TÔN THÂN (Chủ biên) - PHẠM GIA ĐỨC - TRẦN HỮU NAM
PHẠM ĐỨC QUANG- TRƯƠNG CÔNG THÀNH - NGUYỄN DUY THUẬN

BÀI TẬP TOÁN 9

TẬP HAI

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TÔN THÂN (Chủ biên)
PHẠM GIA ĐỨC - TRẦN HỮU NAM - PHẠM ĐỨC QUANG
TRƯƠNG CÔNG THÀNH - NGUYỄN DUY THUẬN

Bài tập TOÁN 9

TẬP HAI

(Tái bản lần thứ sáu)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01–2011/CXB/777–1235/GD Mã số : 2B904T1

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm qua, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 do chính các tác giả sách giáo khoa Toán THCS biên soạn đã được sử dụng kèm theo sách giáo khoa và đã mang lại những hiệu quả thiết thực. Bộ sách đã là một tài liệu bổ ích giúp các thầy, cô giáo có thêm tư liệu trong việc soạn giảng, giúp các em học sinh tự học, tự rèn luyện kĩ năng, qua đó củng cố được kiến thức cơ bản, hình thành phương pháp giải toán, tăng thêm khả năng vận dụng kiến thức và góp phần rèn luyện tư duy toán học.

Để đáp ứng tốt hơn nhu cầu ngày càng cao của các thầy, cô giáo và các em học sinh, chúng tôi tiến hành chỉnh lí và bổ sung bộ sách bài tập hiện có theo hướng tạo nhiều cơ hội hơn nữa để các em học sinh được củng cố kiến thức toán học cơ bản, được rèn luyện kĩ năng theo ***Chuẩn kiến thức, kĩ năng*** trong ***Chương trình Giáo dục phổ thông*** được Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 5 tháng 5 năm 2006. Nói chung, ở mỗi "xoắn"(§), cuối mỗi chương sẽ có thêm phần ***Bài tập bổ sung***. Trong phần này, có thể có các *câu hỏi trắc nghiệm khách quan* để các em học sinh tự kiểm tra, đánh giá mức độ nắm vững kiến thức của mình. Một số dạng bài tập chưa có trong sách giáo khoa cũng được bổ sung nhằm làm phong phú thêm các thể loại bài tập, giúp các em học sinh tập dượt vận dụng kiến thức trong nhiều tình huống khác nhau. Bộ sách cũng được bổ sung một số bài tập dành cho các em học sinh khá, giỏi. Những bài tập này được đánh dấu "*". Bên cạnh đó, các tác giả cũng chú ý chỉnh sửa cách diễn đạt ở một số chỗ cho thích hợp và dễ hiểu hơn.

Chúng tôi hi vọng rằng với việc chỉnh lí và bổ sung như trên, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 sẽ góp phần tích cực hơn nữa trong việc nâng cao chất lượng dạy và học môn Toán ở các trường THCS trong cả nước, đáp ứng tốt hơn nữa nhu cầu đa dạng của các đối tượng học sinh khác nhau.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng song bộ sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy, cô giáo và bạn đọc gần xa để trong các lần tái bản sau bộ sách được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, tháng 10 năm 2009

Các tác giả

PHẦN ĐẠI SỐ

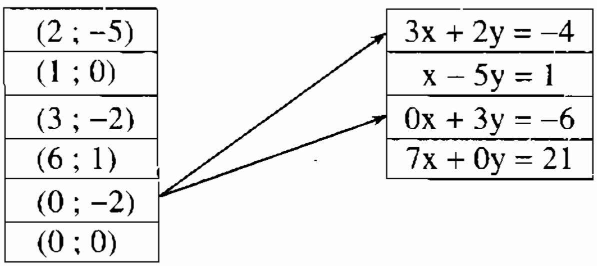
Chương III

HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. ĐỀ BÀI

§1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Cho các cặp số và các phương trình sau. Hãy dùng mũi tên (như trong hình vẽ) chỉ rõ mỗi cặp số là nghiệm của những phương trình nào :



2. Viết nghiệm tổng quát và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của mỗi phương trình sau :

a) $2x - y = 3$; b) $x + 2y = 4$; c) $3x - 2y = 6$;
d) $2x + 3y = 5$; e) $0x + 5y = -10$; f) $-4x + 0y = -12$.

3. Trong mỗi trường hợp sau hãy tìm giá trị của m để :

a) Điểm M(1 ; 0) thuộc đường thẳng $mx - 5y = 7$;

b) Điểm N(0 ; –3) thuộc đường thẳng $2{,}5x + my = -21$;

c) Điểm P(5 ; –3) thuộc đường thẳng $mx + 2y = -1$;

d) Điểm P(5 ; –3) thuộc đường thẳng $3x - my = 6$;

e) Điểm Q(0,5 ; –3) thuộc đường thẳng $mx + 0y = 17{,}5$;

f) Điểm S(4 ; 0,3) thuộc đường thẳng $0x + my = 1{,}5$;

g) Điểm A(2 ; –3) thuộc đường thẳng $(m - 1)x + (m + 1)y = 2m + 1$.

4. Phương trình nào sau đây xác định một hàm số dạng $y = ax + b$?

a) $5x - y = 7$; b) $3x + 5y = 10$;

c) $0x + 3y = -1$; d) $6x - 0y = 18$.

5. Phải chọn a và b như thế nào để phương trình $ax + by = c$ xác định một hàm số bậc nhất của biến x ?

6. Vẽ mỗi cặp đường thẳng sau trong cùng một mặt phẳng toạ độ rồi tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng đó :

a) $2x + y = 1$ và $4x - 2y = -10$; b) $0,5x + 0,25y = 0,15$ và $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = -\frac{3}{2}$;

c) $4x + 5y = 20$ và $0,8x + y = 4$; d) $4x + 5y = 20$ và $2x + 2,5y = 5$.

7. Giải thích vì sao khi $M(x_0 ; y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng

$$ax + by = c \text{ và } a'x + b'y = c'$$

thì $(x_0 ; y_0)$ là nghiệm chung của hai phương trình ấy.

Bài tập bổ sung

1.1. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $3x - 2y = 3$:

A(1 ; 3) ; B(2 ; 3) ; C(3 ; 3) ; D(4 ; 3) ?

1.2. Trong mỗi trường hợp sau, hãy xác định đường thẳng $ax + by = c$ đi qua hai điểm M và N cho trước :

a) $M(0 ; -1)$, $N(3 ; 0)$;

b) $M(0 ; 3)$, $N(-1 ; 0)$.

§2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

8. Hãy kiểm tra xem mỗi cặp số sau có phải là một nghiệm của hệ phương trình tương ứng hay không :

a) $(-4 ; 5)$, $\begin{cases} 7x - 5y = -53 \\ -2x + 9y = 53 \end{cases}$;

b) $(3 ; -11)$, $\begin{cases} 0,2x + 1,7y = -18,1 \\ 3,2x - y = 20,6 \end{cases}$;

c) (1,5 ; 2), (3 ; 7), $\begin{cases} 10x - 3y = 9 \\ -5x + 1,5y = -4,5 \end{cases}$;

d) (1 ; 8), $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ x - 14y = 5 \end{cases}$.

9. Hãy biểu diễn y qua x ở mỗi phương trình (nếu có thể) rồi đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây và giải thích vì sao (không vẽ đồ thị) :

a) $\begin{cases} 4x - 9y = 3 \\ -5x - 3y = 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2,3x + 0,8y = 5 \\ 2y = 6 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x = -5 \\ x + 5y = -4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$.

10. Cho phương trình $3x - 2y = 5$.

a) Hãy cho thêm một phương trình bậc nhất hai ẩn để được một hệ có nghiệm duy nhất.

b) Hãy cho thêm một phương trình bậc nhất hai ẩn để được một hệ vô nghiệm.

c) Hãy cho thêm một phương trình bậc nhất hai ẩn để được một hệ có vô số nghiệm.

11*. Dựa vào vị trí tương đối giữa hai đường thẳng dưới đây, hãy tìm mối liên hệ giữa các hằng số a, b, c và các hằng số a', b', c' để hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a) Có nghiệm duy nhất ;

b) Vô nghiệm ;

c) Có vô số nghiệm.

Áp dụng :

a) Hãy lập một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có nghiệm duy nhất.

b) Hãy lập một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn vô nghiệm.

c) Hãy lập một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có vô số nghiệm.

12. Minh hoạ hình học tập nghiệm của mỗi hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 6 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 0y = 12 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 0x - 5y = 10 \end{cases}$.

13. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + 0y = -2 \\ 5x - y = -9 \end{cases}$.

a) Minh hoạ hình học tập nghiệm của hệ phương trình đã cho. Từ đó xác định nghiệm của hệ.

b) Nghiệm của hệ này có phải là nghiệm của phương trình $3x - 7y = 1$ hay không ?

14. Vẽ hai đường thẳng $(d_1) : x + y = 2$ và $(d_2) : 2x + 3y = 0$.

Hỏi đường thẳng $(d_3) : 3x + 2y = 10$ có đi qua giao điểm của (d_1) và (d_2) hay không ?

15. Hỏi bốn đường thẳng sau có đồng quy không :

$(d_1) : 3x + 2y = 13$, $(d_2) : 2x + 3y = 7$, $(d_3) : x - y = 6$, $(d_4) : 5x - 0y = 25$?

Bài tập bổ sung

2.1. Không vẽ đồ thị, hãy giải thích vì sao các hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

a) $\begin{cases} 3x = 6 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ 2y = -7 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x = 6 \\ 2y = -7 \end{cases}$.

2.2. Những hệ phương trình nào sau đây vô nghiệm, những hệ nào có vô số nghiệm ?

a) $\begin{cases} 2x + 0y = 5 \\ 4x + 0y = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 0y = 5 \\ 4x + 0y = 10 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 0x + 3y = -8 \\ 0x - 21y = 56 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 0x + 3y = -8 \\ 0x - 21y = 50 \end{cases}$.

§3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

16. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế :

a) $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 7x - 2y = 1 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 1,3x + 4,2y = 12 \\ 0,5x + 2,5y = 5,5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \sqrt{5}x - y = \sqrt{5}(\sqrt{3} - 1) \\ 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{5}y = 21 \end{cases}$.

17. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 1,7x - 2y = 3,8 \\ 2,1x + 5y = 0,4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (\sqrt{5} + 2)x + y = 3 - \sqrt{5} \\ -x + 2y = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases}$.

18. Tìm giá trị của a và b :

a) Để hệ phương trình $\begin{cases} 3ax - (b + 1)y = 93 \\ bx + 4ay = -3 \end{cases}$ có nghiệm là (x ; y) = (1 ; –5) ;

b) Để hệ phương trình $\begin{cases} (a - 2)x + 5by = 25 \\ 2ax - (b - 2)y = 5 \end{cases}$ có nghiệm là (x ; y) = (3 ; –1).

19. Tìm giá trị của a và b để hai đường thẳng (d_1) : $(3a - 1)x + 2by = 56$ và (d_2) : $\frac{1}{2}ax - (3b + 2)y = 3$ cắt nhau tại điểm M(2 ; –5).

20. Tìm a và b :

a) Để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm A(–5 ; 3), $B\left(\frac{3}{2}; -1\right)$;

b) Để đường thẳng $ax - 8y = b$ đi qua điểm M(9 ; –6) và đi qua giao điểm của hai đường thẳng (d_1) : $2x + 5y = 17$, (d_2) : $4x - 10y = 14$.

21. Tìm giá trị của m :

a) Để hai đường thẳng (d_1) : $5x - 2y = 3$, (d_2) : $x + y = m$ cắt nhau tại một điểm trên trục Oy. Vẽ hai đường thẳng này trong cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Để hai đường thẳng (d_1) : $mx + 3y = 10$, (d_2) : $x - 2y = 4$ cắt nhau tại một điểm trên trục Ox. Vẽ hai đường thẳng này trong cùng một mặt phẳng toạ độ.

22. Tìm giao điểm của hai đường thẳng :

a) $(d_1) : 5x - 2y = c$ và $(d_2) : x + by = 2$, biết rằng (d_1) đi qua điểm $A(5 ; -1)$ và (d_2) đi qua điểm $B(-7 ; 3)$;

b) $(d_1) : ax + 2y = -3$ và $(d_2) : 3x - by = 5$, biết rằng (d_1) đi qua điểm $M(3 ; 9)$ và (d_2) đi qua điểm $N(-1 ; 2)$.

23. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases}(x-3)(2y+5) = (2x+7)(y-1)\\(4x+1)(3y-6) = (6x-1)(2y+3)\end{cases}$;

b) $\begin{cases}(x+y)(x-1) = (x-y)(x+1) + 2xy\\(y-x)(y+1) = (y+x)(y-2) - 2xy\end{cases}$.

24. Giải các hệ phương trình sau bằng cách đặt ẩn số phụ :

a) $\begin{cases}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}\\[2mm]\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}\end{cases}$;
b) $\begin{cases}\dfrac{15}{x} - \dfrac{7}{y} = 9\\[2mm]\dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{y} = 35\end{cases}$;
c) $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = \dfrac{5}{8}\\[2mm]\dfrac{1}{x+y} - \dfrac{1}{x-y} = -\dfrac{3}{8}\end{cases}$;

d) $\begin{cases}\dfrac{4}{2x-3y} + \dfrac{5}{3x+y} = -2\\[2mm]\dfrac{3}{3x+y} - \dfrac{5}{2x-3y} = 21\end{cases}$;
e) $\begin{cases}\dfrac{7}{x-y+2} - \dfrac{5}{x+y-1} = 4,5\\[2mm]\dfrac{3}{x-y+2} + \dfrac{2}{x+y-1} = 4\end{cases}$.

Bài tập bổ sung

3.1. Tìm a và b để hệ

$$\begin{cases}ax + by = 17\\3bx + ay = -29\end{cases}$$

có nghiệm là $(x ; y) = (1 ; -4)$.

3.2*. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}2x - y = 5\\(x + y + 2)(x + 2y - 5) = 0.\end{cases}$$

§4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

25. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

a) $\begin{cases} 2x - 11y = -7 \\ 10x + 11y = 31 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x + 7y = 16 \\ 4x - 3y = -24 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 0,35x + 4y = -2,6 \\ 0,75x - 6y = 9 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = 5 \\ 3\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 10x - 9y = 8 \\ 15x + 21y = 0,5 \end{cases}$; f) $\begin{cases} 3,3x + 4,2y = 1 \\ 9x + 14y = 4 \end{cases}$.

26. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 8x - 7y = 5 \\ 12x + 13y = -8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3\sqrt{5}x - 4y = 15 - 2\sqrt{7} \\ -2\sqrt{5}x + 8\sqrt{7}y = 18 \end{cases}$.

27. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 5(x + 2y) = 3x - 1 \\ 2x + 4 = 3(x - 5y) - 12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x^2 - 5(y + 1) = (2x - 3)^2 \\ 3(7x + 2) = 5(2y - 1) - 3x \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{2x + 1}{4} - \dfrac{y - 2}{3} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{x + 5}{2} = \dfrac{y + 7}{3} - 4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{3s - 2t}{5} + \dfrac{5s - 3t}{3} = s + 1 \\ \dfrac{2s - 3t}{3} + \dfrac{4s - 3t}{2} = t + 1 \end{cases}$.

28. Tìm hai số a và b sao cho $5a - 4b = -5$ và đường thẳng $ax + by = -1$ đi qua điểm $A(-7 ; 4)$.

29. Tìm giá trị của a và b để đường thẳng $ax - by = 4$ đi qua hai điểm $A(4 ; 3)$, $B(-6 ; -7)$.

30. Giải các hệ phương trình sau theo hai cách (cách thứ nhất : đưa hệ phương trình về dạng $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$; cách thứ hai : đặt ẩn phụ, chẳng hạn $3x - 2 = s$, $3y + 2 = t$) :

a) $\begin{cases} 2(3x - 2) - 4 = 5(3y + 2) \\ 4(3x - 2) + 7(3y + 2) = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3(x + y) + 5(x - y) = 12 \\ -5(x + y) + 2(x - y) = 11 \end{cases}$.

31. Tìm giá trị của m để nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{2(x-y)}{5} \\ \dfrac{x-3}{4} - \dfrac{y-3}{3} = 2y - x \end{cases}$$

cũng là nghiệm của phương trình $3mx - 5y = 2m + 1$.

32. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d): $y = (2m - 5)x - 5m$ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $(d_1) : 2x + 3y = 7$ và $(d_2) : 3x + 2y = 13$.

33. Tìm giá trị của m để ba đường thẳng sau đồng quy :

$(d_1) : 5x + 11y = 8$, $(d_2) : 10x - 7y = 74$, $(d_3) : 4mx + (2m - 1)y = m + 2$.

34*. Nghiệm chung của ba phương trình đã cho được gọi là nghiệm của hệ gồm ba phương trình ấy. Giải hệ phương trình là tìm nghiệm chung của tất cả các phương trình trong hệ. Hãy giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 3x + 5y = 34 \\ 4x - 5y = -13 \\ 5x - 2y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x - 5y = -49 \\ -3x + 2y = 22 \\ 7x + 5y = 10 \end{cases}$.

Bài tập bổ sung

4.1. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{y} = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{8}{3} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+y-1} - \dfrac{4}{x-y+1} = -\dfrac{14}{5} \\ \dfrac{3}{x+y-1} + \dfrac{2}{x-y+1} = -\dfrac{13}{5} \end{cases}$.

4.2. Hãy xác định hàm số bậc nhất thoả mãn mỗi điều kiện sau :

a) Đồ thị của hàm số đi qua hai điểm M(−3 ; 1) và N(1 ; 2) ;

b) Đồ thị của hàm số đi qua hai điểm M($\sqrt{2}$; 1) và N(3 ; $3\sqrt{2} - 1$).

c) Đồ thị đi qua điểm M(−2 ; 9) và cắt đường thẳng (d) : $3x - 5y = 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

4.3*. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{yz}{y+z} = \dfrac{6}{5} \\ \dfrac{zx}{z+x} = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

§5. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

35. Tổng của hai số bằng 59. Hai lần của số này bé hơn ba lần của số kia là 7. Tìm hai số đó.

36. Bảy năm trước tuổi mẹ bằng năm lần tuổi con cộng thêm 4.

Năm nay tuổi mẹ vừa đúng gấp ba lần tuổi con.

Hỏi năm nay mỗi người bao nhiêu tuổi ?

37. Cho một số có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của nó thì được một số lớn hơn số đã cho là 63. Tổng của số đã cho và số mới tạo thành bằng 99. Tìm số đã cho.

38. Hai anh Quang và Hùng góp vốn cùng kinh doanh. Anh Quang góp 15 triệu đồng. Anh Hùng góp 13 triệu đồng. Sau một thời gian được lãi 7 triệu đồng. Lãi được chia tỉ lệ với vốn đã góp. Em hãy dùng cách giải hệ phương trình để tính tiền lãi mà mỗi anh được hưởng.

39. Hôm qua mẹ của Lan đi chợ mua năm quả trứng gà và năm quả trứng vịt hết 10 000 đồng. Hôm nay mẹ Lan mua ba quả trứng gà và bảy quả trứng vịt chỉ hết 9600 đồng mà giá trứng thì vẫn như cũ. Hỏi giá một quả trứng mỗi loại là bao nhiêu ?

40. Một sân trường hình chữ nhật có chu vi 340m. Ba lần chiều dài hơn bốn lần chiều rộng là 20m. Tính chiều dài và chiều rộng của sân trường.

41. Làm trần tầng một của nhà văn hoá xã phải dùng 30 cây sắt ∅18 (đọc là sắt "phi 18" ; tức là đường kính thiết diện cây sắt bằng 18mm) và 350kg sắt ∅8 hết một khoản tiền. Vì trần tầng hai hẹp hơn nên chỉ cần 20 cây sắt ∅18 và 250kg sắt ∅8 ; do đó chỉ hết một khoản tiền ít hơn khoản tiền lần trước là 1 440 000 đồng. Tính giá tiền của một cây sắt ∅18 và giá tiền 1kg sắt ∅8, biết rằng giá tiền một cây sắt ∅18 đắt gấp 22 lần giá tiền 1kg sắt ∅8.

42. Trong phòng học có một số ghế dài. Nếu xếp mỗi ghế ba học sinh thì sáu học sinh không có chỗ. Nếu xếp mỗi ghế bốn học sinh thì thừa một ghế. Hỏi lớp có bao nhiêu ghế và bao nhiêu học sinh ?

43. Trên một cánh đồng cấy 60 ha lúa giống mới và 40 ha lúa giống cũ. Thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi loại lúa trên 1 ha là bao nhiêu biết rằng 3 ha trồng lúa mới thu hoạch được ít hơn 4 ha trồng lúa cũ là 1 tấn.

44. Hai người thợ cùng xây một bức tường trong 7 giờ 12 phút thì xong (vôi vữa và gạch có công nhân khác vận chuyển). Nếu người thứ nhất làm trong 5 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì cả hai xây được $\frac{3}{4}$ bức tường. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xây xong bức tường ?

45. Hai công nhân cùng sơn cửa cho một công trình trong bốn ngày thì xong việc. Nếu người thứ nhất làm một mình trong chín ngày rồi người thứ hai đến cùng làm tiếp trong một ngày nữa thì xong việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu xong việc ?

46. Hai cần cẩu lớn bốc dỡ một lô hàng ở cảng Sài Gòn. Sau 3 giờ có thêm năm cần cẩu bé (công suất bé hơn) cùng làm việc. Cả bảy cần cẩu làm việc 3 giờ nữa thì xong. Hỏi mỗi cần cẩu làm việc một mình thì bao lâu xong việc, biết rằng nếu cả bảy cần cẩu cùng làm việc từ đầu thì trong 4 giờ xong việc.

47. Bác Toàn đi xe đạp từ thị xã về làng, cô Ba Ngần cũng đi xe đạp, nhưng từ làng lên thị xã. Họ gặp nhau khi bác Toàn đã đi được 1 giờ rưỡi, còn cô Ba Ngần đã đi được 2 giờ. Một lần khác hai người cũng đi từ hai địa điểm như thế nhưng họ khởi hành đồng thời ; sau 1 giờ 15 phút họ còn cách nhau 10,5km. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng làng cách thị xã 38km.

48. Ga Sài Gòn cách ga Dầu Giây 65km. Xe khách ở Thành phố Hồ Chí Minh, xe hàng ở Dầu Giây đi ngược chiều nhau và xe khách khởi hành sau xe hàng 36 phút, sau khi xe khách khởi hành 24 phút nó gặp xe hàng. Nếu hai xe khởi hành đồng thời và cùng đi Hà Nội thì sau 13 giờ hai xe gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng xe khách đi nhanh hơn xe hàng.

49. Để sửa một ngôi nhà cần một số thợ làm việc trong một thời gian quy định. Nếu giảm ba người thì thời gian kéo dài sáu ngày. Nếu tăng thêm hai người thì xong sớm hai ngày. Hỏi theo quy định cần bao nhiêu thợ và làm trong bao nhiêu ngày, biết rằng khả năng lao động của mọi thợ đều như nhau ?

50. Cho hình vuông ABCD cạnh y (cm). Điểm E thuộc cạnh AB. Điểm G thuộc tia AD sao cho $AG = AD + \frac{3}{2}EB$. Dựng hình chữ nhật GAEF. Đặt EB = 2x (cm). Tính x và y để diện tích của hình chữ nhật bằng diện tích hình vuông và ngũ giác ABCFG có chu vi bằng $100 + 4\sqrt{13}$ (cm).

Bài tập bổ sung

5.1. Tổng số tuổi của tôi và của em tôi năm nay bằng 26. Khi tổng số tuổi của chúng tôi gấp 5 lần tuổi của tôi hiện nay thì tuổi của tôi khi đó sẽ gấp 3 lần tuổi của em tôi hiện nay. Hãy tính tuổi hiện nay của mỗi người chúng tôi.

5.2*. Có hai bến xe khách P và Q. Một người đi xe đạp từ P đến Q với vận tốc không đổi, nhận thấy cứ 15 phút lại có một xe khách đi cùng chiều vượt qua và cứ 10 phút lại gặp một xe khách đi ngược chiều. Giả thiết rằng các xe khách chạy với cùng một vận tốc, không dừng lại trên đường và ở cả hai bến, cứ x phút lại có một xe rời bến. Hỏi thời gian x là bao nhiêu phút và vận tốc xe khách bằng bao nhiêu lần vận tốc người đi xe đạp ?

Bài tập ôn chương III

51. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 4x + y = -5 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 3y = 4y - x + 5 \\ 2x - y = 3x - 2(y + 1) \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3(x + y) + 9 = 2(x - y) \\ 2(x + y) = 3(x - y) - 11 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2(x + 3) = 3(y + 1) + 1 \\ 3(x - y + 1) = 2(x - 2) + 3 \end{cases}$.

52. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} \sqrt{3}x - 2\sqrt{2}y = 7 \\ \sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y = -2\sqrt{6} \end{cases}$; b) $\begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x - (2 - \sqrt{3})y = 2 \\ (2 + \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 2 \end{cases}$.

53. Tìm các giá trị của a và b để hệ phương trình :

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ 2ax - 3by = 36 \end{cases}$$

có nghiệm là (3 ; –2).

54. Tìm một số có hai chữ số biết rằng 2 lần chữ số hàng chục lớn hơn 5 lần chữ số hàng đơn vị là 1 và chữ số hàng chục chia cho chữ số hàng đơn vị được thương là 2 và dư cũng là 2.

