b - c &= (x - c)^2 \Rightarrow x^2 + ax + b - c = x^2 - 2cx + c^2 \\ \Rightarrow ax + b - c &= -2cx + c^2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b - c = c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2c \\ b = c + c^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Chọn $c = 7$, khi đó $a = -14$, $b = 56$. Ta được bài toán sau.

Bài toán 0.1. Cho dãy số (x_n) như sau: $x_1 = \alpha \in \mathbb{R}$ và

$$x_{n+1} = x_n^2 - 14x_n + 56, \forall n = 1, 2, \dots$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} x_n - 7 &= x_{n-1}^2 - 14x_{n-1} + 49 = (x_{n-1} - 7)^2 = (x_{n-2} - 7)^{2^2} \\ &= (x_{n-3} - 7)^{2^3} = \dots = (x_1 - 7)^{2^{n-1}} = (\alpha - 7)^{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số đã cho là:

$$x_n = 7 + (\alpha - 7)^{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lưu ý. Trong bài toán này thì hàm số phụ là $f(x) = x - 7$, còn hàm lặp là $h(x) = x^2$.

Ví dụ 2. Chọn $c = -2$, khi đó $a = 4$, $b = 2$. Ta được dãy số (x_n) như sau:

$$x_{n+1} = x_n^2 + 4x_n + 2, \forall n = 1, 2, \dots$$

Ta tiếp tục làm khó hơn bằng cách đổi biến $x_n = 3u_n$. Khi đó được dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} &= 9u_n^2 + 12u_n + 2, \forall n = 1, 2, \dots \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &= 3u_n^2 + 4u_n + \frac{2}{3}, \forall n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ta được bài toán sau.

Bài toán 0.2. Cho dãy số (u_n) như sau: $u_1 = \alpha \in \mathbb{R}$ và

$$u_{n+1} = 3u_n^2 + 4u_n + \frac{2}{3}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

Giải.

Cách 1. Đặt $u_n = \frac{x_n}{3}$. Khi đó dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 3\alpha$ và

$$x_{n+1} = x_n^2 + 4x_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ta có

$$x_n + 2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + 4 = (x_{n-1} + 2)^2 = (x_{n-2} + 2)^2 = \dots = (x_1 + 2)^{2^{n-1}}.$$

Vậy $x_n = (3\alpha + 2)^{2^{n-1}} - 2$. Số hạng tổng quát của dãy số đã cho là:

$$u_n = \frac{(3\alpha + 2)^{2^{n-1}} - 2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lưu ý. Phép đặt $u_n = \frac{x_n}{3}$ được tìm ra như sau: Ta đặt $u_n = kx_n$, với k là hằng số sẽ tìm sau. Khi đó

$$kx_{n+1} = 3k^2x_n^2 + 4kx_n + \frac{2}{3} \Rightarrow x_{n+1} = 3kx_n^2 + 4x_n + \frac{2}{3k}.$$

Vậy ta tìm k thỏa mãn $3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \Rightarrow u_n = \frac{x_n}{3}$.

Cách 2. Ta có

$$\begin{aligned} u_n + \frac{2}{3} &= 3u_{n-1}^2 + 4u_{n-1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 3 \left(u_{n-1}^2 + \frac{4}{3}u_{n-1} + \frac{4}{9} \right) \\ &= 3 \left(u_{n-1} + \frac{2}{3} \right)^2 = 3 \left[3 \left(u_{n-2} + \frac{2}{3} \right)^2 \right]^2 = 3^{1+2} \left(u_{n-2} + \frac{2}{3} \right)^{2^2} \\ &= 3^{1+2} \left[3 \left(u_{n-3} + \frac{2}{3} \right)^2 \right]^{2^2} = 3^{1+2+2^2} \left(u_{n-3} + \frac{2}{3} \right)^{2^3} \\ &= \dots = 3^{1+2+\dots+2^{n-2}} \left(u_1 + \frac{2}{3} \right)^{2^{n-1}} = 3^{2^{n-1}-1} \left(u_1 + \frac{2}{3} \right)^{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Số hạng tổng quát của dãy số đã cho là:

$$u_n = \frac{(3\alpha + 2)^{2^{n-1}} - 2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lưu ý. Điểm mấu chốt trong lời giải ở cách 2 là xét $u_n + \frac{2}{3}$. Vì sao lại xuất hiện số $\frac{2}{3}$? Ta xét

$$u_n - \beta = 3u_{n-1}^2 + 4u_{n-1} + \frac{2}{3} - \beta = 3 \left(u_{n-1}^2 + \frac{4}{3}u_{n-1} + \frac{2-3\beta}{9} \right).$$

Cần chọn β sao cho

$$\begin{aligned} \left(u_{n-1}^2 + \frac{4}{3}u_{n-1} + \frac{2-3\beta}{9} \right) &= (u_{n-1} - \beta)^2 = u_{n-1}^2 - 2\beta u_{n-1} + \beta^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} &= -2\beta \\ \frac{2-3\beta}{9} &= \beta^2 \end{cases} \Rightarrow \beta = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Chọn $c = 3$, khi đó $a = -6$, $b = 12$. Ta được dãy số (x_n) như sau:

$$x_{n+1} = x_n^2 - 6x_n + 12, \forall n = 1, 2, \dots$$

Ta tiếp tục làm khó hơn bằng cách đổi biến $x_n = 1 - 5u_n$. Khi đó được dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned} 1 - 5u_{n+1} &= (1 - 5u_n)^2 - 6(1 - 5u_n) + 12 \\ \Leftrightarrow 1 - 5u_{n+1} &= 25u_n^2 + 20u_n + 7 \Leftrightarrow u_{n+1} = -5u_n^2 - 4u_n - \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Ta được bài toán sau.

Bài toán 0.3. Cho dãy số (u_n) như sau: $u_1 = \alpha \in \mathbb{R}$ và

$$u_{n+1} = -5u_n^2 - 4u_n - \frac{6}{5}.$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

Giải. Đặt $u_n = -\frac{1}{5}x_n$. Khi đó

$$-\frac{1}{5}x_{n+1} = -\frac{1}{5}x_n^2 + \frac{4}{5}x_n - \frac{6}{5} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6 \Leftrightarrow x_{n+1} - 2 = (x_n - 2)^2.$$

Vậy $x_n - 2 = (x_{n-1} - 2)^2 = (x_{n-2} - 2)^{2^2} = \dots = (x_1 - 2)^{2^{n-1}}$. Số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$u_n = -\frac{1}{5} \left[2 + (5\alpha + 2)^{2^{n-1}} \right], \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Lớp hàm $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Ta có

$$g(x) - d = x^3 + ax^2 + bx + c - d.$$

Vậy cần chọn a, b, c, d sao cho

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c - d &= (x - d)^3 = x^3 - 3dx^2 + 3d^2x - d^3 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = -3d \\ b = 3d^2 \\ c - d = -d^3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = -3d \\ b = 3d^2 \\ c = d - d^3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Chọn $d = 1$, khi đó $b = 3, a = -3, c = 0$, ta được dãy số (x_n) thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tuy nhiên dãy số (x_n) cho như vậy "khá lộn", ta có thể "dấu bớt đi" bằng cách đổi biến $x_n = 5u_n$. Khi đó dãy (u_n) thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$5u_{n+1} = 125u_n^3 - 3.25u_n^2 + 3.5u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = 25u_n^3 - 15u_n^2 + 3u_n.$$

Ta có bài toán sau.

Bài toán 0.4. Cho dãy số (u_n) như sau: $u_1 = \alpha \in \mathbb{R}$ và

$$u_{n+1} = 25u_n^3 - 15u_n^2 + 3u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số đã cho.