55. Một xe lửa phải vận chuyển một lượng hàng. Nếu xếp vào mỗi toa 15 tấn hàng thì còn thừa lại 3 tấn, nếu xếp vào mỗi toa 16 tấn thì còn có thể chở thêm 5 tấn nữa. Hỏi xe lửa có mấy toa và phải chở bao nhiêu tấn hàng ?

56. Hai đội xe chở cát để san lấp một khu đất. Nếu hai đội cùng làm thì trong 12 ngày xong việc. Nhưng hai đội chỉ cùng làm trong 8 ngày. Sau đó đội thứ nhất làm tiếp một mình trong 7 ngày nữa thì xong việc. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong việc.

57. Hai xe lửa khởi hành đồng thời từ hai ga cách nhau 750km và đi ngược chiều nhau, sau 10 giờ chúng gặp nhau. Nếu xe thứ nhất khởi hành trước xe thứ hai 3 giờ 45 phút thì sau khi xe thứ hai đi được 8 giờ chúng gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi xe.

Bài tập bổ sung

III.1. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} (x+3)(y+5) = (x+1)(y+8) \\ (2x-3)(5y+7) = 2(5x-6)(y+1) \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{2y-5} = \dfrac{3x+1}{3y-4} \\ 2(x-3) - 3(y+2) = -16. \end{cases}$

III.2. Năm nay người ta áp dụng kĩ thuật mới trên hai cánh đồng trồng lúa ở ấp Minh Châu. Vì thế lượng lúa thu được trên cánh đồng thứ nhất tăng lên 30% so với năm ngoái, trên cánh đồng thứ hai lượng lúa thu được tăng 20%. Tổng cộng cả hai cánh đồng thu được 630 tấn. Hỏi trên mỗi cánh đồng năm nay thu được bao nhiêu lúa, biết rằng trên cả hai cánh đồng này năm ngoái chỉ thu được 500 tấn ?

III.3. Người ta trộn hai loại quặng sắt với nhau, một loại chứa 72% sắt, loại thứ hai chứa 58% sắt được một loại quặng chứa 62% sắt. Nếu tăng khối lượng của mỗi loại quặng thêm 15 tấn thì được một loại quặng chứa 63,25% sắt. Tìm khối lượng quặng của mỗi loại đã trộn.

III.4*. Một người đi ngựa và một người đi bộ đều đi từ bản A đến bản B. Người đi ngựa đến B trước người đi bộ 50 phút rồi lập tức quay trở về A và gặp người đi bộ tại một địa điểm cách B là 2km. Trên cả quãng đường từ A đến B và ngược lại, người đi ngựa đi hết 1 giờ 40 phút. Hãy tính khoảng cách AB và vận tốc của mỗi người.

B. LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

2. *Đáp số :*

a) $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{y+3}{2} \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \dfrac{4-x}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 4 - 2y \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \dfrac{3x-6}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{2y+6}{3} \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$; d) $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = \dfrac{5-2x}{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{5-3y}{2} \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = -2 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x = 3 \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$.

3. a) Để điểm M(1 ; 0) thuộc đường thẳng $mx - 5y = 7$ thì toạ độ của M phải thoả mãn phương trình này, nghĩa là $m.1 - 5.0 = 7$.

Đáp số : m = 7.

b) *Đáp số :* m = 7 ; c) *Đáp số :* m = 1 ; d) *Đáp số :* m = –3 ;

e) *Đáp số :* m = 35 ; f) *Đáp số :* m = 5 ; g) *Đáp số :* m = –2.

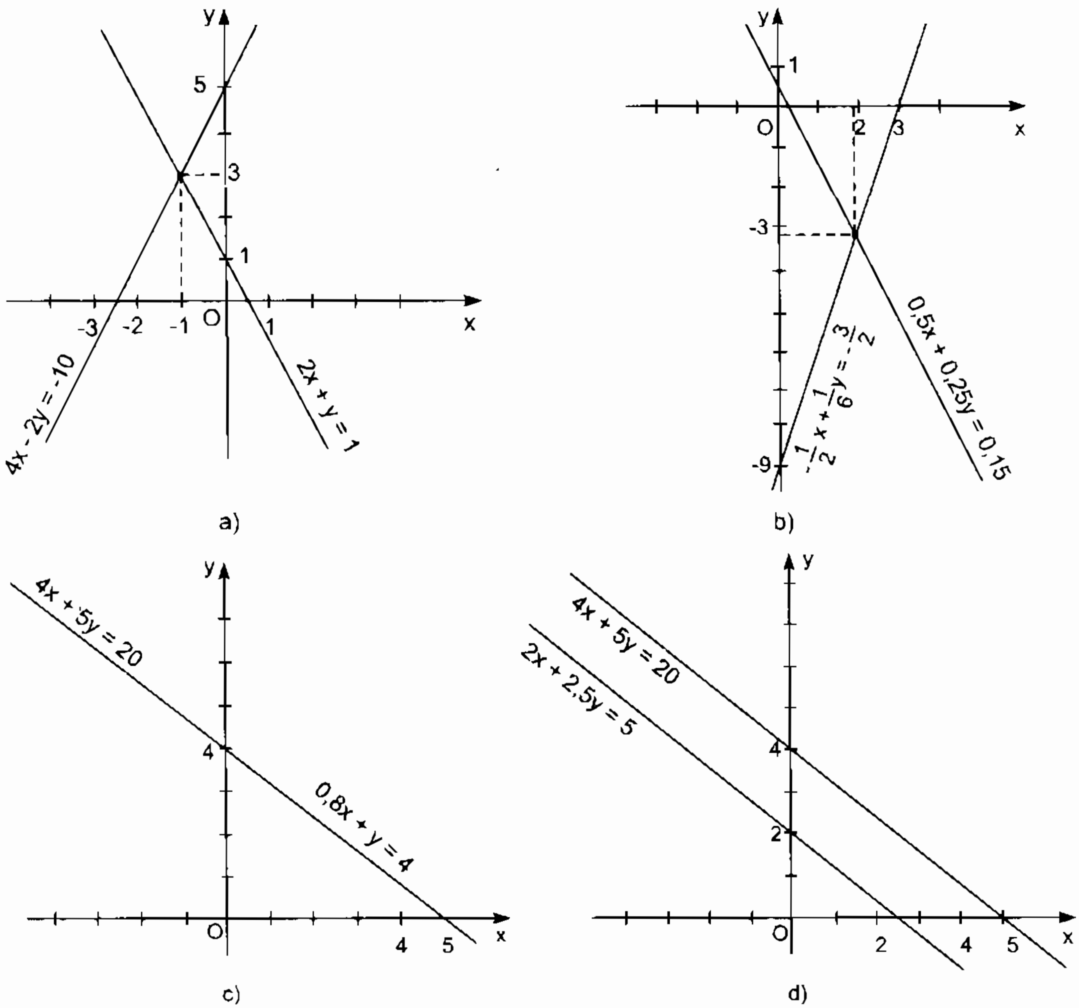
4. *Đáp số :*

a) $y = 5x - 7$; b) $y = -\dfrac{3}{5}x + 2$;

c) $y = -\dfrac{1}{3}$; d) Không xác định hàm số dạng $y = ax + b$.

5. *Đáp số :* Phải chọn $a \neq 0$ và $b \neq 0$.

6. (h.1)



Hình 1

7. Giả sử $M(x_0\ ;\ y_0)$ là giao điểm của hai đường thẳng $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$. Vì M thuộc đường thẳng $ax + by = c$ nên toạ độ của nó thoả mãn phương trình này, nghĩa là

$$ax_0 + by_0 = c.$$

Tương tự, vì M thuộc đường thẳng $a'x + b'y = c'$, nên

$$a'x_0 + b'y_0 = c'.$$

Vậy $(x_0\ ;\ y_0)$ là nghiệm chung của hai phương trình $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$.

Bài tập bổ sung

1.1. Điểm C.

1.2. a) Lần lượt thay toạ độ của M và N vào phương trình $ax + by = c$, ta được :

$-b = c$ và $3a = c$. Suy ra $b = -c$ và $a = \frac{c}{3}$.

Do đó đường thẳng phải tìm là $\frac{c}{3}x - cy = c$, vì đường thẳng MN được xác định nên a, b không đồng thời bằng 0, do đó $c \neq 0$. Vậy phương trình đường thẳng là : $x - 3y = 3$.

b) Lập luận tương tự, đường thẳng phải tìm là $3x - y = -3$.

§2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

8. a) *Hướng dẫn.* Thay $x = -4$, $y = 5$ vào hai phương trình trong hệ.

Trả lời : Có.

b) Có.

c) Có.

d) Không, vì $5.1 + 2.8 = 5 + 16 = 21 \neq 9$.

9. a) $\begin{cases} y = \frac{4}{9}x - \frac{1}{3} \\ y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3} \end{cases}$. Vì $\frac{4}{9} \neq -\frac{5}{3}$ nên hai đường thẳng cắt nhau. Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

b) $\begin{cases} y = -\frac{2,3}{0,8}x + \frac{5}{0,8} \\ y = 3 \end{cases}$. Vì đường thẳng thứ nhất cắt hai trục toạ độ, còn đường thẳng thứ hai song song với Ox nên chúng cắt nhau. Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

c) $\begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} \end{cases}$. Vì đường thẳng thứ nhất song song với Oy, còn đường thẳng thứ hai cắt hai trục nên chúng cắt nhau. Vậy hệ có nghiệm duy nhất.

d) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3x - \frac{5}{2} \end{cases}$. Hai đường thẳng song song nên hệ vô nghiệm.

10. *Hướng dẫn.* Biến đổi phương trình đã cho thành $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$.

a) Chẳng hạn $y = -x + 3$ hay $x + y = 3$.

Hai đường thẳng (d) : $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ và (d_1) : $y = -x + 3$ có hệ số góc khác nhau nên chúng cắt nhau. Do đó hệ có nghiệm duy nhất.

b) Chẳng hạn $y = \frac{3}{2}x + 1$ hay $3x - 2y = -2$.

c) Chẳng hạn $12x - 8y = 20$.

11. Ta xét các trường hợp sau :

• Trường hợp a, b, a', b' đều khác 0.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'} \end{cases}.$$

a) Hệ có nghiệm duy nhất khi hai đường thẳng cắt nhau, tức là khi $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$ hay $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

b) Hệ vô nghiệm khi hai đường thẳng song song, tức là khi : $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ và $\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}$ hay $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ nếu $c' \neq 0$, hoặc $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \neq \frac{c'}{c}$ nếu $c \neq 0$.

c) Hệ có vô số nghiệm khi hai đường thẳng trùng nhau, tức là khi : $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ và $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ hay $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

• Trường hợp $a = 0 \neq a'$.

Hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} y = \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'} \end{cases}$ nếu $b' \neq 0$

hoặc tương đương với hệ $\begin{cases} y = \dfrac{c}{b} \\ x = \dfrac{c'}{a'} \end{cases}$ nếu b' = 0.

Vì đường thẳng thứ nhất song song (hoặc trùng) với Ox, còn đường thẳng thứ hai cắt Ox, nên hai đường thẳng cắt nhau. Hệ có nghiệm duy nhất.

Tương tự nếu $a \neq 0 = a'$.

• Trường hợp $a = 0 = a'$.

Hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} y = \dfrac{c}{b} \\ y = \dfrac{c'}{b'} \end{cases}$. Do đó :

Hệ vô nghiệm khi

$$\frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'}.$$

Hệ có vô số nghiệm khi

$$\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}.$$

• Trường hợp $b = 0 \neq b'$.

Hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x = \dfrac{c}{a} \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'} \end{cases}$.

Hệ có nghiệm duy nhất vì đường thẳng thứ nhất song song (hoặc trùng) với Oy, còn đường thẳng thứ hai cắt Oy.

Tương tự nếu $b \neq 0 = b'$.

• Trường hợp $b = 0 = b'$.

Hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x = \dfrac{c}{a} \\ x = \dfrac{c'}{a'} \end{cases}$. Do đó :

Hệ vô nghiệm khi

$$\frac{c}{a} \neq \frac{c'}{a'} \text{ hay } \frac{c}{c'} \neq \frac{a}{a'}.$$

Hệ có vô số nghiệm khi

$$\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}.$$

Kết luận

- Hệ có nghiệm duy nhất khi $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$,

  hoặc $a = 0 \neq a'$ hoặc $a \neq 0 = a'$,

  hoặc $b = 0 \neq b'$ hoặc $b \neq 0 = b'$.

- Hệ vô nghiệm khi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$ hoặc $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} \neq \dfrac{c'}{c}$,

hoặc $a = 0 = a'$ và $\dfrac{c}{b} \neq \dfrac{c'}{b'}$, hoặc $b = 0 = b'$ và $\dfrac{c}{a} \neq \dfrac{c'}{a'}$.

- Hệ có vô số nghiệm khi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

hoặc $a = 0 = a'$ và $\dfrac{c}{b} = \dfrac{c'}{b'}$, hoặc $b = 0 = b'$ và $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'}$.

Chú ý. "Lạm dụng kí hiệu" :

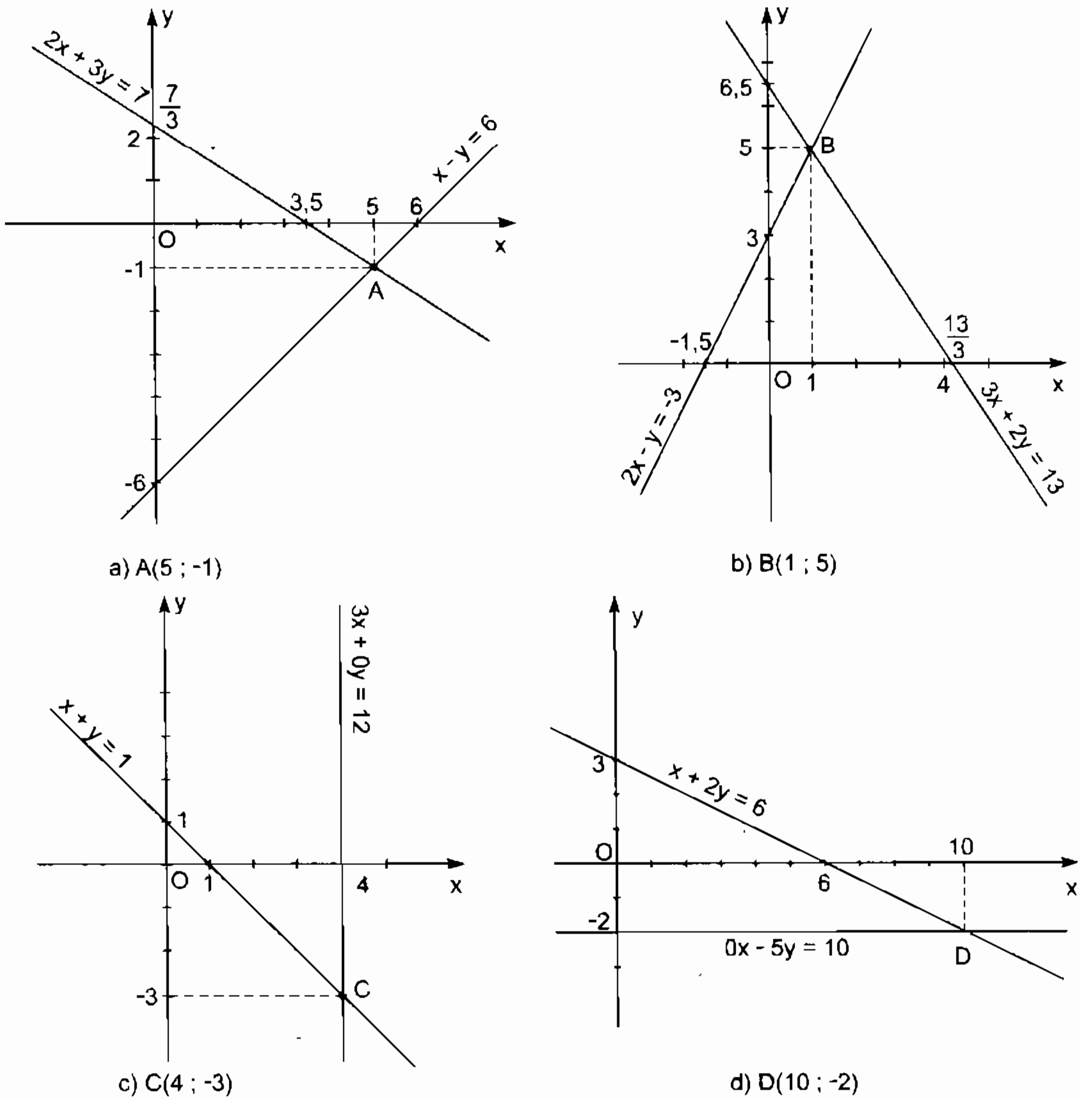
Khi $a \neq 0$, $a' = 0$ người ta vẫn viết $\dfrac{a}{0}$ và coi biểu thức này vô nghĩa ;

Khi $a = 0 = a'$ người ta vẫn viết $\dfrac{0}{0}$ và coi biểu thức này có thể bằng một số tuỳ ý.

Như vậy, kết luận trên có thể viết lại như sau :

• Hệ có nghiệm duy nhất khi $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$.
• Hệ vô nghiệm khi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$.
• Hệ có vô số nghiệm khi $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$.

12. (h.2)



Hình 2

13. a) Học sinh tự vẽ hình.

b) Có.

14. Có.

15. *Hướng dẫn.* Vẽ hai đường thẳng (d_3) và (d_4). Tìm toạ độ giao điểm của chúng rồi kiểm tra xem điểm đó có thuộc hai đường thẳng (d_1) và (d_2) hay không.

Trả lời. Bốn đường thẳng (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) đồng quy tại điểm có toạ độ là $(5 ; -1)$.

Bài tập bổ sung

2.1. a) Đường thẳng $3x = 6$ song song với Oy, còn đường thẳng $x - 3y = 2$ cắt Oy, do đó nó cũng cắt đường thẳng $3x = 6$.

b) Đường thẳng $2y = -7$ song song với Ox, còn đường thẳng $3x + 5y = 15$ cắt Ox nên cũng cắt đường thẳng $2y = -7$.

c) Lập luận tương tự như trường hợp trên.

2.2. Vô nghiệm : a), d).

Vô số nghiệm : b), c).

§3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

16. a) $\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 5 \\ 4(3y + 5) + 5y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 5 \\ 17y = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Đáp số : $(x ; y) = (2 ; -1)$.

b) *Đáp số :* $(x ; y) = (1 ; 3)$.

c) *Đáp số :* $(x ; y) = (6 ; 1)$.

d) $\begin{cases} \sqrt{5}x - y = \sqrt{5}(\sqrt{3} - 1) \\ 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{5}y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{5}(x + 1 - \sqrt{3}) \\ 2\sqrt{3}x + 15(x + 1 - \sqrt{3}) = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{5}(x + 1 - \sqrt{3}) \\ (15 + 2\sqrt{3})x = 3(2 + 5\sqrt{3}) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3(2 + 5\sqrt{3})}{15 + 2\sqrt{3}} = \dfrac{3(2 + 5\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3})}{225 - 12} = \dfrac{3.71\sqrt{3}}{213} = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{5}(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}) = \sqrt{5} \end{cases}.$$

Đáp số : $(x ; y) = (\sqrt{3} ; \sqrt{5})$.

17. a) $\begin{cases} 1,7x - 2y = 3,8 \\ 2,1x + 5y = 0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1,7x - 3,8}{2} \\ 2,1x + 5y = 0,4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1,7x - 3,8}{2} \\ 2,1x + 5.\dfrac{1,7x - 3,8}{2} = 0,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{198}{127} \\ y = -\dfrac{73}{127} \end{cases}.$$

Đáp số : $(x ; y) = \left(\dfrac{198}{127} ; -\dfrac{73}{127}\right)$.

b) $\begin{cases} (\sqrt{5} + 2)x + y = 3 - \sqrt{5} \\ -x + 2y = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2)x \\ -x + 6 - 2\sqrt{5} - (2\sqrt{5} + 4)x = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 2)x \\ -x(1 + 2\sqrt{5} + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - \sqrt{5} \end{cases}.$$

Đáp số : $(x ; y) = (0 ; 3 - \sqrt{5})$.

18. a) *Hướng dẫn.* Để hệ phương trình $\begin{cases} 3ax - (b + 1)y = 93 \\ bx + 4ay = -3 \end{cases}$ có nghiệm là $(x ; y) = (1 ; -5)$, ta thay $x = 1$ và $y = -5$ vào hệ và thu được hệ phương trình $\begin{cases} 3a + 5b = 88 \\ b - 20a = -3 \end{cases}$.

Giải hệ phương trình này để tìm giá trị của a, b.

Đáp số : $a = 1$, $b = 17$.

b) Để hệ phương trình $\begin{cases} (a - 2)x + 5by = 25 \\ 2ax - (b - 2)y = 5 \end{cases}$ có nghiệm là $(x ; y) = (3 ; -1)$, ta thay $x = 3$, $y = -1$ vào hệ và thu được hệ phương trình $\begin{cases} 3a - 5b = 31 \\ 6a + b = 7 \end{cases}$.

Đáp số : $a = 2$, $b = -5$.

19. Hai đường thẳng

$$(d_1) : (3a - 1)x + 2by = 56 \text{ và } (d_2) : \frac{1}{2}ax - (3b + 2)y = 3$$

cắt nhau tại điểm M(2 ; –5) nghĩa là M thuộc hai đường thẳng ấy. Từ đây ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (3a-1).2+2b.(-5)=56 \\ a-(3b+2).(-5)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-10b=58 \\ a+15b=-7 \end{cases}.$$

Đáp số : a = 8, b = –1.

20. a) *Đáp số* : $a=-\frac{8}{13}, b=-\frac{1}{13}$.

b) *Hướng dẫn*. Giải hệ $\begin{cases} 2x+5y=17 \\ 4x-10y=14 \end{cases}$ tìm được giao điểm của (d_1) và (d_2) là A(6;1). Muốn cho đường thẳng ax – 8y = b đi qua hai điểm M và A thì a, b phải là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 9a+48=b \\ 6a-8=b \end{cases}$.

Đáp số : $a=-\frac{56}{3}$, b = –120.

21. a) Giả sử hai đường thẳng (d_1) : 5x – 2y = 3 và (d_2) : x + y = m cắt nhau tại điểm A(0 ; y).

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} 5.0-2y=3 \\ 0+y=m \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} y=-\frac{3}{2} \\ m=-\frac{3}{2} \end{cases}$.

Đáp số : $m=-\frac{3}{2}$.

b) Giả sử hai đường thẳng (d_1) : mx + 3y = 10 và (d_2) : x – 2y = 4 cắt nhau tại điểm B(x ; 0). Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} mx+3.0=10 \\ x-2.0=4 \end{cases}.$$

Đáp số : $m=\frac{5}{2}$.

22. a) Vì $(d_1) : 5x - 2y = c$ đi qua điểm $A(5 ; -1)$ nên $5.5 - 2.(-1) = c$ hay $c = 27$.

Vì $(d_2) : x + by = 2$ đi qua điểm $B(-7 ; 3)$ nên $-7 + 3b = 2$ hay $b = 3$.

Như vậy, phương trình của (d_1) là $5x - 2y = 27$, phương trình của (d_2) là $x + 3y = 2$.

Giao điểm M của hai đường thẳng này có toạ độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 5x - 2y = 27 \\ x + 3y \;\; = 2 \end{cases}.$$

Đáp số : $M(5 ; -1)$.

b) *Đáp số :* Giao của hai đường thẳng là $I\left(\frac{11}{17} ; \frac{13}{17}\right)$.

23. a) $\begin{cases} (x-3)(2y+5) \;\; = (2x+7)(y-1) \\ (4x+1)(3y-6) = (6x-1)(2y+3) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + 5x - 6y - 15 \;\; = 2xy - 2x + 7y - 7 \\ 12xy - 24x + 3y - 6 = 12xy + 18x - 2y - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 13y = 8 \\ -42x + 5y = 3 \end{cases}.$$

Đáp số : $(x ; y) = \left(-\frac{79}{511} ; -\frac{51}{73}\right)$.

b) $\begin{cases} (x+y)(x-1) = (x-y)(x+1) + 2xy \\ (y-x)(y+1) = (y+x)(y-2) - 2xy \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = x - y \\ \;\; y - x = -2y - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}.$$

Đáp số : $(x ; y) = (0 ; 0)$.

24. a) Đặt $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v \;\; (x \neq 0, y \neq 0)$, ta có $\begin{cases} u + v = \frac{4}{5} \\ u - v = \frac{1}{5} \end{cases}$.

Suy ra $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{3}{10}$.

Đáp số : $(x ; y) = \left(2 ; \frac{10}{3}\right)$.

b) Đặt $\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v$ $(x \neq 0, y \neq 0)$, ta có $\begin{cases} 15u - 7v = 9 \\ 4u + 9v = 35 \end{cases}$. Giải hệ phương trình này ta được nghiệm là $u = 2$, $v = 3$.

Đáp số : $(x ; y) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{3}\right)$.

c) *Hướng dẫn.* Đặt $\frac{1}{x + y} = u, \frac{1}{x - y} = v$ $(x + y \neq 0, x - y \neq 0)$, ta tìm được

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 2 \end{cases}.$$

Đáp số : $(x ; y) = (5 ; 3)$.

d) Đặt $\frac{1}{2x - 3y} = u, \frac{1}{3x + y} = v$ $(2x - 3y \neq 0, 3x + y \neq 0)$, ta tìm được

$$\begin{cases} 2x - 3y = -\frac{1}{3} \\ 3x + y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Đáp số : $(x ; y) = \left(\frac{7}{66} ; \frac{2}{11}\right)$.

e) Đặt $\frac{1}{x - y + 2} = u, \frac{1}{x + y - 1} = v$ $(x - y + 2 \neq 0, x + y - 1 \neq 0)$, ta tìm được $\begin{cases} x - y + 2 = 1 \\ x + y - 1 = 2 \end{cases}$.