Giải. Đặt $u_n = \frac{x_n}{5}$. Ta được dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $x_1 = 5\alpha$ và

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x_{n+1} &= \frac{1}{5}x_n^3 - \frac{3}{5}x_n^2 + \frac{3}{5}x_n \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n \\ &\Leftrightarrow x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^3. \end{aligned}$$

Vậy với mọi số nguyên dương n ta có

$$x_n - 1 = (x_{n-1} - 1)^3 = (x_{n-2} - 1)^{3^2} = \dots = (x_1 - 1)^{3^{n-1}} = (5\alpha - 1)^{3^{n-1}}.$$

Số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$u_n = \frac{(5\alpha - 1)^{3^{n-1}} + 1}{5}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

3. Lớp hàm $g(x) = \frac{ax}{b + c^2x^2}$.

Ta có

$$d - g(x) = d - \frac{ax}{b + c^2x^2} = \frac{bd - ax + dc^2x^2}{b + c^2x^2}.$$

Ta cần chọn a, b, c, d sao cho

$$\begin{aligned} bd - ax + dc^2x^2 &= (d - x)^2 = d^2 - 2dx + x^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} bd = d^2 \\ a = 2d \\ dc^2 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} b = d \\ a = 2d \\ c^2 = \frac{1}{d}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Chọn $d = 2$, khi đó $b = 2$, $a = 4$, $c^2 = \frac{1}{2}$ và

$$g(x) = \frac{4x}{2 + \frac{1}{2}x^2} = \frac{8x}{4 + x^2}.$$

Ta được bài toán sau.

Bài toán 0.5. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) cho như sau:

$$x_1 = \alpha \in \mathbb{R} \text{ và } x_{n+1} = \frac{8x_n}{4 + x_n^2}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải. Nếu $\alpha = -2$ thì $x_n = -2$, $\forall n = 1, 2, \dots$. Tiếp theo xét $\alpha \neq -2$. Ta có

$$2 - x_n = 2 - \frac{8x_{n-1}}{4 + x_{n-1}^2} = \frac{2x_{n-1}^2 - 8x_{n-1} + 8}{4 + x_{n-1}^2} = \frac{2(2 - x_{n-1})^2}{4 + x_{n-1}^2}. \quad (1)$$

$$2 + x_n = 2 + \frac{8x_{n-1}}{4 + x_{n-1}^2} = \frac{2x_{n-1}^2 + 8x_{n-1} + 8}{4 + x_{n-1}^2} = \frac{2(2 + x_{n-1})^2}{4 + x_{n-1}^2}. \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$. Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{2 - x_n}{2 + x_n} = \left(\frac{2 - x_{n-1}}{2 + x_{n-1}} \right)^2 = [f(x_{n-1})]^2 = [f(x_{n-2})]^{2^2} \\ &= \dots = [f(x_1)]^{2^{n-1}} = [f(\alpha)]^{2^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Đặt $\beta = [f(\alpha)]^{2^{n-1}}$. Từ (3) ta có

$$\frac{2 - x_n}{2 + x_n} = \beta \Leftrightarrow 2 - x_n = 2\beta + \beta x_n \Leftrightarrow x_n = \frac{2 - 2\beta}{1 + \beta}.$$

Vậy nếu $\alpha = -2$ thì $x_n = -2$, $\forall n = 1, 2, \dots$, nếu $\alpha \neq -2$ thì

$$x_n = \frac{2 \left[1 - \left(\frac{2 - \alpha}{2 + \alpha} \right)^{2^{n-1}} \right]}{1 + \left(\frac{2 - \alpha}{2 + \alpha} \right)^{2^{n-1}}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Ví dụ 6. Trong bài toán 0.5, ta đổi biến $x_n = 3u_n - 1$. Khi đó được dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} - 1 &= \frac{8(3u_n - 1)}{4 + (3u_n - 1)^2} = \frac{24u_n - 8}{9u_n^2 - 6u_n + 5} \\ \Rightarrow 3u_{n+1} &= \frac{24u_n - 8}{9u_n^2 - 6u_n + 5} + 1 = \frac{9u_n^2 + 18u_n - 3}{9u_n^2 - 6u_n + 5} \\ \Rightarrow u_{n+1} &= \frac{3u_n^2 + 6u_n - 1}{9u_n^2 - 6u_n + 5}. \end{aligned}$$

Như vậy ta được bài toán 0.6 ở trang 7.