Đáp số : $(x ; y) = (1 ; 2)$.

Bài tập bổ sung

3.1. $a = 5$, $b = -3$.

3.2*. Vì $(x + y + 2)(x + 2y - 5) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$ hoặc $x + 2y - 5 = 0$ nên có thể viết hệ đã cho thành hai hệ

$$\text{(I)} \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \text{(II)} \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ (I) ta được nghiệm $(x ; y) = (1 ; -3)$.

Giải hệ (II) ta được nghiệm $(x ; y) = (3 ; 1)$.

§4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

25. a) $$\begin{cases} 2x - 11y = -7 \\ 10x + 11y = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x = 24 \\ 10x + 11y = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 10.2 + 11y = 31 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 11y = 31 - 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Đáp số : $(x ; y) = (2 ; 1)$.

b) *Đáp số :* $(x ; y) = (-3 ; 4)$.

c) *Đáp số :* $(x ; y) = (4 ; -1)$.

d) $$\begin{cases} \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = 5 \\ 3\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = 5 \\ 6\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}y = 5 \\ 7\sqrt{2}x = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}.\sqrt{2} + 2\sqrt{3}y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Đáp số : $(x ; y) = \left(\sqrt{2} ; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

e) *Đáp số :* $(x ; y) = \left(\dfrac{1}{2} ; -\dfrac{1}{3}\right)$.

f) *Đáp số :* $(x ; y) = \left(-\dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

26. a) $\begin{cases} 8x - 7y = 5 \\ 12x + 13y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 21y = 15 \\ 24x + 26y = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 7y = 5 \\ 47y = -31 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{31}{47} \\ 8x - 7\left(-\dfrac{31}{47}\right) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{31}{47} \\ 8x = -\dfrac{217}{47} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{31}{47} \\ x = \dfrac{9}{188} \end{cases}.$$

Đáp số : $(x\ ;\ y) = \left(\dfrac{9}{188}\ ;\ -\dfrac{31}{47}\right)$.

b) $\begin{cases} 3\sqrt{5}x - 4y = 15 - 2\sqrt{7} \\ -2\sqrt{5}x + 8\sqrt{7}y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sqrt{5}x - 8y = 30 - 4\sqrt{7} \\ -6\sqrt{5}x + 24\sqrt{7}y = 54 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{5}x - 4y = 15 - 2\sqrt{7} \\ (24\sqrt{7} - 8)y = 84 - 4\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4(21 - \sqrt{7})}{8(3\sqrt{7} - 1)} = \dfrac{(21 - \sqrt{7})(3\sqrt{7} + 1)}{2.62} = \dfrac{62\sqrt{7}}{2.62} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \\ 3\sqrt{5}x - 4.\dfrac{\sqrt{7}}{2} = 15 - 2\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ y = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}.$$

Đáp số : $(x\ ;\ y) = \left(\sqrt{5}\ ;\ \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$.

27. a) $\begin{cases} 5(x + 2y) = 3x - 1 \\ 2x + 4 = 3(x - 5y) - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 10y = 3x - 1 \\ 2x + 4 = 3x - 15y - 12 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10y = -1 \\ -x + 15y = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 10y = -1 \\ -2x + 30y = -32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 15y = -16 \\ 40y = -33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{33}{40} \\ x = 15.\left(-\dfrac{33}{40}\right) + 16 = \dfrac{-99 + 128}{8} = \dfrac{29}{8} \end{cases}.$$

Đáp số : $(x\ ;\ y) = \left(\dfrac{29}{8}; -\dfrac{33}{40}\right)$.

b) $\begin{cases} 4x^2 - 5(y+1) = (2x-3)^2 \\ 3(7x+2) = 5(2y-1) - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 5y - 5 = 4x^2 - 12x + 9 \\ 21x + 6 = 10y - 5 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 5y = 14 \\ 24x - 10y = -11 \end{cases}.$$

Đáp số : Hệ phương trình vô nghiệm.

c) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{4} - \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y+7}{3} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3 - 4y + 8 = 1 \\ 3x + 15 = 2y + 14 - 24 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ 3x - 2y = -25 \end{cases}.$$

Đáp số : Hệ phương trình vô nghiệm.

d) $\begin{cases} \dfrac{3s-2t}{5} + \dfrac{5s-3t}{3} = s + 1 \\ \dfrac{2s-3t}{3} + \dfrac{4s-3t}{2} = t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9s - 6t + 25s - 15t = 15s + 15 \\ 4s - 6t + 12s - 9t = 6t + 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 19s - 21t = 15 \\ 16s - 21t = 6 \end{cases}.$$

Đáp số : (s ; t) = (3 ; 2).

28. Vì đường thẳng (d) : ax + by = –1 đi qua điểm A(–7 ; 4) nên

$$-7a + 4b = -1.$$

Mặt khác, theo giả thiết có $5a - 4b = -5$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} -7a + 4b = -1 \\ 5a - 4b = -5 \end{cases}$ với hai ẩn là a và b, ta được (a ; b) = (3 ; 5).

Đáp số : (a ; b) = (3 ; 5).

29. Để đường thẳng (d) : ax – by = 4 đi qua A(4 ; 3) và B(–6 ; –7), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a - 3b = 4 \\ -6a + 7b = 4 \end{cases}$.

Đáp số : (a ; b) = (4 ; 4).

30. a) *Cách 1.* $\begin{cases} 2(3x-2)-4=5(3y+2) \\ 4(3x-2)+7(3y+2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-4-4=15y+10 \\ 12x-8+21y+14=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y=6 \\ 12x+21y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x-30y=36 \\ 12x+21y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5y=6 \\ 51y=-44 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-5y=6 \\ y=-\dfrac{44}{51} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{43}{51} \\ y=-\dfrac{44}{51} \end{array}\right.$$

Cách 2. Đặt $3x-2=s$, $3y+2=t$, ta có

$$\begin{cases} 2s-4=5t \\ 4s+7t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s-5t=4 \\ 4s+7t=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4s-10t=8 \\ 4s+7t=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17t=-10 \\ 2s-5t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{10}{17} \\ s=\dfrac{9}{17} \end{array}\right. .$$

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 3x-2=\dfrac{9}{17} \\ 3y+2=-\dfrac{10}{17} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\dfrac{43}{17} \\ 3y=-\dfrac{44}{17} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{43}{51} \\ y=-\dfrac{44}{51} \end{array}\right. .$

Đáp số : $(x\,;\,y)=\left(\dfrac{43}{51};-\dfrac{44}{51}\right)$.

b) *Cách 1.* $\begin{cases} 3(x+y)+5(x-y)=12 \\ -5(x+y)+2(x-y)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-2y=12 \\ -3x-7y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}.$

Cách 2. Đặt $x+y=s$, $x-y=t$, ta có

$$\begin{cases} 3s+5t=12 \\ -5s+2t=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15s+25t=60 \\ -15s+6t=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=-1 \\ t=3 \end{cases}.$$

Suy ra $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}.$

Đáp số : $(x\,;\,y)=(1\,;\,-2)$.

31. *Hướng dẫn*

– Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{2(x-y)}{5} \\ \dfrac{x-3}{4} - \dfrac{y-3}{3} = 2y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20x + 20 - 15y - 30 = 24x - 24y \\ 3x - 9 - 4y + 12 = 24y - 12x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 6 \end{cases}.$$

– Thay giá trị của x và y vào phương trình $3mx - 5y = 2m + 1$ để tìm giá trị của m.

Đáp số : $m = 1$.

32. *Hướng dẫn*

– Giải hệ $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$, tìm được $(x ; y) = (5 ; -1)$.

– Thay $x = 5$, $y = -1$ vào phương trình $y = (2m - 5)x - 5m$ để tìm giá trị của m.

Đáp số : $m = 4{,}8$.

33. *Hướng dẫn*

– Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x + 11y = 8 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$, tìm được $(x ; y) = (6 ; -2)$.

– Muốn cho ba đường thẳng đồng quy thì (d_3) phải đi qua giao điểm $M(6 ; -2)$ của (d_1) và (d_2).

Đáp số : $m = 0$.

34*. a) *Hướng dẫn.* Có thể chọn trong hệ đã cho hai phương trình lập thành một hệ có nghiệm duy nhất ; chẳng hạn, hệ

$$\begin{cases} 3x + 5y = 34 \\ 4x - 5y = -13 \end{cases}.$$

Giải hệ này, tìm được nghiệm $(x_0 ; y_0)$.

– Nếu $(x_0 ; y_0)$ cũng là nghiệm của phương trình còn lại thì đó là nghiệm của hệ đã cho.

– Nếu $(x_0 ; y_0)$ không phải là nghiệm của phương trình còn lại thì hệ đã cho vô nghiệm.

Đáp số : $(x ; y) = (3 ; 5)$.

b) *Trả lời*. Vô nghiệm.

Bài tập bổ sung

4.1. a) $(3 ; -2)$; b) $(2 ; -2)$.

4.2. a) $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$.

b) $y = \sqrt{2}x - 1$.

c) Điểm N có hoành độ bằng 2 trên đường thẳng (d) : $3x - 5y = 1$ có tung độ thoả mãn điều kiện $5y = 3.2 - 1 = 5$. Suy ra $y = 1$. Như vậy đồ thị của hàm số cần tìm đi qua hai điểm $M(-2 ; 9)$ và $N(2 ; 1)$. Vì đường thẳng MN không song song với trục của hệ toạ độ nên hàm số có dạng $y = ax + b$; trong đó a, b thoả mãn các điều kiện :

$$\begin{cases} 9 = -2a + b \\ 1 = 2a + b. \end{cases}$$

Do đó $b = 5$, $a = -2$. Vậy hàm số phải tìm là $y = -2x + 5$.

4.3. Điều kiện : $x \neq -y$, $y \neq -z$, $z \neq -x$.

Từ hệ đã cho suy ra x, y, z đều khác 0. Do đó ta có hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{z+x}{zx} = \dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $w = \frac{1}{z}$, ta có hệ

$$\begin{cases} u + v = \dfrac{3}{2} \\ v + w = \dfrac{5}{6} \\ w + u = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Cộng vế với vế các phương trình trong hệ, ta được

$$u + v + w = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{6} + \frac{4}{3}\right) = \frac{11}{6}.$$

Suy ra $u = \frac{11}{6} - \frac{5}{6} = 1$; $v = \frac{11}{6} - \frac{4}{3} = \frac{1}{2}$; $w = \frac{11}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$.

Do đó x = 1, y = 2, z = 3. Vậy hệ đã cho có nghiệm là (x, y, z) = (1 ; 2 ; 3).

§5. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

35. Gọi hai số phải tìm là x, y.

Theo đầu bài, ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 59 \\ 3y - 2x = 7 \end{cases}$.

Trả lời. Hai số phải tìm là 34 và 25.

36. Gọi tuổi mẹ và tuổi con năm nay lần lượt là x, y ; $x \in \mathbf{N}^*$, $y \in \mathbf{N}^*$, x > y > 7.

Ta có phương trình x = 3y.

Trước đây bảy năm, tuổi mẹ và tuổi con lần lượt là x – 7 và y – 7. Theo đầu bài ta có phương trình x – 7 = 5(y – 7) + 4 hay x – 5y = –24.

Giải hệ $\begin{cases} x = 3y \\ x - 5y = -24 \end{cases}$, ta tìm được (x ; y) = (36 ; 12).

Trả lời. Năm nay mẹ 36 tuổi, con 12 tuổi.

37. Gọi chữ số hàng chục là x, chữ số hàng đơn vị là y ; $x \in \mathbf{N}^*$, $y \in \mathbf{N}^*$, $x \le 9$, $y \le 9$.

Số đã cho là 10x + y.

Nếu đổi chỗ hai chữ số ta được số mới là 10y + x.

Theo đầu bài, ta có hệ $\begin{cases} 10y + x - 10x - y = 63 \\ 10x + y + 10y + x = 99 \end{cases}$ hay $\begin{cases} -9x + 9y = 63 \\ 11x + 11y = 99 \end{cases}$.

Giải hệ này ta được nghiệm là x = 1, y = 8.

Trả lời. Số đã cho là 18.

38. Gọi số lãi mà anh Quang và anh Hùng được hưởng lần lượt là x, y (tính bằng triệu đồng) ; $x > 0$, $y > 0$.

Vì số lãi của cả hai anh là 7 triệu đồng nên ta có phương trình $x + y = 7$.

Vì lãi tỉ lệ với vốn đã góp nên $\frac{x}{15} = \frac{y}{13}$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 7 \\ \frac{x}{15} = \frac{y}{13} \end{cases}$, giải hệ này ta được $x = 3{,}75$ và $y = 3{,}25$.

Trả lời . Anh Quang được lãi 3 750 000 đồng,

Anh Hùng được lãi 3 250 000 đồng.

39. Gọi giá mỗi quả trứng gà là x (đồng), mỗi quả trứng vịt là y (đồng) ; $x > 0$, $y > 0$.

Hôm qua mẹ Lan mua năm quả trứng gà và năm quả trứng vịt hết

$$5x + 5y = 10000 \text{ (đồng)}.$$

Hôm nay mẹ Lan mua ba quả trứng gà và bảy quả trứng vịt hết

$$3x + 7y = 9600 \text{ (đồng)}.$$

Giải hệ $\begin{cases} 5x + 5y = 10000 \\ 3x + 7y = 9600 \end{cases}$.

Trả lời. Giá một quả trứng gà là 1100 đồng.

Giá một quả trứng vịt là 900 đồng.

40. Gọi chiều dài của sân trường là x (m) ; $x > 0$;

Gọi chiều rộng của sân trường là y (m) ; $y > 0$.

Vì chu vi sân trường bằng 340m nên $x + y = 170$ (m).

Ba lần chiều dài lớn hơn bốn lần chiều rộng là 20m. Như vậy $3x - 4y = 20$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 170 \\ 3x - 4y = 20 \end{cases}$, giải hệ này ta được $x = 100$, $y = 70$.

Trả lời. Chiều dài : 100m.

Chiều rộng : 70m.

41. Gọi giá tiền 1kg sắt ∅8 là x (đồng), $x > 0$, và khoản tiền chi cho trần tầng một là y (đồng), $y > 0$.

Khi đó giá tiền một cây sắt ∅18 là 22x (đồng), và khoản tiền chi cho trần tầng hai là $y - 1\,440\,000$ (đồng).

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 30.22x + 350x = y \\ 20.22x + 250x = y - 1\,440\,000 \end{cases}$ hay

$$\begin{cases} 1010x = y \\ 690x = y - 1\,440\,000 \end{cases}.$$

Trả lời. Giá tiền 1kg sắt ∅8 là 4500 đồng.

Giá tiền một cây sắt ∅18 là 99 000 đồng.

42. Gọi số ghế là x, số học sinh là y, ($x \in \mathbf{N}^*$, $y \in \mathbf{N}^*$).

Nếu xếp mỗi ghế ba học sinh thì số học sinh được ngồi ghế là 3x.

Vì còn sáu học sinh không có chỗ nên tổng số học sinh của lớp là $3x + 6$. Do đó có phương trình $3x + 6 = y$. (1)

Nếu xếp mỗi ghế bốn học sinh thì thừa một ghế, nghĩa là số học sinh bằng $4(x - 1)$. Do đó lại có phương trình $4(x - 1) = y$. (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được $(x ; y) = (10 ; 36)$.

Trả lời. Trong lớp có 10 ghế và 36 học sinh.

43. Gọi năng suất trên 1 ha của lúa giống mới là x (tấn), của lúa giống cũ là y (tấn) ; $x > 0$, $y > 0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 60x + 40y = 460 \\ 4y - 3x = 1 \end{cases}$.

Trả lời. Năng suất 1 ha lúa giống mới là 5 tấn.

Năng suất 1 ha lúa giống cũ là 4 tấn.

44. Gọi thời gian người thứ nhất xây một mình xong bức tường là x (giờ), thời gian người thứ hai xây một mình xong bức tường là y (giờ) ; $x > 0$, $y > 0$.

Coi toàn bộ công việc như một đơn vị công việc.

Trong 1 giờ người thứ nhất xây được $\frac{1}{x}$ (bức tường),

người thứ hai xây được $\frac{1}{y}$ (bức tường).

Vì cả hai người cùng xây thì trong 7 giờ 12 phút hay $\frac{36}{5}$ giờ họ xây xong bức tường nên trong 1 giờ cả hai người xây được $\frac{5}{36}$ (bức tường).

Do đó ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{36}$. (1)

Nếu người thứ nhất xây trong 5 giờ và người thứ hai xây trong 6 giờ thì họ xây được

$$\frac{5}{x} + \frac{6}{y} = \frac{3}{4} \text{ (bức tường).} \qquad (2)$$

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được (x ; y) = (12 ; 18).

Trả lời. Người thứ nhất xây một mình trong 12 giờ thì xong bức tường.

Người thứ hai xây một mình trong 18 giờ thì xong bức tường.

45. Gọi thời gian người thứ nhất làm một mình xong công việc là x (ngày), $x > 0$; thời gian người thứ hai làm một mình xong công việc là y (ngày), $y > 0$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{10}{x} + \frac{1}{y} = 1. \end{cases}$

Giải hệ ta được (x ; y) = (12 ; 6).

Trả lời. Người thứ nhất làm một mình trong 12 ngày thì xong việc.

Người thứ hai làm một mình trong 6 ngày thì xong việc.

46. Gọi thời gian một cần cẩu lớn làm một mình xong việc là x (giờ), $x > 0$;

Gọi thời gian một cần cẩu bé làm một mình xong việc là y (giờ), $y > 0$.

Theo đầu bài hai cần cẩu lớn làm trong 6 giờ, còn năm cần cẩu bé làm trong 3 giờ thì xong việc. Do đó ta có phương trình $\frac{12}{x} + \frac{15}{y} = 1.$ (1)

Nếu bảy cần cẩu cùng làm từ đầu thì trong 4 giờ xong việc. Do đó ta lại có phương trình $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4}.$ (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được (x ; y) = (24 ; 30).

Trả lời. Một cần cẩu lớn làm một mình trong 24 giờ thì xong việc.

Một cần cẩu bé làm một mình trong 30 giờ thì xong việc.

47. Gọi vận tốc của bác Toàn là x (km/h), x > 0 ; vận tốc của cô Ba Ngần là y (km/h), y > 0.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 1,5x + 2y = 38 \\ \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}y = 38 - 10,5 \end{cases}.$

Trả lời. Vận tốc của bác Toàn là 12km/h.

Vận tốc của cô Ba Ngần là 10km/h.

48. Gọi vận tốc xe khách là x (km/h), x > 0 ; vận tốc xe hàng là y (km/h), 0 < y < x.

Theo đầu bài, xe khách đi 24 phút hay $\frac{2}{5}$ giờ, còn xe hàng đi 1 giờ thì chúng gặp nhau và quãng đường dài 65km. Do đó có phương trình $\frac{2}{5}x + y = 65.$ (1)

Nếu chúng khởi hành đồng thời thì đến lúc gặp nhau xe khách đã đi nhiều hơn xe hàng 65km. Sau khi đi được 13 giờ thì chúng gặp nhau nên có phương trình $13x - 13y = 65.$ (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được (x ; y) = (50 ; 45).

Trả lời. Vận tốc xe khách là 50km/h.

Vận tốc xe hàng là 45km/h.

49. Gọi số thợ cần thiết là x (người), $x \in \mathbf{N}^*$, thời gian cần thiết là y (ngày), y > 0.

Coi toàn bộ công việc như một đơn vị công việc, thì một người thợ trong 1 ngày làm được $\frac{1}{xy}$ (công việc).

Nếu giảm đi ba người thì thời gian kéo dài thêm 6 ngày. Như vậy x – 3 người làm trong y + 6 ngày thì được $(x-3)(y+6)\frac{1}{xy} = 1$ (toàn bộ công việc).

Tương tự nếu tăng thêm hai người thì chỉ cần y – 2 ngày. Như vậy x + 2 người làm trong y – 2 ngày được $(x+2)(y-2)\frac{1}{xy} = 1$.

Tóm lại ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-3)(y+6) = xy \\ (x+2)(y-2) = xy\end{cases}.$$

Giải hệ này ta được (x ; y) = (8 ; 10).

Trả lời. 8 người và 10 ngày.

50. (h.3) Theo giả thiết EB = 2x (cm), x > 0. Ta có AE = y – 2x (cm),

$AG = AD + DG = y + \frac{3}{2}EB = y + \frac{3}{2}.2x = y + 3x$ (cm).

Do đó diện tích hình chữ nhật GAEF bằng AE.AG = (y – 2x)(y + 3x).

Theo đầu bài $(y-2x)(y+3x) = y^2$ hay $xy - 6x^2 = 0$. Vì x > 0 nên y – 6x = 0. (1)

Mặt khác, $FC = \sqrt{EB^2 + DG^2} = \sqrt{4x^2 + 9x^2} = x\sqrt{13}$.

Do đó chu vi của ngũ giác ABCFG bằng

$3y + x\sqrt{13} + (y - 2x) + 3x =$

$= x(1 + \sqrt{13}) + 4y.$

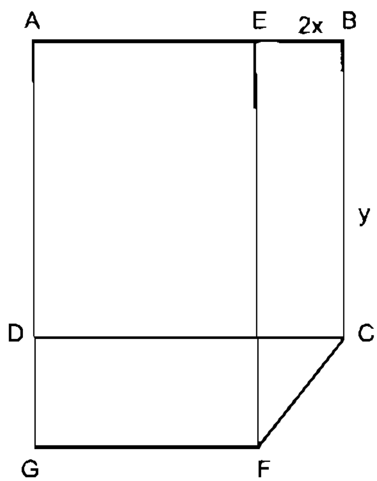
Theo đầu bài, ta có phương trình

$x(1 + \sqrt{13}) + 4y = 100 + 4\sqrt{13}$. (2)

Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2) ta được

(x ; y) = (4 ; 24).

Trả lời. x = 4cm, y = 24cm.



Hình 3

Bài tập bổ sung

5.1. Gọi tuổi của tôi năm nay là x (tuổi), x nguyên, dương.

Thế thì tuổi của em tôi hiện nay là $26 - x$ (tuổi).

Khi mà tổng số tuổi của chúng tôi bằng 5 lần tuổi của tôi hiện nay chính là khi mà tổng số tuổi của chúng tôi bằng 5x.

Vì $26 - x < x$ hay $26 < 2x$ nên phải thêm một số năm nữa, chẳng hạn là thêm y năm nữa, y nguyên, dương thì tổng số tuổi của hai chúng tôi mới bằng 5x.

Khi đó tuổi của tôi là $x + y$ và tuổi của em tôi là $26 - x + y$.

Theo đầu bài ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + 26 - x + y = 5x \\ x + y = 3(26 - x) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 5x - 2y = 26 \\ 4x + y = 78. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x = 14$, $y = 22$.

Vậy hiện nay tuổi tôi là 14 và tuổi em tôi là 12.

5.2. Ta gọi vận tốc của người đi xe đạp là y km/phút và vận tốc của xe khách là z km/phút.

Xét trường hợp các xe khách đi cùng chiều với người đi xe đạp.

Giả sử khi xe khách thứ nhất vượt người đi xe đạp tại điểm B thì xe thứ hai ở điểm A. Như vậy quãng đường AB là quãng đường mà xe khách phải đi trong x phút và $AB = xz$ (km).

Gọi điểm mà xe thứ hai vượt người đi xe đạp là C thì quãng đường BC là quãng đường người đi xe đạp đi trong 15 phút ; tức là $BC = 15y$ (km). Quãng đường AC là quãng đường xe khách đi trong 15 phút nên $AC = 15z$ (km). Ta có phương trình :

$$15z = xz + 15y. \qquad (1)$$

Xét trường hợp các xe khách đi ngược chiều với người đi xe đạp.

Giả sử khi người đi xe đạp gặp xe khách thứ nhất đi ngược chiều tại M thì xe khách thứ hai đi ngược chiều đang ở điểm N. Quãng đường $MN = xz$ (km).

Sau đó 10, phút người đi xe đạp gặp xe khách thứ hai. Do đó ta có phương trình :

$$10y + 10z = xz. \qquad (2)$$

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} xz + 15y = 15z \\ xz - 10y = 10z \end{cases}$ hay $\begin{cases} x + 15\dfrac{y}{z} = 15 \\ x - 10\dfrac{y}{z} = 10. \end{cases}$

Giải hệ này ta được $\dfrac{y}{z} = \dfrac{1}{5}$ hay $z = 5y$, $x = 12$.

Vậy cứ 12 phút lại có một chuyến xe khách xuất phát từ bến và vận tốc của xe khách bằng 5 lần vận tốc của người đi xe đạp.