Bài toán 0.6. Cho dãy số (u_n) như sau:

$$u_1 = \alpha; u_{n+1} = \frac{3u_n^2 + 6u_n - 1}{9u_n^2 - 6u_n + 5}, \forall n = 1, 2, \dots (\alpha \text{ là tham số thực}).$$

Tìm α để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tìm giới hạn trong các trường hợp đó.

Giải. Dễ thấy rằng với mọi số nguyên dương n thì luôn tồn tại u_n . Nếu $\alpha = -\frac{1}{3}$ thì $u_n = -\frac{1}{3}, \forall n = 1, 2, \dots$. Tiếp theo xét $\alpha \neq -\frac{1}{3}$. Ta có

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{3u_{n-1}^2 + 6u_{n-1} - 1}{9u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 5} - 1 = \frac{-6u_{n-1}^2 + 12u_{n-1} - 6}{9u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 5} \\ &= \frac{-6(u_{n-1} - 1)^2}{9u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 5}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 3u_n + 1 &= \frac{9u_{n-1}^2 + 18u_{n-1} - 3}{9u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 5} + 1 = \frac{18u_{n-1}^2 + 12u_{n-1} + 2}{9u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 5} \\ &= \frac{2(3u_{n-1} + 1)^2}{9u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 5}. \end{aligned} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-1}{3x+1}$. Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{u_n - 1}{3u_n + 1} = -3 \left(\frac{u_{n-1} - 1}{3u_{n-1} + 1} \right)^2 = -3 [f(u_{n-1})]^2 \\ &= -3 [-3f^2(u_{n-2})]^2 = (-3)^{1+2} [f(u_{n-2})]^{2^2} \\ &= (-3)^{1+2} [-3f^2(u_{n-3})]^2 = (-3)^{1+2+2^2} [f(u_{n-3})]^{2^3} \\ &= \dots = (-3)^{1+2+2^2+\dots+2^{n-2}} [f(u_1)]^{2^{n-1}} \\ &= (-3)^{2^{n-1}-1} [f(\alpha)]^{2^{n-1}} = -\frac{[3f(\alpha)]^{2^{n-1}}}{3}. \end{aligned} \quad (3)$$

Đặt $\beta_n = -\frac{[3f(\alpha)]^{2^{n-1}}}{3}$. Từ (3) ta có

$$\frac{u_n - 1}{3u_n + 1} = \beta_n \Leftrightarrow u_n - 1 = 3\beta_n u_n + \beta_n \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + \beta_n}{1 - 3\beta_n}.$$

Vậy

$$u_n = \frac{1 - \frac{[3f(\alpha)]^{2^{n-1}}}{3}}{1 + [3f(\alpha)]^{2^{n-1}}} = \frac{3 - [3f(\alpha)]^{2^{n-1}}}{3 + 3[3f(\alpha)]^{2^{n-1}}} = \frac{3 - \left(\frac{3\alpha - 3}{3\alpha + 1}\right)^{2^{n-1}}}{3 + 3 \cdot \left(\frac{3\alpha - 3}{3\alpha + 1}\right)^{2^{n-1}}}.$$

Tóm lại: Nếu $\alpha = -\frac{1}{3}$ thì $u_n = -\frac{1}{3}$, $\forall n = 1, 2, \dots$, nếu $\alpha \neq -\frac{1}{3}$ thì

$$u_n = \frac{3 - \left(\frac{3\alpha - 3}{3\alpha + 1}\right)^{2^{n-1}}}{3 + 3 \cdot \left(\frac{3\alpha - 3}{3\alpha + 1}\right)^{2^{n-1}}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Ta có các biến đổi tương đương sau