Bài tập ôn chương III

51. a) $\begin{cases} 4x + y = -5 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x - 5 \\ 3x + 8x + 10 = -12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -4x - 5 \\ 11x = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}.$

b) $\begin{cases} x + 3y = 4y - x + 5 \\ 2x - y = 3x - 2(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ -x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$

c) $\begin{cases} 3(x + y) + 9 = 2(x - y) \\ 2(x + y) = 3(x - y) - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5y = -9 \\ -x + 5y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$

d) $\begin{cases} 2(x + 3) = 3(y + 1) + 1 \\ 3(x - y + 1) = 2(x - 2) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ x - 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$

52. a) $\begin{cases} \sqrt{3}x - 2\sqrt{2}y = 7 \\ \sqrt{2}x + 3\sqrt{3}y = -2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6}x - 4y = 7\sqrt{2} \\ \sqrt{6}x + 9y = -6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases};$

b) $\begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x - (2 - \sqrt{3})y = 2 \\ (2 + \sqrt{3})x + (\sqrt{2} - 1)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)x - (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{3})y = 2(\sqrt{2} - 1) \\ (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})x + (2 - \sqrt{3})(\sqrt{2} - 1)y = 2(2 - \sqrt{3}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - (\sqrt{2} - 1)(2 - \sqrt{3})y = 2(\sqrt{2} - 1) \\ x + (2 - \sqrt{3})(\sqrt{2} - 1)y = 2(2 - \sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} - \sqrt{3} + 1 \\ y = \sqrt{2} - \sqrt{3} - 1 \end{cases}.$

53. Vì hệ phương trình có nghiệm (3 ; −2) nên

$$\begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ 6a + 6b = 36 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ a + b = 6 \end{cases}.$$

Đáp số : a = 3 = b.

54. Gọi chữ số hàng đơn vị là x, chữ số hàng chục là y ; x, y là những số nguyên dương không lớn hơn 9.

Theo đầu bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y - 5x = 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Đáp số : Số phải tìm là 83.

55. Gọi lượng hàng cần vận chuyển là x (tấn), x > 0 ; số toa tàu là y (toa), $y \in \mathbf{N}^*$.

Theo đầu bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 15y = x - 3 \\ 16y = x + 5 \end{cases}.$$

Đáp số : 8 toa xe và 123 tấn hàng.

56. Gọi thời gian đội thứ nhất làm một mình xong việc là x (ngày), x > 0 ; thời gian đội thứ hai làm một mình xong việc là y (ngày), y > 0.

Mỗi ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc) ;

đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

Theo đầu bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{8}{12} + \dfrac{7}{x} = 1 \end{cases}.$$

Đáp số : Đội thứ nhất làm một mình trong 21 ngày thì xong việc.

Đội thứ hai làm một mình trong 28 ngày thì xong việc.

57. Gọi vận tốc của xe thứ nhất là x (km/h), $x > 0$; vận tốc của xe thứ hai là y (km/h), $y > 0$.

Nếu xe thứ nhất đi trước xe thứ hai 3 giờ 45 phút thì đến lúc hai xe gặp nhau nó đã đi được 11 giờ 45 phút hay $\frac{47}{4}$ giờ.

Theo đầu bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 10x + 10y = 750 \\ \dfrac{47}{4}x + 8y = 750 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x + y = 75 \\ 47x + 32y = 3000 \end{cases}$$

Đáp số : Vận tốc của xe thứ nhất là 40 km/h.

Vận tốc của xe thứ hai là 35 km/h.

Bài tập bổ sung

III.1. a) (3 ; 1) ; b) (7 ; 6).

III.2. Trên cánh đồng thứ nhất thu được 390 tấn.

Trên cánh đồng thứ hai thu được 240 tấn.

III.3. Gọi khối lượng quặng loại thứ nhất là x tấn, loại thứ hai là y tấn, $x > 0$, $y > 0$.

Ta có hệ phương trình :
$$\begin{cases} \dfrac{72}{100}x + \dfrac{58}{100}y = \dfrac{62}{100}(x + y) \\ \dfrac{72}{100}(x + 15) + \dfrac{58}{100}(y + 15) = \dfrac{63,25}{100}(x + y + 30) \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 5(x + 15) = 3(y + 15). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được : (x ; y) = (12 ; 30).

Vậy khối lượng loại thứ nhất là 12 tấn, loại thứ hai là 30 tấn.

III.4*. Giả sử khoảng cách AB = d (km).

Gọi vận tốc của người đi bộ là x km/h, $x > 0$.

Theo đầu bài, người đi ngựa đi quãng đường AB hết $\frac{5}{6}$ giờ. Do đó vận tốc của người đi ngựa là $d : \frac{5}{6} = \frac{6d}{5}$ (km/h).

Người đi ngựa đến trước người đi bộ $\frac{5}{6}$ giờ. Điều đó có nghĩa là

$$\frac{d}{x} - \frac{d}{\frac{6}{5}d} = \frac{5}{6} \text{ hay } 5x = 3d. \qquad (1)$$

Từ đó cũng suy ra $\frac{6}{5}d = 2x$; nghĩa là vận tốc của người đi ngựa là 2x km/h.

Vì người đi ngựa khi quay lại gặp người đi bộ ở điểm cách B một khoảng là 2 km nên :

$$\frac{d-2}{x} = \frac{d+2}{2x} \quad \text{hay} \quad 2d - 4 = d + 2. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5x = 3d \\ 2d - 4 = d + 2. \end{cases}$

Giải hệ này ta được d = 6, x = 3,6.

Vậy : khoảng cách AB = d = 6 km,

vận tốc của người đi bộ là 3,6 km/h,

vận tốc của người đi ngựa là 7,2 km/h.

Chương IV

HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$
PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. ĐỀ BÀI

§1. Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

1. Biết rằng hình lập phương có sáu mặt đều là hình vuông. Giả sử x là độ dài của cạnh hình lập phương.

a) Biểu diễn diện tích toàn phần S (tức là tổng diện tích của sáu mặt) của hình lập phương qua x.

b) Tính các giá trị của S ứng với các giá trị của x cho trong bảng dưới đây rồi điền vào các ô trống.

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
S						

c) Nhận xét sự tăng, giảm của S khi x tăng.

d) Khi S giảm đi 16 lần thì cạnh x tăng hay giảm bao nhiêu lần ?

e) Tính cạnh của hình lập phương : khi $S = \frac{27}{2}$ cm^2 ; khi $S = 5cm^2$.

2. Cho hàm số $y = 3x^2$.

a) Lập bảng tính các giá trị của y ứng với các giá trị của x lần lượt bằng : $-2 ; -1 ; -\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{1}{3} ; 1 ; 2$.

b) Trên mặt phẳng toạ độ xác định các điểm mà hoành độ là giá trị của x còn tung độ là giá trị tương ứng của y đã tìm ở câu a), (chẳng hạn, điểm $A\left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$).

3. Cho hàm số $y = -3x^2$.

Hãy làm hai câu a), b) như ở bài toán 2.

4. Cho hàm số $y = f(x) = -1,5x^2$.

a) Hãy tính f(1), f(2), f(3) rồi sắp xếp ba giá trị này theo thứ tự từ lớn đến bé.

b) Tính f(−3), f(−2), f(−1) rồi sắp xếp ba số này theo thứ tự từ bé đến lớn.

c) Phát biểu nhận xét của em về sự đồng biến hay nghịch biến của hàm số này khi $x > 0$; khi $x < 0$.

5. ***Đố.*** Một hòn bi lăn trên một mặt phẳng nghiêng. Đoạn đường đi được liên hệ với thời gian bởi công thức $y = at^2$, t tính bằng giây, y tính bằng mét. Kết quả kiểm nghiệm được cho bởi bảng sau :

t	0	1	2	3	4	5	6
y	0	0,24	1		4		

a) Biết rằng chỉ có một lần đo không cẩn thận, hãy xác định hệ số a và đố em biết lần đo nào không cẩn thận.

b) Có một thời điểm dừng hòn bi lại nhưng quên không tính thời gian, tuy nhiên đo được đoạn đường đi được của hòn bi (kể từ điểm xuất phát đến điểm dừng) là 6,25m. Đố em biết lần ấy hòn bi đã lăn bao lâu ?

c) Hãy điền tiếp vào các ô trống còn lại ở bảng trên.

6. Biết rằng nhiệt lượng toả ra trên dây dẫn được tính bởi công thức

$$Q = 0,24RI^2t,$$

trong đó Q là nhiệt lượng tính bằng calo, R là điện trở tính bằng ôm (Ω), I là cường độ dòng điện tính bằng ampe (A), t là thời gian tính bằng giây (s).

Dòng điện chạy qua một dây dẫn có điện trở R = 10Ω trong thời gian 1 giây.

a) Hãy điền các số thích hợp vào bảng sau :

I (A)	1	2	3	4
Q (calo)				

b) Hỏi cường độ của dòng điện là bao nhiêu thì nhiệt lượng toả ra bằng 60 calo ?

Bài tập bổ sung

1.1. Một bể nước hình hộp chữ nhật có đáy hình vuông cạnh bằng x mét. Chiều cao của bể bằng 2 m. Kí hiệu V(x) là thể tích của bể.

a) Tính thể tích V(x) theo x.

b) Giả sử chiều cao của bể không đổi, hãy tính V(1), V(2), V(3). Nhận xét khi x tăng lên 2 lần, 3 lần thì thể tích tương ứng của bể tăng lên mấy lần ?

1.2. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. Vì sao với hai giá trị đối nhau của x thì hai giá trị tương ứng của hàm số lại bằng nhau ?

1.3. Cho một nửa đường tròn đường kính AB. Điểm M chạy trên nửa đường tròn. Kẻ MH vuông góc với AB tại H. Đặt MH = x.

a) Chứng minh rằng hai tam giác AHM và MHB đồng dạng.

b) Chứng minh rằng $AH.BH = MH^2$.

c) Khi M chuyển động thì x thay đổi, do đó tích AH.BH cũng thay đổi theo. Kí hiệu tích AH.BH bởi P(x). Hỏi P(x) có phải là một hàm số của biến số x hay không ? Viết công thức biểu thị hàm số này.

§2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

7. Cho hàm số $y = 0,1x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Các điểm sau có thuộc đồ thị hay không : A(3 ; 0,9), B(−5 ; 2,5), C(−10 ; 1) ?

8. Cho hàm số $y = ax^2$. Xác định hệ số a trong các trường hợp sau :

a) Đồ thị của nó đi qua điểm A(3 ; 12) ;

b) Đồ thị của nó đi qua điểm B(−2 ; 3).

9. Cho hàm số $y = 0,2x^2$.

a) Biết rằng điểm A(−2 ; b) thuộc đồ thị, hãy tính b. Điểm A'(2 ; b) có thuộc đồ thị của hàm số không ? Vì sao ?

b) Biết rằng điểm C(c ; 6) thuộc đồ thị, hãy tính c. Điểm D(c ; −6) có thuộc đồ thị không ? Vì sao ?

10. Cho hai hàm số $y = 0,2x^2$ và $y = x$.

a) Vẽ hai đồ thị của những hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm toạ độ của các giao điểm của hai đồ thị.

11. Cho hàm số $y = ax^2$.

a) Xác định hệ số a biết rằng đồ thị của nó cắt đường thẳng $y = -2x + 3$ tại điểm A có hoành độ bằng 1.

b) Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x + 3$ và của hàm số $y = ax^2$ với giá trị của a vừa tìm được trong câu a) trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

c) Nhờ đồ thị xác định toạ độ của giao điểm thứ hai của hai đồ thị vừa vẽ trong câu b).

12. Cho hàm số $y = \frac{3}{4}x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tìm trên đồ thị điểm A có hoành độ bằng –2. Bằng đồ thị, tìm tung độ của A.

c) Tìm trên đồ thị các điểm có tung độ bằng 4. Tính gần đúng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) hoành độ của những điểm này bằng hai cách :

– Ước lượng trên đồ thị ;

– Tính theo công thức $y = \frac{3}{4}x^2$.

13. Cho hàm số $y = f(x) = -1,5x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số.

b) Không làm tính, dùng đồ thị để so sánh $f(-1,5)$ và $f(-0,5)$, $f(0,75)$ và $f(1,5)$.

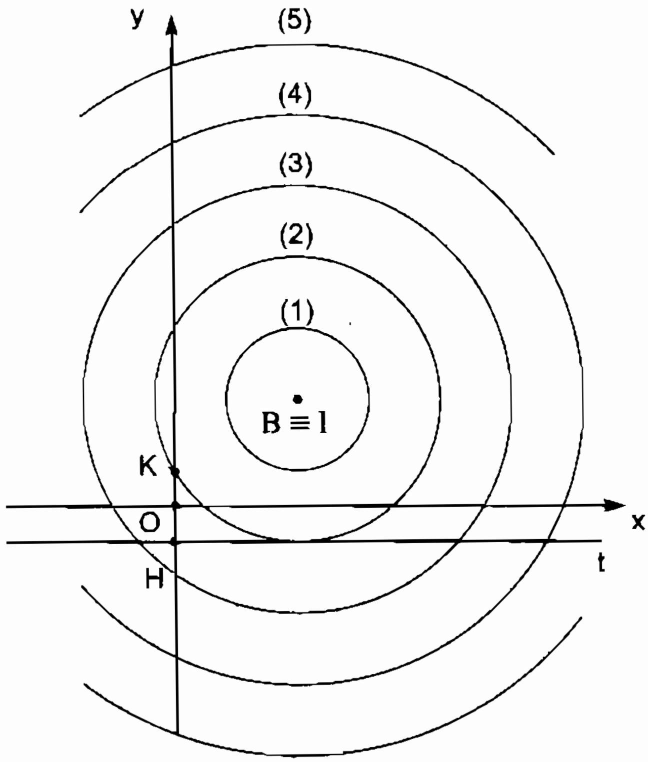
c) Dùng đồ thị, tìm những giá trị thích hợp điền vào các chỗ (...) :

Khi $1 \le x \le 2$ thì $... \le y \le ...$;

Khi $-2 \le x \le 0$ thì $... \le y \le ...$;

Khi $-2 \le x \le 1$ thì $... \le y \le ...$.

14. *Chơi mà học :* Vẽ parabol.



Hình 4

Trên một tờ giấy có kẻ dòng, chọn khoảng cách giữa hai dòng làm đơn vị độ dài, vẽ 5 đường tròn cùng tâm I có bán kính lần lượt bằng 1, 2, 3, 4, 5 (đơn vị độ dài). Đánh dấu các đường tròn này theo thứ tự là (1), (2), (3), (4), (5). Trên một tờ giấy kính, kẻ hệ trục toạ độ Oxy, trên tia Oy lấy điểm K sao cho $OK = \frac{1}{2}$ (đơn vị độ dài nói trên). Lấy điểm $H\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Qua H kẻ đường thẳng Ht//Ox.

– Đặt tờ giấy kính lên tờ giấy đã vẽ năm đường tròn sao cho đường tròn (1) đi qua K và tiếp xúc với Ht và tâm I nằm bên phải Oy. Trên tờ giấy kính, đánh dấu vào chỗ điểm I xuất hiện và kí hiệu là điểm A.

– Di chuyển tờ giấy kính sang trái sao cho đường tròn (2) đi qua K và tiếp xúc với Ht. Trên tờ giấy kính, đánh dấu vào chỗ điểm I xuất hiện và kí hiệu là điểm B (Xem hình 4).

– Tiếp tục làm như thế đối với các đường tròn còn lại ta lần lượt được các điểm C, D, E trên tờ giấy kính.

– Lấy các điểm A', B', C', D', E' lần lượt đối xứng với các điểm A, B, C, D, E qua Oy.

– Nối các điểm E', D', C', B', A', O, A, B, C, D, E bởi một đường cong ta được một parabol.

Bài tập bổ sung

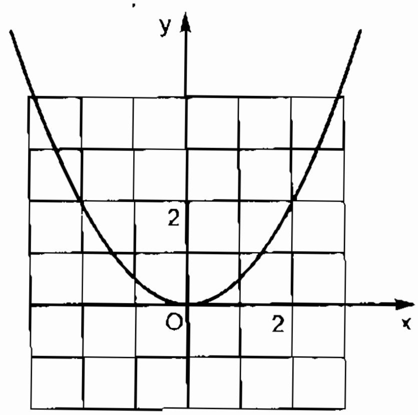
2.1. Parabol $y = ax^2$ trong hình vẽ có hệ số a là bao nhiêu ?

(A) 1 ;

(B) –1 ;

(C) 2 ;

(D) $\frac{1}{2}$.



Hình bs.1

2.2. Cho hàm số $y = 0{,}5x^2$.

a) Tìm các giá trị của x để $y < 2$.

b) Tìm các giá trị của x để $y > 2$.

c) Tìm các giá trị của y khi $-2 < x < 2$.

d) Tìm các giá trị của y khi $x \le 0$.

e) Tìm các giá trị của y khi $x \le 2$.

2.3. a) Xác định hàm số $y = ax^2$ và vẽ đồ thị của nó, biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm A(–1 ; 2).

b) Xác định đường thẳng $y = a'x + b'$ biết rằng đường thẳng này cắt đồ thị của hàm số vừa tìm được trong câu a) tại điểm A và điểm B có tung độ là 8.

§3. Phương trình bậc hai một ẩn

15. Giải các phương trình :

a) $7x^2 - 5x = 0$;

b) $-\sqrt{2}\,x^2 + 6x = 0$;

c) $3{,}4x^2 + 8{,}2x = 0$;

d) $-\frac{2}{5}x^2 - \frac{7}{3}x = 0$.

16. Giải các phương trình :

a) $5x^2 - 20 = 0$;　　b) $-3x^2 + 15 = 0$;

c) $1,2x^2 - 0,192 = 0$;　　d) $1172,5x^2 + 42,18 = 0$.

17. Giải các phương trình :

a) $(x-3)^2 = 4$;　　b) $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 - 3 = 0$;

c) $(2x - \sqrt{2})^2 - 8 = 0$;　　d) $(2,1x - 1,2)^2 - 0,25 = 0$.

18. Giải các phương trình sau bằng cách biến đổi chúng thành những phương trình với vế trái là một bình phương còn vế phải là một hằng số :

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$;　　b) $x^2 - 3x - 7 = 0$;

c) $3x^2 - 12x + 1 = 0$;　　d) $3x^2 - 6x + 5 = 0$.

19. Nhận thấy rằng phương trình tích $(x+2)(x-3) = 0$, hay phương trình bậc hai $x^2 - x - 6 = 0$, có hai nghiệm là $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Tương tự, hãy lập những phương trình bậc hai mà nghiệm của mỗi phương trình là một trong những cặp số sau :

a) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$;　　b) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$;

c) $x_1 = 0,1$, $x_2 = 0,2$;　　d) $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Bài tập bổ sung

3.1. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và xác định các hệ số a, b, c :

a) $4x^2 + 2x = 5x - 7$;　　b) $5x - 3 + \sqrt{5}x^2 = 3x - 4 + x^2$;

c) $mx^2 - 3x + 5 = x^2 - mx$;　　d) $x + m^2x^2 + m = x^2 + mx + m + 2$.

3.2. Giải các phương trình sau bằng cách biến đổi chúng thành những phương trình với vế trái là một bình phương còn vế phải là một hằng số :

a) $x^2 - 3x + 1 = 0$;　　b) $x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$;

c) $5x^2 - 7x + 1 = 0$;　　d) $3x^2 + 2\sqrt{3}x - 2 = 0$.

3.3. Tìm b, c để phương trình $x^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là những số dưới đây :

a) $x_1 = -1$ và $x_2 = 2$; b) $x_1 = -5$ và $x_2 = 0$;

c) $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ và $x_2 = 1 - \sqrt{2}$; d) $x_1 = 3$ và $x_2 = -\frac{1}{2}$.

3.4. Tìm a, b, c để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = -2$ và $x_2 = 3$.

Có thể tìm được bao nhiêu bộ ba số a, b, c thoả mãn yêu cầu của bài toán ?

§4. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

20. Xác định các hệ số a, b, c ; tính biệt thức Δ rồi tìm nghiệm của các phương trình :

a) $2x^2 - 5x + 1 = 0$; b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;

c) $5x^2 - x + 2 = 0$; d) $-3x^2 + 2x + 8 = 0$.

21. Xác định các hệ số a, b, c rồi giải phương trình :

a) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$; b) $2x^2 - (1 - 2\sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0$;

c) $\frac{1}{3}x^2 - 2x - \frac{2}{3} = 0$; d) $3x^2 + 7{,}9x + 3{,}36 = 0$.

22. Giải phương trình bằng đồ thị.

Cho phương trình $2x^2 + x - 3 = 0$.

a) Vẽ các đồ thị của hai hàm số : $y = 2x^2$, $y = -x + 3$ trong cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm hoành độ của mỗi giao điểm của hai đồ thị. Hãy giải thích vì sao các hoành độ này đều là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Giải phương trình đã cho bằng công thức nghiệm, so sánh với kết quả tìm được trong câu b).

23. Cho phương trình $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ và $y = 2x - 1$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ. Dùng đồ thị tìm giá trị gần đúng nghiệm của phương trình (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

b) Giải phương trình đã cho bằng công thức nghiệm, so sánh với kết quả tìm được trong câu a).

24. Đối với mỗi phương trình sau, hãy tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm kép :

a) $mx^2 - 2(m-1)x + 2 = 0$; b) $3x^2 + (m+1)x + 4 = 0$.

25. Đối với mỗi phương trình sau, hãy tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm ; tính nghiệm của phương trình theo m :

a) $mx^2 + (2m-1)x + m + 2 = 0$; b) $2x^2 - (4m+3)x + 2m^2 - 1 = 0$.

26. Vì sao khi phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có các hệ số a và c trái dấu thì nó có nghiệm ?

Áp dụng. Không tính Δ, hãy giải thích vì sao mỗi phương trình sau có nghiệm :

a) $3x^2 - x - 8 = 0$; b) $2004x^2 + 2x - 1185\sqrt{5} = 0$;

c) $3\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$; d) $2010x^2 + 5x - m^2 = 0$.

Bài tập bổ sung

4.1. Giải các phương trình sau bằng hai cách (chuyển số hạng tự do sang vế phải ; bằng công thức nghiệm) và so sánh kết quả tìm được :

a) $4x^2 - 9 = 0$; b) $5x^2 + 20 = 0$;

c) $2x^2 - 2 + \sqrt{3} = 0$; d) $3x^2 - 12 + \sqrt{145} = 0$.

4.2. Giải các phương trình sau bằng hai cách (giải phương trình tích ; bằng công thức nghiệm) và so sánh kết quả tìm được :

a) $5x^2 - 3x = 0$; b) $3\sqrt{5}x^2 + 6x = 0$;

c) $2x^2 + 7x = 0$; d) $2x^2 - \sqrt{2}x = 0$.

4.3. Giải các phương trình :

a) $x^2 = 14 - 5x$; b) $3x^2 + 5x = x^2 + 7x - 2$;

c) $(x+2)^2 = 3131 - 2x$; d) $\dfrac{(x+3)^2}{5} + 1 = \dfrac{(3x-1)^2}{5} + \dfrac{x(2x-3)}{2}$.

4.4*. Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^2 + bx + c = x$ ($a \neq 0$) vô nghiệm thì phương trình $a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x$ cũng vô nghiệm.

§5. Công thức nghiệm thu gọn

27. Xác định a, b', c trong mỗi phương trình, rồi giải phương trình bằng công thức nghiệm thu gọn :

a) $5x^2 - 6x - 1 = 0$; b) $-3x^2 + 14x - 8 = 0$;

c) $-7x^2 + 4x = 3$; d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$.

28. Với những giá trị nào của x thì giá trị của hai biểu thức bằng nhau :

a) $x^2 + 2 + 2\sqrt{2}$ và $2(1 + \sqrt{2})x$; b) $\sqrt{3}x^2 + 2x - 1$ và $2\sqrt{3}x + 3$;

c) $-2\sqrt{2}x - 1$ và $\sqrt{2}x^2 + 2x + 3$; d) $x^2 - 2\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ và $2x^2 + 2x + \sqrt{3}$;

e) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{3}$ và $-x^2 - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{5} + 1$?

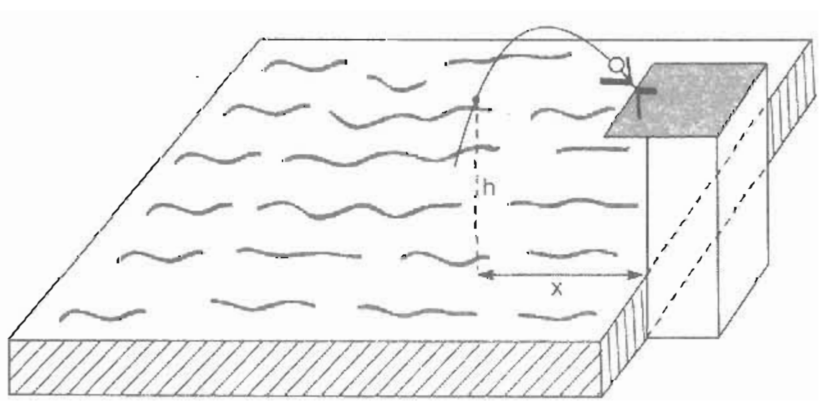
29. Một vận động viên bơi lội nhảy cầu (xem hình 5). Khi nhảy, độ cao h từ người đó tới mặt nước (tính bằng mét) phụ thuộc vào khoảng cách x từ điểm rơi đến chân cầu (tính bằng mét) bởi công thức :

$$h = -(x - 1)^2 + 4.$$

Hỏi khoảng cách x bằng bao nhiêu

a) Khi vận động viên ở độ cao 3m ?

b) Khi vận động viên chạm mặt nước ?



Hình 5

30. Tính gần đúng nghiệm của phương trình (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) :

a) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;   b) $6x^2 - 10x - 1 = 0$;

c) $5x^2 + 24x + 9 = 0$;   d) $16x^2 - 10x + 1 = 0$.

31. Với giá trị nào của x thì giá trị của hai hàm số bằng nhau :

a) $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = 2x - 3$;   b) $y = -\frac{1}{2}x^2$ và $y = x - 8$?