$$\begin{aligned} \frac{3\alpha - 3}{3\alpha + 1} = 1 &\Leftrightarrow 3\alpha - 3 = 3\alpha + 1 \Leftrightarrow 0\alpha = 4 \text{ (vô nghiệm)} \\ \left| \frac{3\alpha - 3}{3\alpha + 1} \right| < 1 &\Leftrightarrow (3\alpha - 3)^2 < (3\alpha + 1)^2 \Leftrightarrow -18\alpha + 9 < 6\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{3}. \\ \left| \frac{3\alpha - 3}{3\alpha + 1} \right| > 1 &\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \neq \alpha < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Bởi vậy ta có kết quả biện luận như sau:

- Nếu $\alpha = -\frac{1}{3}$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{3}$.
- Nếu $\alpha = \frac{1}{3}$ thì $u_n = \frac{1}{3}$, $\forall n = 1, 2, \dots$, suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}$.
- Nếu $\alpha > \frac{1}{3}$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3\alpha - 3}{3\alpha + 1}\right)^{2^{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- Nếu $-\frac{1}{3} \neq \alpha < \frac{1}{3}$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3\alpha - 3}{3\alpha + 1}\right)^{-2^{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{3}$.

4. Lớp hàm $g(x) = \frac{x^3 + ax}{bx^2 + c}$.

Ta có

$$g(x) - d = \frac{x^3 + ax}{bx^2 + c} - d = \frac{x^3 - bdx^2 + ax - cd}{bx^2 + c}.$$

Ta cần chọn a, b, c, d sao cho

$$\begin{aligned} x^3 - bdx^2 + ax - cd &= (x - d)^3 \\ \Rightarrow x^3 - bdx^2 + ax - cd &= x^3 - 3dx^2 + 3d^2x - d^3 \\ \Rightarrow \begin{cases} bd = 3d \\ a = 3d^2 \\ cd = d^3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 3d^2 \\ c = d^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 7. Từ $\begin{cases} b = 3 \\ a = 3d^2 \\ c = d^2 \end{cases}$ chọn $c = 2$ ta được $b = 3$, $a = 6$, $d = \pm\sqrt{2}$. Ta có bài toán sau.

Bài toán 0.7. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) cho như sau:

$$x_1 = \alpha > 0 \text{ và } x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 6x_n}{3x_n^2 + 2}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải. Ta có

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{x_n^3 + 6x_n}{3x_n^2 + 2} - \sqrt{2} = \frac{x_n^3 - 3\sqrt{2}x_n^2 + 6x_n - 2\sqrt{2}}{3x_n^2 + 2} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^3}{3x_n^2 + 2},$$

$$x_{n+1} + \sqrt{2} = \frac{x_n^3 + 6x_n}{3x_n^2 + 2} + \sqrt{2} = \frac{x_n^3 + 3\sqrt{2}x_n^2 + 6x_n + 2\sqrt{2}}{3x_n^2 + 2} = \frac{(x_n + \sqrt{2})^3}{3x_n^2 + 2}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}$. Khi đó

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{x_{n-1} + \sqrt{2}} \right)^3 = [f(x_{n-1})]^3 = [f(x_{n-2})]^{3^2} \\ &= \dots = [f(x_1)]^{3^{n-1}} = [f(\alpha)]^{3^{n-1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) ta có

$$\begin{aligned} \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} &= [f(\alpha)]^{3^{n-1}} \Leftrightarrow x_n - \sqrt{2} = [f(\alpha)]^{3^{n-1}} x_n + \sqrt{2} \cdot [f(\alpha)]^{3^{n-1}} \\ \Leftrightarrow x_n &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot [f(\alpha)]^{3^{n-1}}}{1 - [f(\alpha)]^{3^{n-1}}} \Leftrightarrow x_n = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \left(\frac{\alpha - \sqrt{2}}{\alpha + \sqrt{2}} \right)^{3^{n-1}}}{1 - \left(\frac{\alpha - \sqrt{2}}{\alpha + \sqrt{2}} \right)^{3^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Từ $\begin{cases} b = 3 \\ a = 3d^2 \\ c = d^2 \end{cases}$ chọn $c = 4$ ta được $b = 3, a = 12, d = \pm 2$. Ta có bài toán sau.