32. Với giá trị nào của m thì :

a) Phương trình $2x^2 - m^2x + 18m = 0$ có một nghiệm $x = -3$;

b) Phương trình $mx^2 - x - 5m^2 = 0$ có một nghiệm $x = -2$?

33. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt :

a) $x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 3 = 0$;   b) $(m + 1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0$?

34. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm kép :

a) $5x^2 + 2mx - 2m + 15 = 0$;   b) $mx^2 - 4(m - 1)x - 8 = 0$?

Bài tập bổ sung

5.1. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có $\Delta' = 0$. Điều nào sau đây là đúng ?

(A) $x_1 = x_2 = \frac{b}{2a}$;   (B) $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$;

(C) $x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$;   (D) $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{2a}$.

5.2. Tìm mối liên hệ giữa a, b, c để phương trình $(b^2 + c^2)x^2 - 2acx + a^2 - b^2 = 0$ có nghiệm.

5.3*. Chứng tỏ rằng phương trình

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$$

luôn có nghiệm.

§6. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

35. Giải phương trình rồi kiểm nghiệm hệ thức Vi-ét :

a) $3x^2 - 2x - 5 = 0$; b) $5x^2 + 2x - 16 = 0$;

c) $\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{16}{3} = 0$; d) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = 0$.

36. Không giải phương trình, dùng hệ thức Vi-ét, hãy tính tổng và tích các nghiệm của mỗi phương trình :

a) $2x^2 - 7x + 2 = 0$; b) $2x^2 + 9x + 7 = 0$;

c) $(2-\sqrt{3})x^2 + 4x + 2 + \sqrt{2} = 0$; d) $1,4x^2 - 3x + 1,2 = 0$;

e) $5x^2 + x + 2 = 0$.

37. Tính nhẩm nghiệm của phương trình :

a) $7x^2 - 9x + 2 = 0$; b) $23x^2 - 9x - 32 = 0$;

c) $1975x^2 + 4x - 1979 = 0$; d) $(5 + \sqrt{2})x^2 + (5 - \sqrt{2})x - 10 = 0$;

e) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{11}{6} = 0$; f) $31,1x^2 - 50,9x + 19,8 = 0$.

38. Dùng hệ thức Vi-ét để tính nhẩm nghiệm của phương trình :

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$; b) $x^2 - 12x + 32 = 0$; c) $x^2 + 6x + 8 = 0$;

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$; e) $x^2 + 3x - 10 = 0$.

39. a) Chứng tỏ rằng phương trình $3x^2 + 2x - 21 = 0$ có một nghiệm là -3. Hãy tìm nghiệm kia.

b) Chứng tỏ rằng phương trình $-4x^2 - 3x + 115 = 0$ có một nghiệm là 5. Tìm nghiệm kia.

40. Dùng hệ thức Vi-ét để tìm nghiệm x_2 của phương trình rồi tìm giá trị của m trong mỗi trường hợp sau :

a) Phương trình $x^2 + mx - 35 = 0$, biết nghiệm $x_1 = 7$;

b) Phương trình $x^2 - 13x + m = 0$, biết nghiệm $x_1 = 12,5$;

c) Phương trình $4x^2 + 3x - m^2 + 3m = 0$, biết nghiệm $x_1 = -2$;

d) Phương trình $3x^2 - 2(m - 3)x + 5 = 0$, biết nghiệm $x_1 = \frac{1}{3}$.

41. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau :

a) $u + v = 14$, $uv = 40$; b) $u + v = -7$, $uv = 12$;

c) $u + v = -5$, $uv = -24$; d) $u + v = 4$, $uv = 19$;

e) $u - v = 10$, $uv = 24$; f) $u^2 + v^2 = 85$, $uv = 18$.

42. Lập phương trình có hai nghiệm là hai số được cho trong mỗi trường hợp sau :

a) 3 và 5 ; b) – 4 và 7 ; c) – 5 và $\frac{1}{3}$;

d) 1,9 và 5,1 ; e) 4 và $1 - \sqrt{2}$; f) $3 - \sqrt{5}$ và $3 + \sqrt{5}$.

43. Cho phương trình $x^2 + px - 5 = 0$ có nghiệm là x_1 và x_2. Hãy lập phương trình có hai nghiệm là hai số được cho trong mỗi trường hợp sau :

a) $-x_1$ và $-x_2$; b) $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$.

44. Cho phương trình $x^2 - 6x + m = 0$. Tính giá trị của m, biết rằng phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 4$.

Bài tập bổ sung

6.1. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$. Điều nào sau đây là đúng ?

(A) $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$; (B) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = -\frac{c}{a}$;

(C) $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$, $x_1x_2 = -\frac{c}{a}$; (D) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

6.2. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$. Hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $x_1 + x_2$, x_1x_2.

6.3. Dùng định lí Vi-ét, hãy chứng tỏ rằng nếu tam thức $ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì nó phân tích được thành

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Áp dụng :

Phân tích các tam thức sau thành tích :

a) $x^2 - 11x + 30$; b) $3x^2 + 14x + 8$;

c) $5x^2 + 8x - 4$; d) $x^2 - (1 + 2\sqrt{3})x - 3 + \sqrt{3}$.

6.4*. Cho phương trình

$$(2m - 1)x^2 - 2(m + 4)x + 5m + 2 = 0 \ (m \neq \frac{1}{2}).$$

a) Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm.

b) Khi phương trình có nghiệm x_1, x_2, hãy tính tổng S và tích P của hai nghiệm theo m.

c) Tìm hệ thức giữa S và P sao cho trong hệ thức này không có m.

§7. Phương trình quy về phương trình bậc hai

45. Giải các phương trình :

a) $(x + 2)^2 - 3x - 5 = (1 - x)(1 + x)$;

b) $(x - 1)^3 + 2x = x^3 - x^2 - 2x + 1$;

c) $x(x^2 - 6) - (x - 2)^2 = (x + 1)^3$;

d) $(x + 5)^2 + (x - 2)^2 + (x + 7)(x - 7) = 12x - 23$.

46. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{12}{x - 1} - \dfrac{8}{x + 1} = 1$; b) $\dfrac{16}{x - 3} + \dfrac{30}{1 - x} = 3$;

c) $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{(x - 3)(x + 2)} = \dfrac{1}{x - 3}$; d) $\dfrac{2x}{x - 2} - \dfrac{x}{x + 4} = \dfrac{8x + 8}{(x - 2)(x + 4)}$;

e) $\dfrac{x^3 + 7x^2 + 6x - 30}{x^3 - 1} = \dfrac{x^2 - x + 16}{x^2 + x + 1}$;

f) $\dfrac{x^2 + 9x - 1}{x^4 - 1} = \dfrac{17}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

47. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích :

a) $3x^3 + 6x^2 - 4x = 0$; b) $(x + 1)^3 - x + 1 = (x - 1)(x - 2)$;

c) $(x^2 + x + 1)^2 = (4x - 1)^2$; d) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 6(x^2 + 3x + 2)$;

e) $(2x^2 + 3)^2 - 10x^3 - 15x = 0$; f) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$.

48. Giải các phương trình trùng phương :

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$; b) $y^4 - 1,16y^2 + 0,16 = 0$;

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$; d) $36t^4 - 13t^2 + 1 = 0$;

e) $\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6} = 0$; f) $\sqrt{3}x^4 - (2 - \sqrt{3})x^2 - 2 = 0$.

49. Chứng minh rằng khi a và c trái dấu thì phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ chỉ có hai nghiệm và chúng là hai số đối nhau.

50. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ :

a) $(4x - 5)^2 - 6(4x - 5) + 8 = 0$;

b) $(x^2 + 3x - 1)^2 + 2(x^2 + 3x - 1) - 8 = 0$;

c) $(2x^2 + x - 2)^2 + 10x^2 + 5x - 16 = 0$; d) $(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x + 2) = 3$;

e) $\frac{2x^2}{(x + 1)^2} - \frac{5x}{x + 1} + 3 = 0$; f) $x - \sqrt{x - 1} - 3 = 0$.

Bài tập bổ sung

7.1. Giải các phương trình :

a) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$;

b) $5 - \sqrt{3 - 2x} = |2x - 3|$.

7.2*. Cho phương trình $x + 2\sqrt{x - 1} - m^2 + 6m - 11 = 0$.

a) Giải phương trình khi m = 2.

b) Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m.

7.3*. (*Đề thi học sinh giỏi toán Bulgari – Mùa xuân 1997*)

Tìm giá trị của m để phương trình

$$[x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1)][x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)] = 0$$

có đúng ba nghiệm phân biệt.

§8. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

51. Cho một số có hai chữ số. Tổng hai chữ số của chúng bằng 10. Tích hai chữ số ấy nhỏ hơn số đã cho là 12. Tìm số đã cho.

52. Trong một phòng họp có 360 ghế được xếp thành các dãy và số ghế trong mỗi dãy đều bằng nhau. Có một lần phòng họp phải xếp thêm một dãy ghế và mỗi dãy tăng 1 ghế (số ghế trong các dãy vẫn bằng nhau) để đủ chỗ cho 400 đại biểu. Hỏi bình thường trong phòng có bao nhiêu dãy ghế ?

53. Một công ti vận tải dự định dùng loại xe lớn để chở 15 tấn rau theo một hợp đồng. Nhưng khi vào việc, công ti không còn xe lớn nên phải thay bằng những xe có trọng tải nhỏ hơn nửa tấn. Để đảm bảo thời gian đã hợp đồng, công ti phải dùng một số lượng xe nhiều hơn số xe dự định là 1 xe. Hỏi trọng tải của mỗi xe nhỏ là bao nhiêu tấn ?

54. Một tổ máy trộn bê tông phải sản xuất $450m^3$ bê tông cho một đập thuỷ lợi trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất mỗi ngày $4{,}5m^3$ nên 4 ngày trước thời hạn quy định tổ đã sản xuất được 96% công việc. Hỏi thời gian quy định là bao nhiêu ngày ?

55. Người ta trộn 8g chất lỏng này với 6g chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn là $0{,}2g/cm^3$ để được một hỗn hợp có khối lượng riêng là $0{,}7g/cm^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

56. Quãng đường Thanh Hoá – Hà Nội dài 150km. Một ôtô từ Hà Nội vào Thanh Hoá, nghỉ lại Thanh Hoá 3 giờ 15 phút, rồi trở về Hà Nội, hết tất cả 10 giờ. Tính vận tốc của ôtô lúc về, biết rằng vận tốc lúc đi lớn hơn vận tốc lúc về là 10km/h.

57. Hai sân bay Hà Nội và Đà Nẵng cách nhau 600km. Một máy bay cánh quạt từ Đà Nẵng đi Hà Nội. Sau đó 10 phút một máy bay phản lực từ Hà Nội bay đi Đà Nẵng với vận tốc lớn hơn vận tốc của máy bay cánh quạt là 300km/h. Nó đến Đà Nẵng trước khi máy bay kia đến Hà Nội 10 phút. Tính vận tốc của mỗi máy bay.

58. Hà Nội cách Nam Định 90km. Hai ôtô khởi hành đồng thời, xe thứ nhất từ Hà Nội, xe thứ hai từ Nam Định và đi ngược chiều nhau. Sau 1 giờ chúng gặp nhau. Tiếp tục đi, xe thứ hai tới Hà Nội trước khi xe thứ nhất tới Nam Định là 27 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

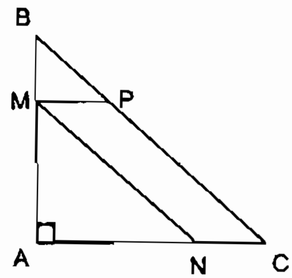
59. Một xuồng máy xuôi dòng sông 30km và ngược dòng 28km hết một thời gian bằng thời gian mà xuồng đi 59,5km trên mặt hồ yên lặng. Tính vận tốc của xuồng khi đi trên hồ biết rằng vận tốc của nước chảy trong sông là 3km/h.

60. Một bè gỗ được thả trôi trên sông từ đập Ya-ly. Sau khi thả bè gỗ 5 giờ 20 phút, một xuồng máy cũng xuất phát từ đập Ya-ly đuổi theo và đi được 20km thì gặp bè. Tính vận tốc của bè biết rằng xuồng máy chạy nhanh hơn bè 12km/h.

61. Nếu mở cả hai vòi nước chảy vào một bể cạn thì sau 2 giờ 55 phút bể đầy nước. Nếu mở riêng từng vòi thì vòi thứ nhất làm đầy bể nhanh hơn vòi thứ hai là 2 giờ. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì mỗi vòi chảy bao lâu đầy bể ?

62. Hai đội công nhân cùng làm một quãng đường thì 12 ngày xong việc. Nếu đội thứ nhất làm một mình hết nửa công việc, rồi đội thứ hai tiếp tục một mình làm nốt phần việc còn lại thì hết tất cả 25 ngày. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu xong việc ?

63. Cho tam giác ABC vuông cân có AB = AC = 12cm. Điểm M chạy trên AB. Tứ giác MNCP là một hình bình hành có đỉnh N thuộc cạnh AC (h.6). Hỏi khi M cách A bao nhiêu thì diện tích của hình bình hành bằng $32cm^2$?



Hình 6

64. Chu vi bánh sau của một máy cày lớn hơn chu vi bánh trước là 1,5m. Khi đi trên đoạn đường dài 100m thì bánh trước quay nhiều hơn bánh sau 15 vòng. Tính chu vi của mỗi bánh xe.

65. *Bài toán cổ Ấn Độ*

Một đàn khỉ chia thành hai nhóm.
Nhóm chơi đùa vui vẻ ngoài trời
Bằng bình phương một phần tám của đàn.
Mười hai con nhảy nhót trên cây.
Không khí tươi vui sưởi ấm nơi này.
Hỏi có tất cả bao nhiêu con khỉ ?

66. *Bài toán của Ơ-le*

Hai nông dân đem 100 quả trứng ra chợ bán. Số trứng của hai người không bằng nhau, nhưng hai người bán được một số tiền bằng nhau. Một người nói với người kia : "Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của anh thì tôi bán được 15 đồng". Người kia nói : "Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của anh thì tôi chỉ bán được $6\frac{2}{3}$ đồng thôi". Hỏi mỗi người có bao nhiêu trứng ?

Bài tập ôn chương IV

67. Cho hai hàm số : $y = 2x - 3$ và $y = -x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số này trong cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm toạ độ các giao điểm của hai đồ thị.

c) Kiểm nghiệm rằng toạ độ của mỗi giao điểm đều là nghiệm chung của hai phương trình hai ẩn $y = 2x - 3$ và $y = -x^2$.

68. Giải các phương trình :

a) $3x^2 + 4(x - 1) = (x - 1)^2 + 3$;

b) $x^2 + x + \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 6$;

c) $\dfrac{x + 2}{1 - x} = \dfrac{4x^2 - 11x - 2}{(x + 2)(x - 1)}$;

d) $\dfrac{x^2 + 14x}{x^3 + 8} = \dfrac{x}{x + 2}$.

69. Giải các phương trình trùng phương :

a) $x^4 + 2x^2 - x + 1 = 15x^2 - x - 35$;

b) $2x^4 + x^2 - 3 = x^4 + 6x^2 + 3$;

c) $3x^4 - 6x^2 = 0$;

d) $5x^4 - 7x^2 - 2 = 3x^4 - 10x^2 - 3$.

70. Giải các phương trình sau bằng phương pháp đặt ẩn phụ :

a) $(x^2 - 2x)^2 - 2x^2 + 4x - 3 = 0$;

b) $3\sqrt{x^2 + x + 1} - x = x^2 + 3$.

71. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + m - 1 = 0$.

a) Tìm các giá trị của m để phương trình có nghiệm.

b) Trong trường hợp phương trình có nghiệm là x_1, x_2 hãy tính theo m :

$$x_1 + x_2 \ ; \ x_1x_2 \ ; \ x_1^2 + x_2^2.$$

72. Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 10 và tích của chúng bằng -10.

73. Một đội thợ mỏ phải khai thác 216 tấn than trong một thời hạn nhất định. Ba ngày đầu, mỗi ngày đội khai thác theo đúng định mức. Sau đó, mỗi ngày họ đều khai thác vượt định mức 8 tấn. Do đó họ đã khai thác được 232 tấn và xong trước thời hạn 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày đội thợ phải khai thác bao nhiêu tấn than ?

74. Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30km. Một ca nô đi từ A đến B, nghỉ 40 phút ở B, rồi lại trở về bến A. Thời gian kể từ lúc đi đến lúc trở về đến A là 6 giờ. Tính vận tốc của ca nô khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 3km/h.

Bài tập bổ sung

IV.1. Cho hàm số $y = -3x^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

(A) Khi $0 < x < 15$, hàm số đồng biến ;

(B) Khi $-1 < x < 1$, hàm số đồng biến ;

(C) Khi $-15 < x < 0$, hàm số đồng biến ;

(D) Khi $-15 < x < 1$, hàm số đồng biến.

IV.2. Muốn tìm hai số khi biết tổng của chúng bằng S, tích của chúng bằng P thì ta giải phương trình nào sau đây ?

(A) $x^2 + Sx + P = 0$; (B) $x^2 - Sx + P = 0$;

(C) $x^2 - Sx - P = 0$; (D) $x^2 + Sx - P = 0$.

IV.3. Giải các phương trình :

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$;

b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$;

c) $2x^4 + 2\sqrt{2}x^3 + (1 - 3\sqrt{2})x^2 - 3x - 4 = 0$;

d) $(2x^2 + 7x - 8)(2x^2 + 7x - 3) - 6 = 0$.

IV.4*. Cho phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ có hai nghiệm. Xác định p biết rằng tổng các bình phương của hai nghiệm bằng 254.

IV.5*. Cho phương trình $x^4 - 13x^2 + m = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình :

a) có bốn nghiệm phân biệt ;

b) có ba nghiệm phân biệt ;

c) có hai nghiệm phân biệt ;

d) có một nghiệm ;

e) vô nghiệm.

B. LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

1. a) Sáu mặt của hình lập phương đều là hình vuông, diện tích mỗi mặt bằng x^2. Do đó $S = 6x^2$.

c) Khi x tăng thì S cũng tăng.

d) Giả sử khi S giảm đi 16 lần, giá trị của nó là S' và cạnh của hình lập phương lúc đó là x' thì $6x'^2 = S' = \frac{S}{16} = \frac{6x^2}{16} = 6.\frac{x^2}{16} = 6.\left(\frac{x}{4}\right)^2$. Suy ra $x'^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2$.

Vậy $x' = \frac{x}{4}$, nghĩa là x giảm đi 4 lần.

e) Khi $S = \frac{27}{2}cm^2$, ta có $6x^2 = \frac{27}{2}$. Suy ra $x = \frac{3}{2}$ cm.

Khi $S = 5cm^2$ thì $x = \sqrt{\frac{5}{6}}$ cm.

4. a) $f(1) = -1,5$, $f(2) = -6$, $f(3) = -13,5$. Do đó $f(1) > f(2) > f(3)$.

b) $f(-3) < f(-2) < f(-1)$.

c) Hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.

5. a) Vì $a = \frac{y}{t^2}$ khi $t \neq 0$, mà $\frac{1}{2^2} = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4} \neq \frac{0,24}{1^2}$ nên $a = \frac{1}{4}$. Vậy lần đo đầu tiên không đúng.

b) $6,25 = \frac{1}{4}t^2$. Do đó $t = \sqrt{4.6,25} = \sqrt{25} = 5$ (giây).

6. b) $60 = 0,24.10.I^2$. Suy ra $I = \sqrt{\frac{60}{2,4}} = 5$(A).

Bài tập bổ sung

1.1. a) $V(x) = 2x^2$;

b) $V(1) = 2$; $V(2) = 8$; $V(3) = 18$. Khi x tăng 2 lần thì thể tích tăng 4 lần, khi x tăng 3 lần thì thể tích tăng 9 lần.

1.2. Với hai giá trị đối nhau của x thì hai giá trị tương ứng của hàm số lại bằng nhau vì bình phương của hai số đối nhau thì bằng nhau.

1.3. a) Xét tam giác AMB có $\widehat{AMB}$ chắn đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^0$.

Suy ra $\widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 90^o$ (1)

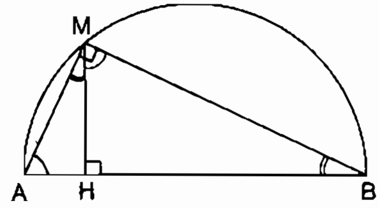
Xét tam giác vuông AHM và MHB ta cũng có

$\widehat{MAH} + \widehat{AMH} = 90^o$ (2)

$\widehat{MBH} + \widehat{BMH} = 90^o$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{MBH} = \widehat{AMH}$.

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{MAH} = \widehat{BMH}$.



Hình. bs.2

Vậy hai tam giác vuông AHM và BHM đồng dạng.

b) Hai tam giác vuông AHM và MHB đồng dạng nên $\frac{HA}{HM} = \frac{HM}{HB}$. Suy ra

$HA.HB = HM^2$.

c) Đó là một hàm số của biến số x. $P(x) = x^2$.

§2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

7. b) A(3 ; 0,9) và B(−5 ; 2,5) thuộc đồ thị còn C(−10 ; 1) thì không.

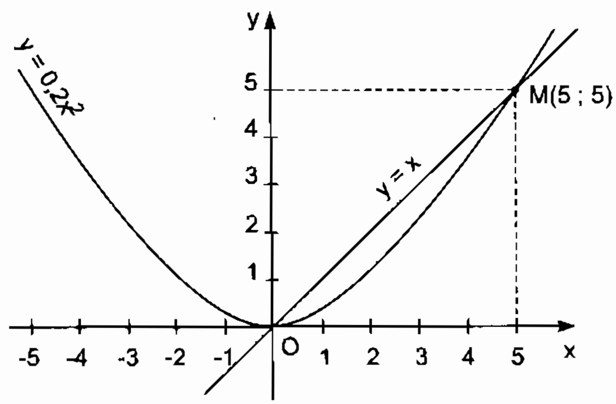
8. a) $a = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$; b) $a = \frac{3}{(-2)^2} = \frac{3}{4}$.

9. a) $b = 0,2.(-2)^2 = 0,8$. Điểm A' thuộc đồ thị hàm số vì A và A' đối xứng qua Oy. (Cũng có thể giải thích : Vì $0,2.(-2)^2 = b = 0,2.2^2$).

b) $6 = 0,2.c^2$;

suy ra $c = \pm\sqrt{30}$.

Điểm D(c ; −6) không thuộc đồ thị vì $0,2.c^2 = 6 \neq -6$.



Hình 7

10. a) (h.7)

b) Hai giao điểm là O(0 ; 0) và M(5 ; 5).

11. a) Vì điểm A thuộc đồ thị $y = -2x + 3$ nên toạ độ của A thoả mãn phương trình này, nghĩa là $y = -2.1 + 3 = 1$. Như vậy A(1 ; 1). Vì A cũng thuộc đồ thị $y = ax^2$ nên $1 = a.1^2 = a$.

c) Giao điểm thứ hai B có hoành độ $x = -3$, tung độ $y = 9$.

13. Bảng biến thiên

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−13,5	−6	−1,5	0	−1,5	−6	−13,5

a) Học sinh tự vẽ đồ thị ; b) $f(-1,5) < f(-0,5)$; $f(0,75) > f(1,5)$.

c) Khi $1 \le x \le 2$ thì $-6 \le y \le -1,5$;

Khi $-2 \le x \le 0$ thì $-6 \le y \le 0$;

Khi $-2 \le x \le 1$ thì $-6 \le y \le 0$.

Bài tập bổ sung

2.1. (D) $\frac{1}{2}$.

2.2. a) $-2 < x < 2$; b) $x < -2$ hoặc $x > 2$;

c) $0 \le y < 2$; d) $y \ge 0$; e) $y \ge 0$.

2.3. a) $a = 2 \Rightarrow$ Hàm số là $y = 2x^2$. Đồ thị như ở hình bs.3

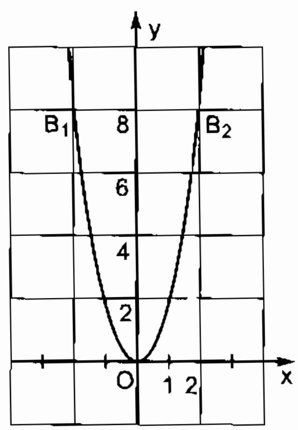
b) Khi $y = 8 = 2x^2$ thì $x = \pm 2$. Do đó có hai điểm : $B_1(-2 ; 8)$ và $B_2(2 ; 8)$.

Nếu đường thẳng $y = a'x + b'$ đi qua A và B_1 thì ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} -a' + b' = 2 \\ -2a' + b' = 8. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $a' = -6$, $b' = -4$. Đường thẳng có phương trình là $y = -6x - 4$.

Nếu đường thẳng $y = a'x + b'$ đi qua A và B_2 thì đó là đường thẳng $y = 2x + 4$.



Hình bs.3

§3. Phương trình bậc hai một ẩn

15. *Đáp số :* a) $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{5}{7}$; b) $x_1 = 0,\ x_2 = 3\sqrt{2}$;

c) $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{41}{17}$; d) $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{35}{6}$.

16. *Đáp số :* a) $x = \pm 2$; b) $x = \pm\sqrt{5}$;

c) $x = \pm 0,4$; d) Vô nghiệm.