Bài toán 0.8. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) cho như sau:

$$x_1 = \alpha > 0 \text{ và } x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 12x_n}{3x_n^2 + 4}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Giải. Ta có

$$x_n - 2 = \frac{x_{n-1}^3 + 12x_{n-1}}{3x_{n-1}^2 + 4} - 2 = \frac{x_{n-1}^3 - 6x_{n-1}^2 + 12x_{n-1} - 8}{3x_{n-1}^2 + 4} = \frac{(x_{n-1} - 2)^3}{3x_{n-1}^2 + 4}. \quad (1)$$

$$x_n + 2 = \frac{x_{n-1}^3 + 12x_{n-1}}{3x_{n-1}^2 + 4} + 2 = \frac{x_{n-1}^3 + 6x_{n-1}^2 + 12x_{n-1} + 8}{3x_{n-1}^2 + 4} = \frac{(x_{n-1} + 2)^3}{3x_{n-1}^2 + 4}. \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$. Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{x_n - 2}{x_n + 2} = \left(\frac{x_{n-1} - 2}{x_{n-1} + 2} \right)^3 = [f(x_{n-1})]^3 = [f(x_{n-2})]^{3^2} \\ &= \dots = [f(x_1)]^{3^{n-1}} = [f(\alpha)]^{3^{n-1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) ta có

$$\begin{aligned} \frac{x_n - 2}{x_n + 2} &= [f(\alpha)]^{3^{n-1}} \Leftrightarrow x_n - 2 = [f(\alpha)]^{3^{n-1}} x_n + 2 \cdot [f(\alpha)]^{3^{n-1}} \\ \Leftrightarrow x_n &= \frac{2 + 2 \cdot [f(\alpha)]^{3^{n-1}}}{1 - [f(\alpha)]^{3^{n-1}}} \Leftrightarrow x_n = \frac{2 + 2 \left(\frac{\alpha - 2}{\alpha + 2} \right)^{3^{n-1}}}{1 - \left(\frac{\alpha - 2}{\alpha + 2} \right)^{3^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 9. Trong bài toán 0.8, đổi biến $x_n = u_n - 1$ ta được dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện

$$\begin{aligned} u_n - 1 &= \frac{(u_{n-1} - 1)^3 + 12(u_{n-1} - 1)}{3(u_{n-1} - 1)^2 + 4} \\ \Rightarrow u_n - 1 &= \frac{u_{n-1}^3 - 3u_{n-1}^2 + 3u_{n-1} - 13 + 12u_{n-1}}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7} \\ \Rightarrow u_n - 1 &= \frac{u_{n-1}^3 - 3u_{n-1}^2 + 15u_{n-1} - 13}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7} \\ \Rightarrow u_n &= \frac{u_{n-1}^3 + 9u_{n-1} - 6}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta được bài toán 0.9 ở trang 10.

Bài toán 0.9. Cho dãy số (u_n) như sau:

$$u_1 = \alpha; \quad u_n = \frac{u_{n-1}^3 + 9u_{n-1} - 6}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\alpha \text{ là tham số thực}).$$

Tìm α để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tìm giới hạn trong các trường hợp đó.

Giải. Dễ thấy rằng với mọi số nguyên dương n thì luôn tồn tại u_n . Nếu $\alpha = -1$ thì $u_n = -1, \forall n = 1, 2, \dots$ Tiếp theo xét $\alpha \neq -1$. Ta có