17. a) $x - 3 = \pm 2$. Suy ra $x_1 = 1,\ x_2 = 5$.

b) $\frac{1}{2} - x = \pm\sqrt{3}$. Suy ra $x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{3},\ x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$.

c) $2x - \sqrt{2} = \pm 2\sqrt{2}$. Suy ra $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

d) $2,1x - 1,2 = \pm 0,5$. Suy ra $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{17}{21}$.

18. a) $x^2 - 6x + 9 = 9 - 5 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 2$. Suy ra $x_1 = 1,\ x_2 = 5$.

b) $x^2 - 2.x.\frac{3}{2} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2.x.\frac{3}{2} + \frac{9}{4} = 7 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Suy ra : $x_1 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2},\ x_2 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}$.

c) $3x^2 - 12x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2.x.2 + 4 = 4 - \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow x - 2 = \pm\sqrt{\frac{11}{3}}.$$

Suy ra : $x_1 = \frac{6 - \sqrt{33}}{3},\ x_2 = \frac{6 + \sqrt{33}}{3}$.

d) $3x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - \frac{5}{3}$.

Phương trình vô nghiệm vì vế trái không âm còn vế phải là một số âm.

19. a) 2 và 5 là hai nghiệm của phương trình $(x-2)(x-5)=0$ hay $x^2-7x+10=0$;

b) $-\frac{1}{2}$ và 3 là hai nghiệm của phương trình $\left[x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right](x-3)=0$ hay $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)=0$ hay $2x^2-5x-3=0$.

c) 0,1 và 0,2 là hai nghiệm của phương trình $(x-0{,}1)(x-0{,}2)=0$ hay $x^2-0{,}3x+0{,}02=0$.

d) $1-\sqrt{2}$ và $1+\sqrt{2}$ là hai nghiệm của phương trình

$$(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})=0 \quad \text{hay} \quad x^2-2x-1=0.$$

Bài tập bổ sung

3.1. a) $4x^2-3x+7=0$; b) $(\sqrt{5}-1)x^2+2x+1=0$;

c) $(m-1)x^2+(m-3)x+5=0$; d) $(m^2-1)x^2-(m-1)x-2=0$.

3.2. a) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; b) $\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$;

c) $x=\dfrac{7\pm\sqrt{29}}{10}$; d) $x=\dfrac{-\sqrt{3}\pm 3}{3}$.

3.3. a) $b=-1, c=-2$; b) $b=5, c=0$;

c) $b=-2, c=-1$; d) $b=-\frac{5}{2}, c=-\frac{3}{2}$.

3.4. Theo yêu cầu của bài toán, ta phải có

$$\begin{cases} 4a-2b+c=0 \\ 9a+3b+c=0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $5b=-5a$. Suy ra $b=-a$ và $c=-6a$.

Với mỗi giá trị khác 0 của a, ta có những giá trị tương ứng của b và c. Chẳng hạn với $a=1$ thì $b=-1$, $c=-6$. Khi đó phương trình tương ứng là $x^2-x-6=0$ và có hai nghiệm là $x_1=-2$, $x_2=3$.

Như vậy có vô số bộ ba a, b, c thoả mãn yêu cầu của bài toán.

§4. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

20. a) $\Delta = 25 - 8 = 17$, $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{4}, x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{17}}{4}$;

b) $\Delta = 0$, $x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{2}$;

c) $\Delta = 1 - 40 < 0$, phương trình vô nghiệm.

d) $\Delta = 4 + 96 = 100$, $x_1 = -\dfrac{4}{3}$, $x_2 = 2$.

21. a) $\Delta = 0$, $x_1 = x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\Delta = (1 - 2\sqrt{2})^2 + 8\sqrt{2} = (1 + 2\sqrt{2})^2$, $x_1 = \dfrac{1 - 2\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{2}$,

$x_2 = \dfrac{1 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1}{2}$;

c) $\dfrac{1}{3}x^2 - 2x - \dfrac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 2 = 0$. Ta có $\Delta = 36 + 8 = 44$,

$x_1 = 3 - \sqrt{11}$, $\quad x_2 = 3 + \sqrt{11}$;

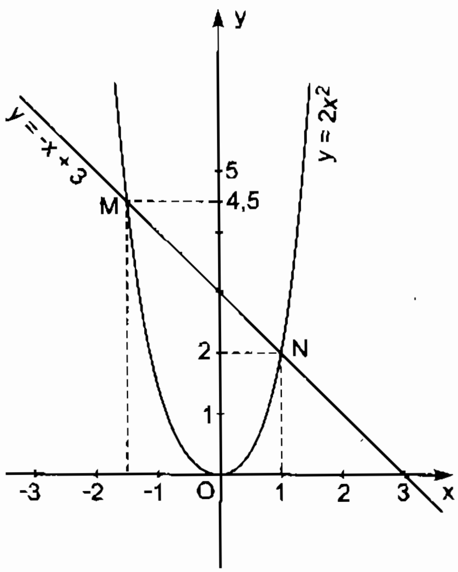
d) $\Delta = (7{,}9)^2 - 12.3{,}36 = 22{,}09$, $x_1 = \dfrac{-7{,}9 - 4{,}7}{6} = -\dfrac{12{,}6}{6} = -2{,}1$,

$x_2 = -\dfrac{8}{15}$.

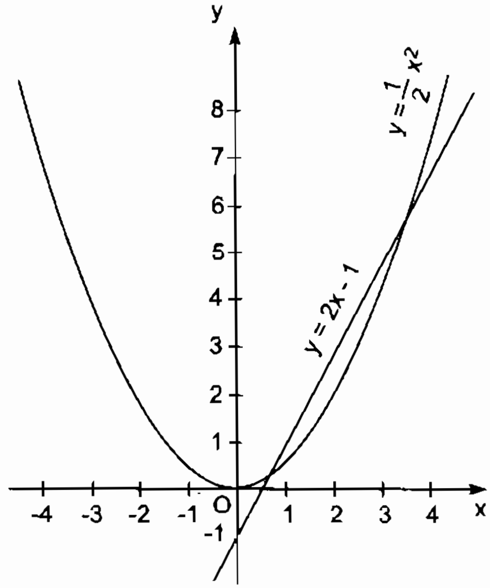
22. a) (h.8)

b) Hai giao điểm là M(−1,5 ; 4,5), N(1 ; 2). Hoành độ của M là −1,5 ; nó là nghiệm của phương trình đã cho vì $2(-1{,}5)^2 + (-1{,}5) - 3 = 4{,}5 - 1{,}5 - 3 = 0$. Hoành độ của N là 1 cũng là nghiệm của phương trình đã cho vì $2.1^2 + 1 - 3 = 0$.

c) Giải phương trình $2x^2 + x - 3 = 0$ ta cũng được hai nghiệm là $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 1$.



Hình 8



Hình 9

23. a) (h.9) Học sinh tự tìm giá trị gần đúng của nghiệm trên hình vẽ.

b) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$ hoặc $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41$.

24. a) $4(m^2 - 2m + 1) - 4m.2 = 4(m^2 - 4m + 1) = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $m = 2 - \sqrt{3}$ hoặc $m = 2 + \sqrt{3}$.

b) $(m + 1)^2 - 4.3.4 = m^2 + 2m - 47 = 0 \Leftrightarrow$ $m = -1 - 4\sqrt{3}$ hoặc $m = -1 + 4\sqrt{3}$.

25. a) – Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $-x + 2 = 0$. Nó có một nghiệm $x = 2$.

– Nếu $m \neq 0$ thì

$\Delta = (2m - 1)^2 - 4m(m + 2) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 - 8m = -12m + 1$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $\Delta \geq 0$ hay $m \leq \frac{1}{12}$. Nghiệm của phương trình là

$$x_1 = \frac{1 - 2m - \sqrt{1 - 12m}}{2m},\ x_2 = \frac{1 - 2m + \sqrt{1 - 12m}}{2m}.$$

b) $\Delta = (4m+3)^2 - 4.2.(2m^2 - 1) = 16m^2 + 24m + 9 - 16m^2 + 8 = 24m + 17 \geq 0$.

Suy ra $m \geq -\dfrac{17}{24}$.

Nghiệm của phương trình là :

$$x_1 = \frac{4m + 3 - \sqrt{24m+17}}{4}, x_2 = \frac{4m+3+\sqrt{24m+17}}{4}.$$

26. a và c trái dấu thì ac < 0. Suy ra – ac > 0. Do đó –4ac > 0 và $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt.

c) Vì $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ nên $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$, còn $3\sqrt{2} > 0$. Do đó phương trình

$$3\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + \sqrt{2} - \sqrt{3} = 0$$

có hai nghiệm phân biệt.

d) – Nếu m = 0 thì phương trình trở thành $2010x^2 + 5x = 0$; nó có nghiệm.

– Nếu $m \neq 0$ thì $m^2 > 0$. Do đó $-m^2 < 0$, còn 2010 > 0. Vì thế phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập bổ sung

4.1. a) $x = \pm\dfrac{3}{2}$;

b) Vô nghiệm ;

c) $x = \pm\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} = \pm\sqrt{\dfrac{4-2\sqrt{3}}{4}} = \pm\sqrt{\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$;

d) Vô nghiệm vì $12 - \sqrt{145} < 0$.

4.2. a) $x = 0, x = \dfrac{3}{5}$;

b) $x = 0, x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$;

c) $x = 0, x = -\dfrac{7}{2}$;

d) $x = 0, x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4.3. a) $x = 2, x = -7$;

b) Vô nghiệm ;

c) $x = -59, x = 53$;

d) $x = -\dfrac{1}{2}, x = 2$.

4.4. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vì phương trình $ax^2 + (b - 1)x + c = 0$ vô nghiệm nên $\Delta = (b - 1)^2 - 4ac < 0$.

Khi đó $f(x) - x = ax^2 + (b - 1)x + c$

$$= a\left[x^2 + 2\frac{b-1}{2a}x + \frac{(b-1)^2}{4a^2} + \frac{4ac-(b-1)^2}{4a^2}\right]$$

$= a\left[\left(x + \frac{b-1}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-(b-1)^2}{4a^2}\right]$ luôn cùng dấu với a vì biểu thức trong móc vuông dương (do $4ac - (b - x)^2 > 0$.

• Nếu $a > 0$ thì $f(x) - x > 0$ hay $f(x) > x$ với mọi giá trị của x.

Từ đó suy ra $a[f(x)]^2 + bf(x) + c > f(x) > x$, với mọi giá trị của x.

Vậy không có giá trị nào của x để $a[f(x)]^2 + bf(x) + c = x$.

• Lập luận tương tự cho trường hợp $a < 0$.

§5. Công thức nghiệm thu gọn

27. a) $b' = -3$, $\Delta' = (-3)^2 - 5.(-1) = 14$, $x_1 = \frac{3-\sqrt{14}}{5}$, $x_2 = \frac{3+\sqrt{14}}{5}$.

b) $b' = 7$, $\Delta' = 7^2 - (-3)(-8) = 49 - 24 = 25$, $x_1 = \frac{-7-5}{-3} = 4$, $x_2 = \frac{-7+5}{-3} = \frac{2}{3}$.

c) $-7x^2 + 4x = 3 \Leftrightarrow 7x^2 - 4x + 3 = 0$, $\Delta' = 4 - 21 < 0$, vậy phương trình vô nghiệm.

d) *Đáp số :* $\Delta' = 0$, phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$.

28. a) $x^2 + 2 + 2\sqrt{2} = 2(1 + \sqrt{2})x \Leftrightarrow x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 2 + 2\sqrt{2} = 0$,

$\Delta' = (1 + \sqrt{2})^2 - (2 + 2\sqrt{2}) = 1$, $x_1 = 1 + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2}$,

$x_2 = 1 + \sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2}$.

b) $\sqrt{3}x^2 + 2x - 1 = 2\sqrt{3}x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 + 2(1 - \sqrt{3})x - 4 = 0$.

$\Delta' = (1 - \sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$, $x_1 = \frac{\sqrt{3}-1-1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = 2$.

c) $-2\sqrt{2}x - 1 = \sqrt{2}x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 + 2(\sqrt{2} + 1)x + 4 = 0,$

$\Delta' = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2 - 4\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2,$

$x_1 = \dfrac{-\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = -2,\ x_2 = -\sqrt{2}.$

d) $x^2 - 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} = 2x^2 + 2x + \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0,$

$\Delta' = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} = 4, x_1 = -1 - \sqrt{3} - 2 = -3 - \sqrt{3},$

$x_2 = -1 - \sqrt{3} + 2 = 1 - \sqrt{3}.$

e) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{3} = -x^2 - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1 + \sqrt{3}\right)x^2 + 2(\sqrt{5} + \sqrt{3})x - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{5} - 1 = 0,$

$\Delta' = 5 + 3 + 2\sqrt{15} + (1 + \sqrt{3})(3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 1) =$

$= 18 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{15} = (1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5})^2,$

$x_1 = \dfrac{-\sqrt{5} - \sqrt{3} - 1 - 2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{3} + 1} = -\dfrac{1 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} + \sqrt{5} - 4 - \sqrt{15},$

$x_2 = \dfrac{-\sqrt{5} - \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + 1} = 1.$

29. a) $3 = -(x - 1)^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$. Suy ra $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

b) Khi vận động viên chạm mặt nước thì $h = 0$. Do đó $-(x - 1)^2 + 4 = 0$ hay $x^2 - 2x - 3 = 0$. Suy ra $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Vì khoảng cách không âm nên $x_2 = 3$(m).

30. *Đáp số :* a) $x_1 = x_2 = 0{,}25$; b) $x_1 \approx 1{,}76$, $x_2 \approx -0{,}09$;

c) $x_1 \approx -0{,}41$, $x_2 \approx -4{,}39$; d) $x_1 = 0{,}125$, $x_2 \approx 0{,}5$.

31. a) $\dfrac{1}{3}x^2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$. Suy ra $x_1 = x_2 = 3$;

b) $-\dfrac{1}{2}x^2 = x - 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 16 = 0$. Suy ra

$x_1 = -1 - \sqrt{17}, x_2 = -1 + \sqrt{17}.$

32. a) Nếu $x = -3$ là một nghiệm của phương trình thì $2(-3)^2 - m^2.(-3) + 18m = 0$ hay $3m^2 + 18m + 18 = 0$. Suy ra : $m_1 = -3 - \sqrt{3}, m_2 = -3 + \sqrt{3}$.

b) *Đáp số :* $m_1 = \dfrac{2 - \sqrt{14}}{5}, m_2 = \dfrac{2 + \sqrt{14}}{5}$.

33. a) $\Delta' = m^2 + 6m + 9 - m^2 - 3 = 6m + 6 > 0$. Suy ra $m > -1$;

b) *Đáp số :* $m < \dfrac{1}{3}$, $m \neq -1$.

34. a) $\Delta' = m^2 + 10m - 75 = 0$. Suy ra : $m_1 = -15, m_2 = 5$.

b) *Trả lời :* Không có giá trị nào của m để phương trình có nghiệm kép.

Bài tập bổ sung

5.1. (B).

5.2. $a^2 \leq b^2 + c^2$.

5.3. Mở ngoặc và rút gọn vế trái của phương trình đã cho ta được

$$3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0.$$

Ta có $\Delta' = (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2).$$

Vì $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$, $b^2 - 2bc + c^2 = (b - c)^2 \geq 0$,

$c^2 - 2ca + a^2 = (c - a)^2 \geq 0$ nên $\Delta' \geq 0$. Vậy phương trình luôn có nghiệm.

§6. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

35. *Đáp số :* a) $x_1 = -1, x_2 = \dfrac{5}{3}$; $x_1 + x_2 = -1 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{2}{3}$, $x_1.x_2 = -\dfrac{5}{3}$;

b) $x_1 = -2, x_2 = \dfrac{8}{5}$; $x_1 + x_2 = -2 + \dfrac{8}{5} = -\dfrac{2}{5}$, $x_1.x_2 = -\dfrac{16}{5}$;

c) $x_1 = -8, x_2 = 2$; $x_1 + x_2 = -8 + 2 = -6 = \dfrac{-2}{\frac{1}{3}}$, $x_1.x_2 = -16 = -\dfrac{16}{3} : \dfrac{1}{3}$;

d) $x_1 = 3 - \sqrt{5}$, $x_2 = 3 + \sqrt{5}$, $x_1 + x_2 = 6 = -(-3) : \frac{1}{2}$,

$x_1.x_2 = (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 4 = 2 : \frac{1}{2}$.

36. *Đáp số :* a) $x_1 + x_2 = \frac{7}{2}$, $x_1.x_2 = 1$;

b) $x_1 + x_2 = -\frac{9}{2}$, $x_1.x_2 = \frac{7}{2}$;

c) $\Delta' = 4 - (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{2}) = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \sqrt{6} > 0$,

$x_1 + x_2 = -\frac{4}{2 - \sqrt{3}} = -4(2 + \sqrt{3})$, $x_1.x_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{2})(2 + \sqrt{3})$;

d) $\Delta = 9 - 4.1,4.1,2 = 2,28 > 0$, $x_1 + x_2 = 3 : 1,4 = \frac{15}{7}$, $x_1.x_2 = 1,2 : 1,4 = \frac{6}{7}$;

e) Vì $\Delta = 1 - 4.5.2 < 0$ nên phương trình không có nghiệm.

37. *Đáp số :* a) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{7}$; b) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{32}{23}$;

c) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1979}{1975}$; d) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{10(5 - \sqrt{2})}{23}$;

e) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{11}{2}$; f) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{198}{311}$.

38. *Đáp số :* a) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; b) $x_1 = 4$, $x_2 = 8$;

c) $x_1 = -2$, $x_2 = -4$; d) $x_1 = -2$, $x_2 = 5$;

e) $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.

39. a) $x_1 = -3$ là một nghiệm vì $3.(-3)^2 + 2(-3) - 21 = 27 - 6 - 21 = 0$.

Cách 1. Theo hệ thức Vi-ét, $-3.x_2 = \frac{-21}{3} = -7$. Suy ra $x_2 = \frac{7}{3}$.

Cách 2. Theo hệ thức Vi-ét, $-3 + x_2 = \frac{-2}{3}$. Suy ra $x_2 = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$.

b) *Đáp số* : $x_2 = -\frac{23}{4}$.

40. a) Theo hệ thức Vi-ét, $7.x_2 = -35$. Suy ra $x_2 = -5$. Lại theo hệ thức Vi-ét, $-m = 7 - 5 = 2$. Vậy $m = -2$;

b) *Đáp số :* $x_2 = 0{,}5$, $m = 6{,}25$;

c) Theo hệ thức Vi-ét, $-2 + x_2 = -\frac{3}{4}$. Suy ra $x_2 = \frac{5}{4}$. Lại theo hệ thức Vi-ét,

$\frac{-m^2 + 3m}{4} = -2.\frac{5}{4}$ hay $m^2 - 3m - 10 = 0$. Suy ra : $m_1 = -2$, $m_2 = 5$;

d) *Đáp số :* $x_2 = 5$, $m = 11$.

41. a) u và v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 14x + 40 = 0$. Suy ra $u = 4$, $v = 10$ hoặc $u = 10$, $v = 4$.

b) *Đáp số :* $u = -3$, $v = -4$ hoặc $u = -4$, $v = -3$.

c) *Đáp số :* $u = -8$, $v = 3$ hoặc $u = 3$, $v = -8$.

d) *Trả lời :* Vì $4^2 - 4.19 < 0$ nên bài toán không có lời giải.

e) Đặt $v' = -v$, ta có $u + v' = 10$, $u.v' = -24$. u và v' là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 10x - 24 = 0$. Suy ra $u = 12$, $v' = -2$ hoặc $u = -2$, $v' = 12$. Từ đó ta được :

$$u = 12,\ v = 2 \text{ hoặc } u = -2,\ v = -12.$$

f) *Cách 1.* $uv = 18 \Rightarrow u^2v^2 = 324$. Từ $u^2 + v^2 = 85$ và hệ thức Vi-ét suy ra u^2 và v^2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 85x + 324 = 0$. Giải phương trình, ta được :

$$u^2 = 4 \text{ hoặc } u^2 = 81. \text{ Do đó } u = \pm 2 \text{ hoặc } u = \pm 9.$$

Từ $uv = 18$ suy ra :

– Nếu $u = 2$ thì $v = 9$;

– Nếu $u = -2$ thì $v = -9$;

– Nếu $u = 9$ thì $v = 2$;

– Nếu $u = -9$ thì $v = -2$.

Cách 2. Từ giả thiết suy ra $u^2 + 2uv + v^2 = 121$. Do đó $u + v = \pm 11$.

– Nếu $u + v = 11$ và $uv = 18$ thì u và v là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 11x + 18 = 0$. Suy ra : $u = 2$, $v = 9$ hoặc $u = 9$, $v = 2$.

– Nếu $u + v = -11$ và $uv = 18$ thì u và v là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 11x + 18 = 0$. Suy ra : $u = -2$, $v = -9$ hoặc $u = -9$, $v = -2$.

42. *Đáp số :* a) $x^2 - 8x + 15 = 0$; b) $x^2 - 3x - 28 = 0$;

c) $x^2 + \frac{14}{3}x - \frac{5}{3} = 0$; d) $x^2 - 7x + 9{,}69 = 0$;

e) $x^2 - (5 - \sqrt{2})x + 4 - 4\sqrt{2} = 0$; f) $x^2 - 6x + 4 = 0$.

43. a) Phương trình phải tìm là

$$x^2 - [-x_1 + (-x_2)]x + (-x_1)(-x_2) = 0 \text{ hay } x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Nhưng theo hệ thức Vi-ét, $x_1 + x_2 = \frac{-p}{1} = -p$, $x_1.x_2 = \frac{-5}{1} = -5$.

Do đó phương trình phải tìm là

$$x^2 - px - 5 = 0.$$

b) *Đáp số* : $x^2 - \frac{p}{5}x - \frac{1}{5} = 0$ hay $5x^2 - px - 1 = 0$.

44. Theo hệ thức Vi-ét, $x_1 + x_2 = 6$.

Theo giả thiết : $x_1 - x_2 = 4$.

Suy ra $x_1 = 5$, $x_2 = 1$. Vậy $m = 5$.

Bài tập bổ sung

6.1. (D)

6.2. $x^2 + (p - q)x - pq = 0$.

6.3. $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$

$$= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a[(x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2)]$$

$$= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Áp dụng :

a) $x^2 - 11x + 30 = (x - 5)(x - 6)$;

b) $3x^2 + 14x + 8 = 3(x + 4)(x + \frac{2}{3}) = (x + 4)(3x + 2)$;

c) $5x^2 + 8x - 4 = 5(x + 2)(x - \frac{2}{5}) = (x + 2)(5x - 2)$;

d) $x^2 - (1 + 2\sqrt{3})x - 3 + \sqrt{3} = (x - 3 - \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$.

6.4. a) $\Delta' = -9m^2 + 9m + 18 = -9(m^2 - m - 2) = -9(m + 1)(m - 2) \geq 0$ khi

$$\text{(I)} \begin{cases} m + 1 \leq 0 \\ m - 2 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc (II) } \begin{cases} m + 1 \geq 0 \\ m - 2 \leq 0 \end{cases}$$

(I) không thể xảy ra. (II) xảy ra khi $-1 \leq m \leq 2$.

b) $S = x_1 + x_2 = \frac{2(m + 4)}{2m - 1}$, $P = x_1x_2 = \frac{5m + 2}{2m - 1}$.

c) Từ b) suy ra $2mS - S = 2m + 8$ hay $2m(S - 1) = S + 8$.

Rõ ràng $S \neq 1$ vì $2m + 8 \neq 2m - 1$. Do đó $m = \frac{S + 8}{2(S - 1)}$.

Thay giá trị này vào biểu thức P ta được :

$$P = \frac{5\frac{S + 8}{2(S - 1)} + 2}{2\frac{S + 8}{2(S - 1)} - 1} = \frac{5S + 40 + 4S - 4}{2S + 16 - 2S + 2} = \frac{9S + 36}{18} = \frac{S + 4}{2}.$$

§7. Phương trình quy về phương trình bậc hai

45. a) $(x + 2)^2 - 3x - 5 = (1 - x)(1 + x) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0$. Nghiệm :

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}.$$

b) $(x - 1)^3 + 2x = x^3 - x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 2 = 0$. Nghiệm :

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{33}}{4}, \qquad x_2 = \frac{7 + \sqrt{33}}{4}.$$

c) $x(x^2 - 6) - (x - 2)^2 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow 4x^2 + 5x + 5 = 0$. Phương trình vô nghiệm.

d) $(x + 5)^2 + (x - 2)^2 + (x + 7)(x - 7) = 12x - 23 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$. Nghiệm kép : $x_1 = x_2 = 1$.

46. a) Điều kiện : $x \neq \pm 1$. Nghiệm $x_1 = -3$, $x_2 = 7$.

b) Điều kiện : $x \neq 3$, $x \neq 1$. Đưa phương trình đã cho về phương trình

$3x^2 + 2x - 65 = 0$. Nghiệm : $x_1 = -5$, $x_2 = \frac{13}{3}$.

c) Điều kiện : $x \neq -2$, $x \neq 3$. Đưa phương trình đã cho về phương trình

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Suy ra : $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Vì $x_2 = 3$ không thoả mãn điều kiện của ẩn nên phương trình chỉ có một nghiệm là $x = 1$.

d) Điều kiện : $x \neq -4$, $x \neq 2$. Đưa phương trình đã cho về phương trình :

$$x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Suy ra $x_1 = -4$, $x_2 = 2$. Hai giá trị này đều không thoả mãn điều kiện của ẩn. Phương trình vô nghiệm.

e) Điều kiện : $x \neq 1$. Đưa phương trình đã cho về phương trình :

$$9x^2 - 11x - 14 = 0.$$

Nghiệm : $x_1 = -\frac{7}{9}$, $x_2 = 2$.

f) Điều kiện : $x \neq -1$, $x \neq 1$. Đưa phương trình đã cho về phương trình :

$$x^2 - 8x + 16 = 0.$$

Nghiệm kép : $x_1 = x_2 = 4$.

47. a) *Đáp số :* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{3}$, $x_3 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{3}$.

b) $(x + 1)^3 - x + 1 = (x - 1)(x - 2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x + 1 = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 5) = 0. \text{ Nghiệm : } x = 0.$$

c) $(x^2 + x + 1)^2 = (4x - 1)^2 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^2 - (4x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1 + 4x - 1)(x^2 + x + 1 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 5x)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x^2 + 5x = 0 & (1) \\ \text{hoặc } x^2 - 3x + 2 = 0. & (2) \end{array}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm : $x_1 = 0$, $x_2 = -5$.

Phương trình (2) có hai nghiệm : $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

d) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 6(x^2 + 3x + 2) \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)^2 - 6(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 4) = 0.$$

Phương trình có bốn nghiệm : $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -4$.

e) $(2x^2 + 3)^2 - 10x^3 - 15x = 0 \quad \Leftrightarrow (2x^2 + 3)^2 - 5x(2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 3)(2x^2 - 5x + 3) = 0.$$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$.

f) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 5) - (x - 5) = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x^2 - 1) = 0$.

Phương trình có ba nghiệm : $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 5$.

48. a) *Đáp số :* Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

b) *Đáp số :* Phương trình có bốn nghiệm : $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -0{,}4$, $y_4 = 0{,}4$.

c) Đặt $z^2 = t$, $t \geq 0$, ta có $t^2 - 7t - 144 = 0 \Rightarrow t_1 = \dfrac{7 - 25}{2}$ (loại),

$t_2 = \dfrac{7 + 25}{2} = 16$.

Phương trình có hai nghiệm : $z_1 = -4$, $z_2 = 4$.

d) Phương trình có bốn nghiệm : $t_1 = -\dfrac{1}{2}, t_2 = \dfrac{1}{2}, t_3 = -\dfrac{1}{3}, t_4 = \dfrac{1}{3}$.

e) $\dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Phương trình có bốn nghiệm : $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x_4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

f) Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = -\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$.

49. Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$, ta có phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) trở thành : $at^2 + bt + c = 0$(**). Khi a, c trái dấu thì phương trình (**) có hai nghiệm t_1, t_2. Theo hệ thức Vi-ét, $t_1.t_2 = \frac{c}{a} < 0$.

Do đó $t_1 < 0 < t_2$. Vì $t \geq 0$ nên $x^2 = t_2$. Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt :

$$x = \pm\sqrt{t_2}.$$

50. a) Đặt $t = 4x - 5$, phương trình đã cho trở thành : $t^2 - 6t + 8 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm : $t_1 = 2$, $t_2 = 4$.

– Với $t_1 = 2$, ta có $4x - 5 = 2$. Suy ra $x_1 = \frac{7}{4}$.

– Với $t_1 = 4$, ta có $4x - 5 = 4$. Suy ra $x_2 = \frac{9}{4}$.

b) *Hướng dẫn*. Đặt $t = x^2 + 3x - 1$, ta được phương trình $t^2 + 2t - 8 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm :

$t_1 = -4$, $t_2 = 2$. Phương trình đã cho có hai nghiệm : $x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

c) *Hướng dẫn*. Đặt $2x^2 + x - 2 = t$, ta được phương trình $t^2 + 5t - 6 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm : $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$.

d) *Hướng dẫn*. Đặt $x^2 - 3x + 2 = t$, ta được phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm : $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

e) Điều kiện $x \neq -1$. Đặt $\frac{x}{x+1} = t$, ta được phương trình $2t^2 - 5t + 3 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm : $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3}{2}$.

– Với $t_1 = 1$, ta có $\frac{x}{x+1} = 1$. Suy ra $x = x + 1$. Phương trình này vô nghiệm.

– Với $t_1 = \frac{3}{2}$, ta có $\frac{x}{x+1} = \frac{3}{2}$. Suy ra $2x = 3x + 3$. Phương trình này có nghiệm $x = -3$.

$x = -3$ thoả mãn điều kiện của ẩn. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -3$.

f) Điều kiện $x \geq 1$. Đặt $\sqrt{x-1} = t$, $t \geq 0$, ta có $x = t^2 + 1$ và phương trình đã cho trở thành $t^2 - t - 2 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm : $t_1 = -1$, $t_2 = 2$. Giá trị $t_1 = -1$ không thoả mãn điều kiện của t.

Với $t_2 = 2$, ta có $\sqrt{x-1} = 2$ hay $x - 1 = 4$. Suy ra $x = 5$. Giá trị $x = 5$ thoả mãn điều kiện của ẩn. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 5$.

Bài tập bổ sung

7.1. a) $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow [x(x-1)]^2 + 2x(x-1) - 3 = 0.$

Đặt $x(x-1) = t$, ta có $x^2 - x - t = 0$ (1)

và phương trình đã cho trở thành :

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có hai nghiệm : $t = 1$ và $t = -3$.

Khi $t = 1$, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Khi $t = -3$, phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

b) Điều kiện $x \leq \frac{3}{2}$.

Đặt $\sqrt{3 - 2x} = t$ (1), $t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 5 = 0$.

Suy ra $t = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$.

Thay giá trị này của t vào phương trình (1) ta được : $3 - 2x = \dfrac{11 - \sqrt{21}}{2}$.

Vậy $x = \dfrac{\sqrt{21} - 5}{4}$.

7.2. a) Khi m = 2, phương trình đã cho trở thành $x + 2\sqrt{x-1} - 3 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$, ta có $t^2 + 2t - 2 = 0$.

Suy ra $t = -1 - \sqrt{3}$ (loại) hoặc $t = -1 + \sqrt{3}$.

Với $t = -1 + \sqrt{3}$ thì $x = (-1 + \sqrt{3})^2 + 1 = 5 - 2\sqrt{3}$.

b) Đặt $t = \sqrt{x-1}$, $t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + 2t - m^2 + 6m - 10 = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) có $a = 1 > 0$, $c = -m^2 + 6m - 10 = -[(m-3)^2 + 1] < 0$ nên nó có hai nghiệm trái dấu t_1 và t_2. Giả sử $t_2 > 0$. Khi đó $x = t_2^2 + 1$. Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

7.3. Phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{ll} x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1) = 0 & (1) \\ x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1) = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có $\Delta'_1 = m^2 + 4(m^2 + 1) > 0$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (2) có $\Delta'_2 = 4 + 2m(m^2 + 1) = 2m^3 + 2m + 4$.

$\Delta'_2 \geq 0 \Leftrightarrow m^3 + m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m^2 - m + 2) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

Như vậy, phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi xảy ra một trong 2 trường hợp sau :

Trường hợp 1 : (2) có nghiệm kép khác hai nghiệm của (1). Khi đó

$$\begin{cases} x = 2 \\ \Delta'_2 = 0 \\ 4 - 4m - 4(m^2 + 1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m(m+1) \neq 0 \end{cases} \text{loại.}$$

Trường hợp 2 : (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2, trong đó x_1 cũng là nghiệm của (1) còn x_2 không phải nghiệm của (1). Khi đó ta có

$$\begin{cases} \Delta'_2 > 0 \\ x_1^2 - 2mx_1 - 4(m^2+1) = 0 \\ x_1^2 - 4x_1 - 2m(m^2+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -1 \\ (4-2m)x_1 + 2(m^2+1)(m-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > -1 \\ x_1 = m^2 + 1. \end{cases}$$

Thay $x_1 = m^2 + 1$ vào (1), ta được :

$$(m^2+1)^2 - 2m(m^2+1) - 4(m^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 1 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \text{ (loại vì } m > -1) \\ m = 3. \end{array}\right.$$

Thử lại khi m = 3, các phương trình (1) và (2) trở thành :

$$x^2 - 6x - 40 = 0 \quad \text{và} \quad x^2 - 4x - 60 = 0$$

Chúng có các nghiệm lần lượt là –4 ; 10 và –6 ; 10.

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt khi m = 3 (ba nghiệm đó là –4, –6 và 10).

§8. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

51. Gọi chữ số hàng chục của số đã cho là x, ($x \in \mathbf{N}^*$, $x \le 9$).

Chữ số hàng đơn vị là $10 - x$.

Giá trị của số đã cho là $10x + 10 - x = 9x + 10$.

Ta có phương trình

$$x(10 - x) = 9x + 10 - 12.$$

Phương trình này có hai nghiệm : $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

Vì $x_1 = -1$ không thoả mãn điều kiện của ẩn nên ta có :

– Chữ số hàng chục là 2 ;

– Chữ số hàng đơn vị là 8.

Trả lời. Số phải tìm là 28.

52. Gọi số dãy ghế là x dãy, ($x \in \mathbf{N}^*$), ta có phương trình

$$\frac{360}{x} + 1 = \frac{400}{x+1}$$

hay $x^2 - 39x + 360 = 0$.

Đáp số : 15 dãy hoặc 24 dãy.

53. Gọi trọng tải của xe nhỏ là x tấn, ($x > 0$), ta có phương trình

$$\frac{15}{x} = \frac{15}{x+0,5} + 1$$

hay $x^2 + 0,5x - 7,5 = 0$.

Đáp số : 2,5 tấn.

54. Gọi thời gian quy định là x ngày, ($x > 4$).

Năng suất quy định là $\frac{450}{x}(m^3)$.

4 ngày trước thời hạn quy định, tổ máy đã sản xuất được $\frac{96}{100}.450\ (m^3)$ hay $432m^3$.

Năng suất đã thực hiện là $\frac{432}{x-4}$ (ngày).

Vì năng suất thực hiện tăng $4,5m^3$ so với năng suất quy định nên ta có phương trình

$$\frac{432}{x-4} - \frac{450}{x} = 4,5$$

hay $x^2 - 400 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm : $x = \pm 20$.

Giá trị $x = -20$ không thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Thời gian quy định là 20 ngày.

55. Gọi khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là x (g/cm^3), $x > 0$.

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $x - 0,2$ (g/cm^3), $x > 0,2$.

Thể tích của chất lỏng thứ nhất là $\frac{8}{x}$ (cm^3).

Thể tích của chất lỏng thứ hai là $\frac{6}{x-0,2}$ (cm^3).

Thể tích của hỗn hợp là $\frac{14}{0,7}$ (cm^3).

Ta có phương trình

$$\frac{8}{x} + \frac{6}{x-0,2} = \frac{14}{0,7}.$$

Giải phương trình $14x^2 - 2,8x = 0,7.(14x - 1,6) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 14x^2 - 12,6x + 1,12 = 0$$

$$\Delta' = 24,01,\ \sqrt{\Delta'} = 4,9\ ,$$

$$x_1 = \frac{6,3 + 4,9}{14} = \frac{11,2}{14} = 0,8,\quad x_2 = \frac{6,3 - 4,9}{14} = 0,1$$

Vì $x > 0,2$ nên giá trị $x = 0,1$ không thoả mãn điều kiện của ẩn (loại).

Trả lời. Khối lượng riêng của chất lỏng thứ nhất là $0,8 g/cm^3$;

Khối lượng riêng của chất lỏng thứ hai là $0,6 g/cm^3$.

56. Gọi vận tốc của ôtô lúc về là x(km/h), $x > 0$.

Vận tốc của ôtô lúc đi là $x + 10$ (km/h).

Ta có phương trình

$$\frac{150}{x+10} + 3\frac{1}{4} + \frac{150}{x} = 10 \text{ hay}$$

$$27x^2 + 270x = 1200x + 6000 \text{ hay } 9x^2 - 310x - 2000 = 0.$$

$$x_1 = \frac{155 - 205}{9} = -\frac{50}{9},\qquad x_2 = \frac{155 + 205}{9} = \frac{360}{9} = 40.$$

Vì $x > 0$ nên chỉ có $x_2 = 40$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Vận tốc của ôtô lúc về là 40km/h.

57. Gọi vận tốc máy bay cánh quạt là x (km/h), $x > 0$.

Vận tốc máy bay phản lực là $x + 300$ (km/h).

Ta có phương trình

$$\frac{600}{x} = \frac{1}{6} + \frac{600}{x + 300} + \frac{1}{6} \text{ hay } x^2 + 300x - 540000 = 0.$$

$$x_1 = -150 - 750 = -900,\ x_2 = -150 + 750 = 600.$$

Vì $x > 0$ nên chỉ có $x_2 = 600$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Vận tốc máy bay cánh quạt là 600km/h ;

Vận tốc máy bay phản lực là 900km/h.

58. Gọi vận tốc xe thứ nhất là x (km/h), $0 < x < 90$.

Vì sau 1 giờ hai xe gặp nhau, nghĩa là tổng quãng đường đi được của hai xe trong 1 giờ, hay tổng vận tốc của hai xe là 90km/h. Do đó vận tốc của xe thứ hai là

$$90 - x \text{ (km/h)}.$$

Quãng đường mà xe thứ nhất phải đi tiếp là $(90 - x)$km. Vì thế, thời gian xe thứ nhất đi tiếp để tới Nam Định là $\frac{90 - x}{x}$ (giờ).

Thời gian xe thứ hai đi tiếp để tới Hà Nội là $\frac{x}{90 - x}$ (giờ).

Ta có phương trình $\frac{90 - x}{x} - \frac{x}{90 - x} = \frac{9}{20}$ hay

$$x^2 - 490x + 18000 = 0.$$

Nghiệm của phương trình là $x_1 = 40$, $x_2 = 450$.

Vì $x_2 = 450 > 90$ nên chỉ có giá trị $x_1 = 40$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Vận tốc của xe thứ nhất là 40km/h ;

Vận tốc của xe thứ hai là 50km/h.

59. Gọi vận tốc của xuồng máy khi đi trong hồ yên lặng là x (km/h), $x > 3$.

Vận tốc của xuồng khi đi xuôi dòng sông là : $x + 3$ (km/h).

Vận tốc của xuồng khi đi ngược dòng sông là : $x - 3$ (km/h).

Thời gian đi 59,5km trong hồ là $\frac{119}{2x}$ (giờ).

Thời gian đi 30km xuôi dòng sông là $\frac{30}{x+3}$ (giờ).

Thời gian đi 28km ngược dòng sông là $\frac{28}{x-3}$ (giờ).

Ta có phương trình

$$\frac{30}{x+3} + \frac{28}{x-3} = \frac{119}{2x} \text{ hay } x^2 + 4x - 357 = 0.$$

Giải phương trình này ta được $x_1 = -21$, $x_2 = 17$.

Vì $x > 0$ nên chỉ có $x_2 = 17$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Vận tốc của xuồng trên hồ yên lặng là 17km/h.

60. Gọi vận tốc của bè là x (km/h), $x > 0$.

Vận tốc của xuồng máy là $x + 12$ (km/h).

Thời gian bè trôi cho đến lúc gặp xuồng là $\frac{20}{x}$ (giờ).

Thời gian xuồng đi đến khi đuổi kịp bè là $\frac{20}{x+12}$ (giờ).

Ta có phương trình $\frac{20}{x} - \frac{20}{x+12} = \frac{16}{3}$ hay $x^2 + 12x - 45 = 0$.

Giải phương trình này ta được : $x_1 = 3$, $x_2 = -15$.

Vì $x > 0$ nên chỉ có $x_1 = 3$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Vận tốc của bè là 3km/h.

61. Gọi thời gian vòi thứ nhất chảy một mình đầy bể là x (giờ), $x > 0$.

Thời gian vòi thứ hai chảy một mình đầy bể là $x + 2$ (giờ).

$$2 \text{ giờ } 55 \text{ phút} = \frac{175}{60} = \frac{35}{12} \text{ giờ.}$$

Trong 1 giờ cả hai vòi cùng chảy được $\frac{12}{35}$ (bể).

Trong 1 giờ vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ (bể).

Trong 1 giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{x+2}$ (bể).

Ta có phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{12}{35}$ hay $6x^2 - 23x - 35 = 0$.

Giải phương trình này ta được

$$x_1 = 5, x_2 = -\frac{7}{6}.$$

Vì $x > 0$ nên chỉ có giá trị $x = 5$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Vòi thứ nhất chảy một mình trong 5 giờ thì đầy bể.

Vòi thứ hai chảy một mình trong 7 giờ thì đầy bể.

62. Gọi thời gian đội thứ nhất làm xong nửa công việc là x (ngày), $2x > 12$ và $x < 25$, hay $6 < x < 25$.

Thời gian đội thứ hai làm xong nửa công việc là $25 - x$ (ngày).

Trong 1 ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{2x}$ (công việc).

Trong 1 ngày đội thứ hai làm được $\frac{1}{2(25-x)}$ (công việc).

Trong 1 ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{12}$ (công việc).

Ta có phương trình $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2(25-x)} = \frac{1}{12}$ hay $x^2 - 25x + 150 = 0$.

Nghiệm của phương trình này là $x_1 = 10$, $x_2 = 15$.

Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Đội thứ nhất làm một mình trong 20 ngày thì xong việc ;

Đội thứ hai làm một mình trong 30 ngày thì xong việc ;

hoặc : Đội thứ nhất làm một mình trong 30 ngày thì xong việc ;

Đội thứ hai làm một mình trong 20 ngày thì xong việc.

63. (h.10) Đặt MA = x (cm), $0 < x < 12$.

Vì tam giác ABC vuông cân nên

$$MP = MB = 12 - x.$$

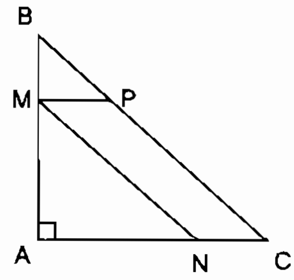
Diện tích của hình bình hành MNCP là

$$MP.MA = (12 - x)x.$$

Theo giả thiết, diện tích này bằng $32cm^2$.

Do đó ta có phương trình $(12 - x)x = 32$ hay

$$x^2 - 12x + 32 = 0.$$



Hình 10

Trả lời. M cách A là 4cm hoặc 8cm.

64. Gọi chu vi của bánh trước là x (m), $x > 0$.

Chu vi của bánh sau là $x + 1,5$ (m).

Số vòng bánh quay của hai bánh xe khi đi đoạn đường 100m lần lượt là :

$$\frac{100}{x} \text{ và } \frac{100}{x + 1,5}.$$

Ta có phương trình $$\frac{100}{x} - \frac{100}{x + 1,5} = 15.$$

Giải phương trình ta được : $x_1 = -4$, $x_2 = 2,5$.

Trả lời. Chu vi bánh trước là 2,5m ;

Chu vi bánh sau là 4m.

65. Gọi số khỉ của đàn là x (con), $x \in \mathbf{N}^*$, x chia hết cho 8.

Nhóm chơi đùa ngoài trời có $\left(\frac{x}{8}\right)^2$ (con).

Ta có phương trình $x = \left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12$ hay $x^2 - 64x + 768 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 48$, $x_2 = 16$.

Trả lời. Số khỉ trong cả đàn là 48 con hoặc 16 con.

66. Gọi số trứng của người thứ nhất là x (quả), $x \in \mathbf{N}^*$, $x < 100$.

Số trứng của người thứ hai là $100 - x$ (quả).

Giá tiền một quả trứng của người thứ nhất là $\frac{15}{100-x}$ (đồng).

Giá tiền một quả trứng của người thứ hai là $\frac{20}{3x}$ (đồng).

Số tiền thu được của người thứ nhất là $\frac{15x}{100-x}$ (đồng).

Số tiền thu được của người thứ hai là $\frac{20(100-x)}{3x}$ (đồng).

Ta có phương trình $\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x}$.

Giải phương trình ta được $x_1 = -200$ (loại), $x_2 = 40$.

Trả lời. Số trứng của người thứ nhất là 40 quả ;

Số trứng của người thứ hai là 60 quả.

Bài tập ôn chương IV

67. a) HS tự vẽ đồ thị.

b) $A(1 ; -1)$, $B(-3 ; -9)$.

68. a) $3x^2 + 4(x-1) = (x-1)^2 + 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0$.

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 1$; $x_2 = -4$.

b) $x^2 + x + \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 6 \Leftrightarrow x^2 + (1-\sqrt{3})x - 6 + \sqrt{3} = 0$.

$\Delta = 4 - 2\sqrt{3} + 24 - 4\sqrt{3} = 28 - 6\sqrt{3} = (3\sqrt{3} - 1)^2$, $\sqrt{\Delta} = 3\sqrt{3} - 1$.

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 2\sqrt{3} - 1$.

c) Điều kiện $x \neq -2$, $x \neq 1$. Khử mẫu và biến đổi ta được

$(x+2)^2 = -4x^2 + 11x + 2 \Leftrightarrow 5x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{2}{5}$.

Vì $x = 1$ không thoả mãn điều kiện đầu bài nên phương trình chỉ có một nghiệm $x = \frac{2}{5}$.

d) Điều kiện $x \neq -2$. Khử mẫu và biến đổi ta được

$$x^2 + 14x = x^3 - 2x^2 + 4x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 5 \text{ hoặc } x = -2.$$

Vì $x = -2$ không thoả mãn điều kiện nên phương trình có hai nghiệm :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 5.$$

69. a) $x^4 + 2x^2 - x + 1 = 15x^2 - x - 35 \Leftrightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$

Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$, ta có $t^2 - 13t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ hoặc $t = 9$.

Với $t = 4$, ta có $x^2 = 4$ hay $x = \pm 2$.

Với $t = 9$, ta có $x^2 = 9$ hay $x = \pm 3$.

Phương trình có bốn nghiệm : $x = \pm 2$, $x = \pm 3$.

b) $2x^4 + x^2 - 3 = x^4 + 6x^2 + 3 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 6 = 0.$

Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$, ta được $t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 6$.

Vì $t \geq 0$ nên ta chỉ có $t = 6$ hay $x^2 = 6$.

Phương trình có hai nghiệm : $x = \pm\sqrt{6}$.

c) Đáp số : $x = 0$; $x = \pm\sqrt{2}$.

d) $5x^4 - 7x^2 - 2 = 3x^4 - 10x^2 - 3 \Leftrightarrow 2x^4 + 3x^2 + 1 = 0.$

Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$, ta được $2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = -\frac{1}{2}$. Cả hai giá trị tìm được của t đều bị loại.

Phương trình vô nghiệm.

70. a) $(x^2 - 2x)^2 - 2x^2 + 4x - 3 = 0.$

Đặt $t = x^2 - 2x$, ta được $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 3$.

Với $t = -1$, ta có $x^2 - 2x + 1 = 0$. Phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

Với $t = 3$, ta có $x^2 - 2x - 3 = 0$. Phương trình có hai nghiệm : $x = -1$, $x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm : $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$.

b) $3\sqrt{x^2 + x + 1} - x = x^2 + 3$.

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi giá trị của x nên căn thức luôn luôn có nghĩa. Đặt $\sqrt{x^2 + x + 1} = t$, $t > 0$, ta được $t^2 - 3t + 2 = 0$ $\Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$.

Với $t = 1$, ta có $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$ hay $x^2 + x + 1 = 1$. Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Với $t = 2$, ta có $\sqrt{x^2 + x + 1} = 2$ hay $x^2 + x + 1 = 4$. Phương trình có hai nghiệm :

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2},\ x_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm :

$$x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2},\ x_4 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}.$$

71. a) $\Delta' = m + 2 \geq 0$ khi $m \geq -2$.

b) $x_1 + x_2 = 2(m + 1)$;

$x_1x_2 = m^2 + m - 1$;

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 + 8m + 4 - 2m^2 - 2m + 2$$
$$= 2m^2 + 6m + 6.$$

72. Hai số phải tìm là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 10x - 10 = 0.$$

Vậy hai số phải tìm là $x_1 = 5 - \sqrt{35}$, $x_2 = 5 + \sqrt{35}$.

73. Gọi lượng than mà đội phải khai thác trong 1 ngày theo kế hoạch là x (tấn), $x > 0$.

Thời hạn quy định để khai thác 216 tấn là $\frac{216}{x}$ (ngày).

Lượng than khai thác được trong 3 ngày đầu là 3x (tấn).

Do đó lượng than khai thác được trong những ngày còn lại là $232 - 3x$ (tấn).

Mỗi ngày sau đội khai thác được $x + 8$ (tấn).

Thời gian để khai thác $232 - 3x$ tấn than là $\dfrac{232 - 3x}{x + 8}$ (ngày).

Theo bài ra ta có phương trình

$$\frac{216}{x} - 1 = \frac{232 - 3x}{x + 8} + 3 \text{ hay } x^2 + 48x - 1728 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x_1 = -72,\ x_2 = 24.$

$x_1 = -72$ không thoả mãn điều kiện của ẩn, (loại).

Trả lời. Theo kế hoạch, mỗi ngày đội thợ phải khai thác 24 tấn than.

74. Gọi vận tốc của ca nô trong nước yên lặng là x (km/h), $x > 3$.

Vận tốc khi ca nô xuôi dòng là $x + 3$ (km/h).

Vận tốc khi ca nô ngược dòng là $x - 3$ (km/h).

Thời gian ca nô đi xuôi dòng là $\dfrac{30}{x + 3}$ (giờ).

Thời gian ca nô đi ngược dòng là $\dfrac{30}{x - 3}$ (giờ).

Thời gian ca nô nghỉ ở B là 40 phút hay $\dfrac{2}{3}$ (giờ).