$$\begin{aligned} u_n + 1 &= \frac{u_{n-1}^3 + 9u_{n-1} - 6}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7} + 1 = \frac{u_{n-1}^3 + 3u_{n-1}^2 + 3u_{n-1} + 1}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7} \\ &= \frac{(u_{n-1} + 1)^3}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} u_n - 3 &= \frac{u_{n-1}^3 + 9u_{n-1} - 6}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7} - 3 = \frac{u_{n-1}^3 - 9u_{n-1}^2 + 27u_{n-1} - 27}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7} \\ &= \frac{(u_{n-1} - 3)^3}{3u_{n-1}^2 - 6u_{n-1} + 7}. \end{aligned} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$. Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{u_n - 3}{u_n + 1} = \left(\frac{u_{n-1} - 3}{u_{n-1} + 1} \right)^3 = [f(u_{n-1})]^3 \\ &= [f(u_{n-2})]^{3^2} = \dots = [f(u_1)]^{3^{n-1}} = [f(\alpha)]^{3^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Đặt $\beta_n = [f(\alpha)]^{3^{n-1}}$. Từ (3) ta có

$$\frac{u_n - 3}{u_n + 1} = \beta_n \Leftrightarrow u_n - 3 = \beta_n u_n + \beta_n \Leftrightarrow u_n = \frac{3 + \beta_n}{1 - \beta_n}.$$

Vậy

$$u_n = \frac{3 + \left(\frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}\right)^{3^{n-1}}}{1 - \left(\frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}\right)^{3^{n-1}}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Tóm lại: Nếu $\alpha = -1$ thì $u_n = -1, \forall n = 1, 2, \dots$, nếu $\alpha \neq -1$ thì

$$u_n = \frac{3 + \left(\frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}\right)^{3^{n-1}}}{1 - \left(\frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}\right)^{3^{n-1}}}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Ta có các biến đổi tương đương sau

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1} = 1 &\Leftrightarrow \alpha - 3 = \alpha + 1 \Leftrightarrow 0\alpha = 4 \text{ (vô nghiệm).} \\ \left| \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1} \right| < 1 &\Leftrightarrow (\alpha - 3)^2 < (\alpha + 1)^2 \Leftrightarrow -6\alpha + 9 < 2\alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha > 1. \\ \left| \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1} \right| > 1 &\Leftrightarrow -1 \neq \alpha < 1. \end{aligned}$$

Bởi vậy ta có kết quả biện luận như sau:

- Nếu $\alpha = -1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.
- Nếu $\alpha = 1$ thì $u_n = 1, \forall n = 1, 2, \dots$, suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.
- Nếu $\alpha > 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}\right)^{3^{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.
- Nếu $-1 \neq \alpha < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha - 3}{\alpha + 1}\right)^{-3^{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

5. Lớp hàm $g(x) = \frac{x^4 + ax^2 + b}{cx^3 + dx}$.

Ta có

$$g(x) - e = \frac{x^4 + ax^2 + b}{cx^3 + dx} - e = \frac{x^4 - cex^3 + ax^2 - dex + b}{cx^3 + dx}.$$

Ta cần chọn a, b, c, d, e sao cho

$$\begin{aligned} x^4 - cex^3 + ax^2 - dex + b &= (x - e)^4 \\ \Rightarrow x^4 - cex^3 + ax^2 - dex + b &= x^4 - 4ex^3 + 6e^2x^2 - 4e^3x + e^4 \\ \Rightarrow \begin{cases} ce = 4e \\ a = 6e^2 \\ de = 4e^3 \\ b = e^4 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 6e^2 \\ d = 4e^2 \\ b = e^4. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 10. Chọn $e = \sqrt{2}$, khi đó $a = 12, b = 4, c = 4, d = 8$. Ta được dãy số (x_n) thỏa mãn hệ thức truy hồi: $x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 12x_n^2 + 4}{4x_n^3 + 8x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta được bài toán sau.

Bài toán 0.10. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) cho như sau:

$$x_1 = \alpha > 0 \text{ và } x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 12x_n^2 + 4}{4x_n^3 + 8x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Dễ thấy $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$\begin{aligned} x_{n+1} + \sqrt{2} &= \frac{x_n^4 + 12x_n^2 + 4}{4x_n^3 + 8x_n} + \sqrt{2} \\ &= \frac{x_n^4 + 4\sqrt{2}x_n^3 + 12x_n^2 + 8\sqrt{2}x_n + 4}{4x_n^3 + 8x_n} = \frac{(x_n + \sqrt{2})^4}{4x_n^3 + 8x_n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{x_n^4 + 12x_n^2 + 4}{4x_n^3 + 8x_n} - \sqrt{2} \\ &= \frac{x_n^4 - 4\sqrt{2}x_n^3 + 12x_n^2 - 8\sqrt{2}x_n + 4}{4x_n^3 + 8x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{2})^4}{4x_n^3 + 8x_n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}, \forall x > 0$. Từ (1) và (2) ta suy ra

$$\begin{aligned} f(x_n) &= \frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{x_{n-1} - \sqrt{2}}{x_{n-1} + \sqrt{2}} \right)^4 = [f(x_{n-1})]^4 = [f(x_{n-2})]^{4^2} \\ &= \dots = [f(x_1)]^{4^{n-1}} = [f(\alpha)]^{4^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Đặt $\beta_n = [f(\alpha)]^{4^{n-1}}$. Từ (3) ta có

$$\frac{x_n - \sqrt{2}}{x_n + \sqrt{2}} = \beta_n \Leftrightarrow x_n - \sqrt{2} = \beta_n x_n + \sqrt{2} \beta_n \Leftrightarrow x_n = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \beta_n}{1 - \beta_n}.$$

Số hạng tổng quát của dãy số đã cho là

$$x_n = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \left(\frac{\alpha - \sqrt{2}}{\alpha + \sqrt{2}} \right)^{4^{n-1}}}{1 - \left(\frac{\alpha - \sqrt{2}}{\alpha + \sqrt{2}} \right)^{4^{n-1}}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Bài toán 0.11. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) cho như sau:

$$u_1 = \alpha \in \mathbb{R} \text{ và } u_{n+1} = \frac{4u_n(4u_n^2 + 1)}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải. Dễ thấy, với mọi số nguyên dương n thì luôn tồn tại u_n . Nếu $\alpha = -\frac{1}{2}$ thì $u_n = -\frac{1}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$. Tiếp theo xét $\alpha \neq -\frac{1}{2}$. Ta có

$$2u_{n+1} + 1 = \frac{32u_n^3 + 8u_n}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1} + 1 = \frac{16u_n^4 + 32u_n^3 + 24u_n^2 + 8u_n + 1}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1}$$

$$= \frac{(2u_n + 1)^4}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1}. \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 2u_{n+1} - 1 &= \frac{32u_n^3 + 8u_n}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1} - 1 = \frac{-16u_n^4 + 32u_n^3 - 24u_n^2 + 8u_n - 1}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1} \\ &= \frac{-(2u_n - 1)^4}{16u_n^4 + 24u_n^2 + 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x - 1}{2x + 1}$. Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{2u_n - 1}{2u_n + 1} = - \left(\frac{2u_{n-1} - 1}{2u_{n-1} + 1} \right)^4 = - [f(u_{n-1})]^4 = - [f(u_{n-2})]^{4^2} \\ &= \dots = - [f(u_1)]^{4^{n-1}} = - [f(\alpha)]^{4^{n-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (3) ta được

$$\frac{2u_n - 1}{2u_n + 1} = - [f(\alpha)]^{4^{n-1}} \Leftrightarrow u_n = \frac{1 - [f(\alpha)]^{4^{n-1}}}{2 + 2[f(\alpha)]^{4^{n-1}}}.$$

Vậy nếu $\alpha = -\frac{1}{2}$ thì $u_n = -\frac{1}{2}$, $\forall n = 1, 2, \dots$, còn nếu $\alpha \neq -\frac{1}{2}$ thì

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{2\alpha - 1}{2\alpha + 1} \right)^{4^{n-1}}}{2 + 2 \cdot \left(\frac{2\alpha - 1}{2\alpha + 1} \right)^{4^{n-1}}}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$