Theo đầu bài ta có phương trình

$$\frac{30}{x + 3} + \frac{30}{x - 3} + \frac{2}{3} = 6 \text{ hay } 4x^2 - 45x - 36 = 0$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 12,\ x_2 = -\dfrac{3}{4}.$

Vì $x > 0$ nên chỉ có $x_1 = 12$ thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Vận tốc của ca nô khi nước yên lặng là 12km/h.

Bài tập bổ sung

IV.1. (C).

IV.2. (B).

IV.3. a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 4x - 3x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x(x+2)^2 - 3(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2 + 2x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ hoặc $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Nghiệm của phương trình là : $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; $x_3 = -3$.

b) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x - 6x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0.$

Nghiệm của phương trình là $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

c) $2x^4 + 2\sqrt{2}\,x^3 + (1 - 3\sqrt{2})x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (2x^4 + 2\sqrt{2}\,x^3 + x^2) - 3\sqrt{2}\,x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\,x^2 + x)^2 - 3(\sqrt{2}\,x^2 + x) - 4 = 0.$

Đặt $\sqrt{2}\,x^2 + x = t$. Phương trình $\sqrt{2}\,x^2 + x - t = 0$ đối với ẩn x phải có nghiệm nên $\Delta = 1 + 4\sqrt{2}\,t \ge 0$. Do đó t phải thoả mãn điều kiện $t \ge -\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

Phương trình đã cho trở thành : $t^2 - 3t - 4 = 0$. Suy ra $t = -1$ (loại) và $t = 4$.

Với $t = 4$, ta có $\sqrt{2}x^2 + x - 4 = 0$.

Nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + 32\sqrt{2}}}{4}$.

d) Đặt $2x^2 + 7x - 3 = t$, ta có $2x^2 + 7x - 3 - t = 0$. Phương trình này phải có nghiệm nên $\Delta = 49 + 24 + 8t = 8t + 73 \ge 0$. Do đó t phải thoả mãn điều kiện $t \ge -\dfrac{73}{8}$.

Phương trình đã cho trở thành $t(t-5) - 6 = 0$ hay $t^2 - 5t - 6 = 0$. Suy ra

$t = -1$ hoặc $t = 6$.

Với $t = -1$, ta có phương trình $2x^2 + 7x - 2 = 0$. Nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{65}}{4}.$$

Với $t = 6$, ta có phương trình $2x^2 + 7x - 9 = 0$. Nghiệm của phương trình là

$$x = 1,\ x = -\frac{9}{2}.$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm : $x = 1,\ x = -\frac{9}{2},\ x = \frac{-7 \pm \sqrt{65}}{4}$.

IV.4. Để phương trình đã cho có hai nghiệm thì $\Delta = p^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow p^2 \geq 4$. Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2. Theo giả thiết

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2.1 = p^2 - 2 = 254$ hay $p^2 = 256$ (thoả mãn điều kiện $p^2 \geq 4$) . Vậy $p = \pm 16$.

IV.5. Gọi phương trình $x^4 - 13x^2 + m = 0$ là phương trình (1). Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, ta có phương trình $t^2 - 13t + m = 0$ (2) với $\Delta = 169 - 4m$.

a) Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 dương. Điều này xảy ra khi

$$\begin{cases} \Delta = 169 - 4m > 0 \\ m = t_1t_2 > 0 \\ 13 = t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \text{ hay } 0 < m < \frac{169}{4}.$$

b) Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng 0. Điều này xảy ra khi

$$\begin{cases} \Delta = 169 - 4m > 0 \\ m = t_1t_2 = 0 \\ 13 = t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \text{ hay } m = 0.$$

c) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có một nghiệm dương và một nghiệm âm hoặc khi phương trình (2) có nghiệm kép dương. Điều này xảy ra khi

$$m < 0 \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta = 169 - 4m = 0 \\ t_1 = t_2 = \frac{13}{2} > 0 \end{cases} \text{ hay khi } m < 0 \text{ hoặc } m = \frac{169}{4}.$$

d) Phương trình (1) có một nghiệm khi phương trình (2) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm hoặc khi phương trình (2) có nghiệm kép bằng 0. Cả hai trường hợp này đều không thể xảy ra vì nếu phương trình (2) có một nghiệm $t_1 = 0$ thì theo hệ thức Vi-ét, nghiệm kia là $t_2 = 13 - t_1 = 13 > 0$.

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình (1) chỉ có một nghiệm.

e) Phương trình (1) vô nghiệm khi phương trình (2) vô nghiệm hoặc phương trình (2) có hai nghiệm âm. Ta nhận thấy rằng nếu phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 đều âm thì theo định lí Vi-ét, ta có $13 = t_1 + t_2 < 0$. Đó là điều vô lí.

Vậy phương trình (1) vô nghiệm chỉ khi phương trình (2) vô nghiệm, tức là khi $\Delta = 169 - 4m < 0$ hay $m > \frac{169}{4}$.

PHẦN HÌNH HỌC

Chương III

GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

A. ĐỀ BÀI

§1. Góc ở tâm. Số đo cung

1. a) Từ 1 giờ đến 3 giờ thì kim giờ quay được một góc ở tâm bằng bao nhiêu độ ?

b) Cũng hỏi như thế từ 3 giờ đến 6 giờ ?

2. Một đồng hồ chạy chậm 25 phút. Hỏi để chỉnh lại đúng giờ thì phải quay kim phút một góc ở tâm là bao nhiêu độ ?

3. Hãy xếp một tờ giấy để cắt thành một hình ngôi sao năm cánh đều nhau. Muốn cắt chỉ bằng một nhát kéo thì phải gấp tờ giấy đó thành một hình có góc ở tâm bằng bao nhiêu độ ?

4. Hai tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O ; R) cắt nhau tại M. Biết OM = 2R. Tính số đo của góc ở tâm AOB ?

5. Cho đường tròn (O ; R), đường kính AB. Gọi C là điểm chính giữa của cung AB. Vẽ dây CD dài bằng R. Tính góc ở tâm DOB. Có mấy đáp số ?

6. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; R') cắt nhau tại A, B. Hãy so sánh R và R' trong các trường hợp sau :

a) Số đo cung nhỏ AB của (O ; R) lớn hơn số đo cung nhỏ AB của (O' ; R').

b) Số đo cung lớn AB của (O ; R) nhỏ hơn số đo cung lớn AB của (O' ; R').

c) Số đo hai cung nhỏ bằng nhau.

7. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A, B. Đường phân giác của góc OBO' cắt các đường tròn (O), (O') tương ứng tại C, D.

Hãy so sánh các góc ở tâm BOC và BO'D.

Hướng dẫn. Sử dụng các tam giác cân OBC, O'BD.

8. Trên một đường tròn, có cung AB bằng 140^0, cung AD nhận B làm điểm chính giữa, cung CB nhận A làm điểm chính giữa. Tính số đo cung nhỏ CD và cung lớn CD.

9. Cho C là một điểm nằm trên cung lớn AB của đường tròn (O). Điểm C chia cung lớn AB thành hai cung AC và CB. Chứng minh rằng cung lớn AB có sđ $\overset{\frown}{AB}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ + sđ $\overset{\frown}{CB}$.

Hướng dẫn. Xét ba trường hợp :

a) Tia OC nằm trong góc đối đỉnh của góc ở tâm AOB.

b) Tia OC trùng với tia đối của một cạnh của góc ở tâm AOB.

c) Tia OC nằm trong một góc kề bù với góc ở tâm AOB.

Bài tập bổ sung

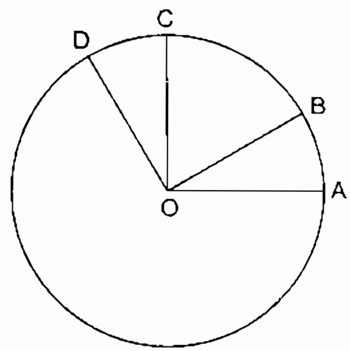
1.1. Cho hình bs.4. Biết $\overset{\frown}{DOA} = 120^0$, OA vuông góc với OC, OB vuông góc với OD.

a) Đọc tên các góc ở tâm có số đo nhỏ hơn 180^0.

b) Cho biết số đo của mỗi góc ở tâm tìm được ở câu trên.

c) Cho biết tên của các cặp cung có số đo bằng nhau (nhỏ hơn 180^0).

d) So sánh hai cung nhỏ AB và BC.



Hình bs.4

1.2. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Các điểm C, D, E cùng thuộc một cung AB sao cho sđ $\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{6}$sđ $\overset{\frown}{BA}$; sđ $\overset{\frown}{BD} = \frac{1}{2}$sđ $\overset{\frown}{BA}$; sđ $\overset{\frown}{BE} = \frac{2}{3}$sđ $\overset{\frown}{BA}$.

a) Đọc tên các góc ở tâm có số đo không lớn hơn 180^0.

b) Cho biết số đo của mỗi góc ở tâm tìm được ở câu trên.

c) Cho biết tên của các cặp cung có số đo bằng nhau (nhỏ hơn 180^0).

d) So sánh hai cung nhỏ AE và BC.

§2. Liên hệ giữa cung và dây

10. Cho tam giác ABC có AB > AC. Trên cạnh AB lấy một điểm D sao cho AD = AC. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC. Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK xuống BC và BD ($H \in BC$, $K \in BD$).

a) Chứng minh rằng OH < OK.

b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC.

11. Trên dây cung AB của một đường tròn O, lấy hai điểm C và D chia dây này thành ba đoạn thẳng bằng nhau AC = CD = DB. Các bán kính qua C và D cắt cung nhỏ AB lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng :

a) $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{FB}$; b) $\overset{\frown}{AE} < \overset{\frown}{EF}$.

12. Cho đường tròn tâm O. Trên nửa đường tròn đường kính AB lấy hai điểm C, D. Từ C kẻ CH vuông góc với AB, nó cắt đường tròn tại điểm thứ hai là E. Từ A kẻ AK vuông góc với DC, nó cắt đường tròn tại điểm thứ hai là F. Chứng minh rằng :

a) Hai cung nhỏ CF và DB bằng nhau.

b) Hai cung nhỏ BF và DE bằng nhau.

c) DE = BF.

13. Cho đường tròn (O). Gọi I là điểm chính giữa của cung AB (không phải là cung nửa đường tròn) và H là trung điểm của dây AB. Chứng minh rằng đường thẳng IH đi qua tâm O của đường tròn.

14. Cho đường tròn (O ; R). Hãy vẽ hai cung (không phải là cung lớn) biết rằng cung này có số đo gấp ba lần số đo cung kia và có dây căng cung dài gấp đôi dây căng cung kia.

Bài tập bổ sung

2.1. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Vẽ góc ở tâm $\widehat{AOB} = 80^\circ$, vẽ góc ở tâm $\widehat{BOC} = 120^\circ$ kề với $\widehat{AOB}$.

So sánh và sắp xếp độ dài AB, BC, CA theo thứ tự tăng dần.

2.2. Cho hình thoi ABCD. Vẽ đường tròn tâm A, bán kính AD. Vẽ đường tròn tâm C, bán kính CB. Lấy điểm E bất kì trên đường tròn tâm A (không trùng với B và D), điểm F trên đường tròn tâm C sao cho BF song song với DE.

So sánh hai cung nhỏ DE và BF.

§3. Góc nội tiếp

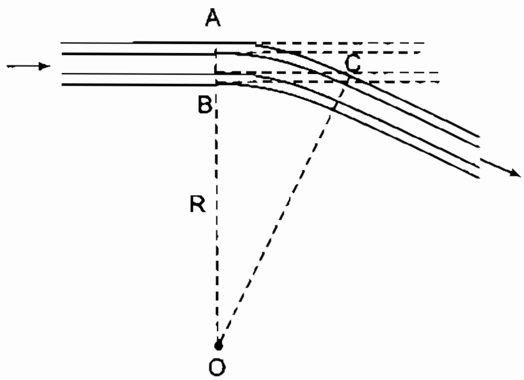
15. Cho đường tròn tâm O, bán kính 1,5cm. Hãy vẽ hình vuông ABCD có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó. Nêu cách vẽ.

16. Cho đường tròn (O) và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Lấy một điểm M trên cung AC rồi vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) tại M. Tiếp tuyến này cắt đường thẳng CD tại S. Chứng minh rằng $\widehat{MSD} = 2.\widehat{MBA}$.

17. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC bằng nhau. Qua A vẽ một cát tuyến cắt dây BC ở D và cắt đường tròn (O) ở E. Chứng minh rằng $AB^2 = AD.AE$.

18. Cho đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M vẽ một cát tuyến bất kì cắt đường tròn ở A và B. Chứng minh rằng tích MA.MB không đổi.

19. Để giúp xe lửa chuyển từ một đường ray từ hướng này sang một đường ray theo hướng khác, người ta làm xen giữa một đoạn đường ray hình vòng cung (hình 1). Biết chiều rộng của đường ray là AB ≈ 1,1m, đoạn BC ≈ 28,4m. Hãy tính bán kính OA = R của đoạn đường ray hình vòng cung.



Hình 1

20. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và M là một điểm của cung nhỏ BC. Trên MA lấy điểm D sao cho MD = MB.

a) Hỏi tam giác MBD là tam giác gì ?

b) So sánh hai tam giác BDA và BMC.

c) Chứng minh rằng MA = MB + MC.

21. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, biết $\widehat{A} = 32^o$, $\widehat{B} = 84^o$. Lấy các điểm D, E, F thuộc đường tròn (O) sao cho AD = AB, BE = BC, CF = CA. Hãy tính các góc của tam giác DEF.

22. Vẽ một tam giác vuông biết cạnh huyền là 4cm và đường cao ứng với cạnh huyền là 1,5cm.

23. Cho tam giác cân ABC (AB = AC) nội tiếp đường tròn (O). Các đường phân giác của hai góc B và C cắt nhau ở E và cắt đường tròn lần lượt ở F và D. Chứng minh rằng tứ giác EDAF là một hình thoi.

Bài tập bổ sung

3.1. Mỗi câu sau đây đúng hay sai ?

(A) Góc nội tiếp là góc tạo bởi hai dây của đường tròn đó.

(B) Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.

(C) Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp không cùng chắn một cung thì không bằng nhau.

(D) Trong một đường tròn, số đo của một góc nội tiếp bằng số đo của cung bị chắn.

(E) Trong một đường tròn, góc nội tiếp có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

3.2. Cho nửa đường tròn đường kính AB, tâm O. Đường tròn tâm A bán kính AO cắt nửa đường tròn đã cho tại C. Đường tròn tâm B bán kính BO cắt nửa đường tròn đã cho tại D. Đường thẳng qua O và song song với AD cắt nửa đường tròn đã cho tại E.

a) $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ABC}$ có bằng nhau không ? Vì sao ?

b) Chứng minh CD song song với AB.

c) Chứng minh AD vuông góc với OC.

d) Tính số đo của $\widehat{DAO}$.

e) So sánh hai cung BE và CD.

§4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

24. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Qua A vẽ cát tuyến CAD với hai đường tròn ($C \in (O)$, $D \in (O')$).

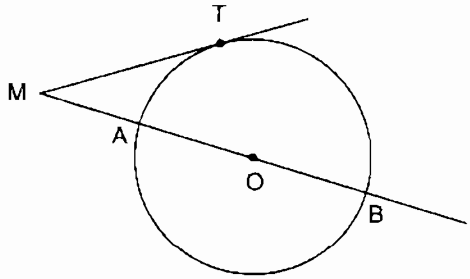
a) Chứng minh rằng khi cát tuyến quay xung quanh điểm A thì $\widehat{CBD}$ có số đo không đổi.

b) Từ C và D vẽ hai tiếp tuyến với đường tròn. Chứng minh rằng hai tiếp tuyến này hợp với nhau một góc có số đo không đổi khi cát tuyến CAD quay xung quanh điểm A.

25. Từ một điểm M cố định ở bên ngoài đường tròn (O) ta kẻ một tiếp tuyến MT và một cát tuyến MAB của đường tròn đó.

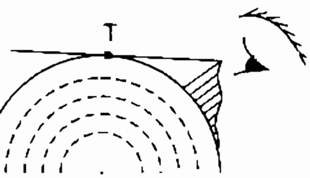
a) Chứng minh rằng ta luôn có $MT^2 = MA.MB$ và tích này không phụ thuộc vị trí của cát tuyến MAB.

b) Ở hình 2 khi cho MT = 20cm, MB = 50cm, tính bán kính đường tròn.



Hình 2

26. Ngồi trên một đỉnh núi cao 1km thì có thể nhìn thấy một địa điểm T trên mặt đất với khoảng cách tối đa là bao nhiêu ? Biết rằng bán kính Trái Đất gần bằng 6400km (h.3).



Hình 3

27. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Vẽ tia Bx sao cho tia BC nằm giữa hai tia Bx ; BA và $\widehat{CBx} = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng Bx là tiếp tuyến của (O).

Bài tập bổ sung

4.1. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Lấy ba điểm bất kì A, B, C trên đường tròn (O). Điểm E bất kì thuộc đoạn thẳng AB (và không trùng với A, B). Đường thẳng d đi qua điểm E và vuông góc với đường thẳng OA cắt đoạn thẳng AC tại điểm F. Chứng minh $\widehat{BCF} + \widehat{BEF} = 180^o$.

4.2. Cho tam giác ABC vuông ở A, AH và AM tương ứng là đường cao và đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác đó. Qua điểm A kẻ đường thẳng mn vuông góc với AM. Chứng minh : AB và AC tương ứng là tia phân giác của các góc tạo bởi AH và hai tia Am, An của đường thẳng mn.

§5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

28. Các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_{19}, A_{20}$ được sắp xếp theo thứ tự đó trên đường tròn (O) và chia đường tròn thành 20 cung bằng nhau. Chứng minh rằng dây A_1A_8 vuông góc với dây A_3A_{16}.

29. Cho tam giác ABC vuông ở A. Đường tròn đường kính AB cắt BC ở D. Tiếp tuyến ở D cắt AC ở P. Chứng minh PD = PC.

30. Hai dây cung AB và CD kéo dài cắt nhau tại điểm E ở ngoài đường tròn (O) (B nằm giữa A và E, C nằm giữa D và E). Cho biết $\widehat{CBE} = 75^{o}$, $\widehat{CEB} = 22^{o}$, $\widehat{AOD} = 144^{o}$. Chứng minh $\widehat{AOB} = \widehat{BAC}$.

31. A, B, C là ba điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến tại A cắt tia BC tại D. Tia phân giác của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn ở M, tia phân giác của $\widehat{D}$ cắt AM ở I. Chứng minh $DI \perp AM$.

32. Trên đường tròn (O ; R) vẽ ba dây liên tiếp bằng nhau AB, BC, CD, mỗi dây có độ dài nhỏ hơn R. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại I, các tiếp tuyến của đường tròn tại B, D cắt nhau tại K.

a) Chứng minh $\widehat{BIC} = \widehat{BKD}$.

b) Chứng minh BC là tia phân giác của $\widehat{KBD}$.

Bài tập bổ sung

5.1. Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây AB bất kì. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. E và F là hai điểm bất kì trên dây AB. Gọi C và D tương ứng là giao điểm của ME, MF với đường tròn (O).

Chứng minh $\widehat{EFD} + \widehat{ECD} = 180^{o}$.

5.2. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Lấy ba điểm A, B, C trên đường tròn đó sao cho AB = BC = CA. Gọi I là điểm bất kì thuộc của cung nhỏ BC (và I không trùng với B, C). Gọi M là giao điểm của CI với AB. Gọi N là giao điểm của BI với AC. Chứng minh :

a) $\widehat{ANB} = \widehat{BCI}$

b) $\widehat{AMC} = \widehat{CBI}$.

§6. Cung chứa góc

33. Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định và $\widehat{A} = \alpha$ không đổi. Tìm quỹ tích giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác đó.

34. Dựng cung chứa góc 42^{o} trên đoạn thẳng AB = 3cm.

35. Dựng tam giác ABC, biết BC = 3cm, $\widehat{A} = 45^o$ và trung tuyến AM = 2,5cm.

36. Cho nửa đường tròn đường kính AB cố định. C là một điểm trên nửa đường tròn, trên dây AC kéo dài lấy điểm D sao cho CD = CB.

a) Tìm quỹ tích các điểm D khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho.

b) Trên tia CA lấy điểm E sao cho CE = CB. Tìm quỹ tích các điểm E khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho.

37. Cho nửa đường tròn đường kính AB và C là một điểm trên nửa đường tròn. Trên bán kính OC lấy điểm D sao cho OD bằng khoảng cách CH từ C đến AB.

Tìm quỹ tích các điểm D khi C chạy trên nửa đường tròn đã cho.

38. Dựng hình vuông ABCD, biết đỉnh A, điểm M thuộc cạnh BC và điểm N thuộc cạnh CD.

Bài tập bổ sung

6.1. Dựng một cung chứa góc 60^o trên đoạn thẳng AB cho trước.

6.2. Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm A (khác O) ở trong đường tròn đó. Một đường thẳng d thay đổi, luôn đi qua A, cắt đường tròn đã cho tại hai điểm là B và C. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn thẳng BC.

6.3. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Xác định vị trí của điểm M trong tam giác sao cho MA + MB + MC nhỏ nhất.

§7. Tứ giác nội tiếp

39. Trên đường tròn tâm O có một cung AB và S là điểm chính giữa của cung đó. Trên dây AB lấy hai điểm E và H. Các đường thẳng SH và SE cắt đường tròn theo thứ tự tại C và D. Chứng minh EHCD là một tứ giác nội tiếp.

40. Cho tam giác ABC. Các đường phân giác trong của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại S, các đường phân giác ngoài của $\widehat{B}$ và $\widehat{C}$ cắt nhau tại E. Chứng minh BSCE là một tứ giác nội tiếp.

41. Cho tam giác cân ABC có đáy BC và $\widehat{A} = 20^o$. Trên nửa mặt phẳng bờ AB không chứa điểm C lấy điểm D sao cho DA = DB và $\widehat{DAB} = 40^o$. Gọi E là giao điểm của AB và CD.

a) Chứng minh ACBD là tứ giác nội tiếp.

b) Tính $\widehat{AED}$.

42. Cho ba đường tròn cùng đi qua một điểm P. Gọi các giao điểm khác P của hai trong ba đường tròn đó là A, B, C. Từ một điểm D (khác điểm P) trên đường tròn (PBC) kẻ các tia DB, DC cắt các đường tròn (PAB) và (PAC) lần lượt tại M và N. Chứng minh ba điểm M, A, N thẳng hàng

43. Cho hai đoạn thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Biết AE.EC = BE.ED. Chứng minh bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập bổ sung

7.1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ các đường cao AI, BK, CL của tam giác ấy. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ.

a) Chỉ ra các tứ giác nội tiếp có đỉnh lấy trong số các điểm A, B, C, H, I, K, L.

b) Chứng minh $\widehat{LBH}$, $\widehat{LIH}$, $\widehat{KIH}$ và $\widehat{KHC}$ là 4 góc bằng nhau.

c) Chứng minh KB là tia phân giác của $\widehat{LKI}$.

7.2. Cho đường tròn tâm O bán kính R và hai dây AB, CD bất kì. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Gọi E và F tương ứng là giao điểm của MC, MD với dây AB. Gọi I và J tương ứng là giao điểm của DE, CF với đường tròn (O). Chứng minh IJ song song với AB.

§8. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

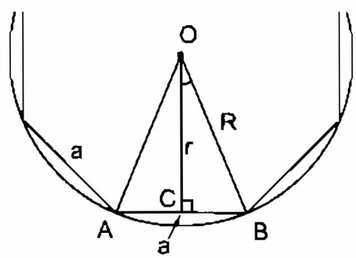
44. Vẽ hình vuông ABCD tâm O rồi vẽ tam giác đều có một đỉnh là A và nhận O làm tâm. Nêu cách vẽ.

45. Vẽ đường tròn tâm O bán kính R = 2cm rồi vẽ hình tám cạnh đều nội tiếp đường tròn (O ; 2cm). Nêu cách vẽ.

46. Cho một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a. Hãy tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp và bán kính r của đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.

Hướng dẫn

Tính $\widehat{COB}$ rồi tính $\sin\widehat{COB}$ và $\text{tg}\,\widehat{COB}$, từ đây tính được R và r (h.4).



Hình 4

47. a) Vẽ một lục giác đều ABCDEG nội tiếp đường tròn bán kính 2cm rồi vẽ hình 12 cạnh đều AIBJCKDLEMGN nội tiếp đường tròn đó. Nêu cách vẽ.

b) Tính độ dài cạnh AI.

c) Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp hình AIBJCKDLEMGN.

Hướng dẫn. Áp dụng các công thức ở bài 46.

48. a) Tính cạnh của một ngũ giác đều nội tiếp đường tròn bán kính 3cm.

b) Tính cạnh của một ngũ giác đều ngoại tiếp đường tròn bán kính 3cm.

49. Tính cạnh của hình tám cạnh đều theo bán kính R của đường tròn ngoại tiếp.

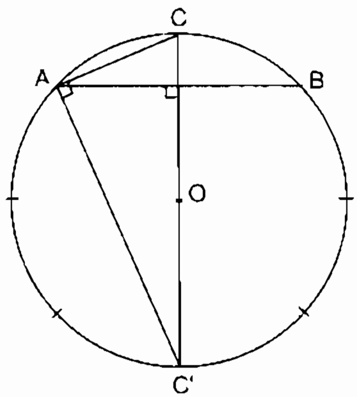
Hướng dẫn

Cách 1. Áp dụng công thức

$$a = 2R\sin\frac{180^o}{n}$$

Cách 2. Tính trực tiếp.

Vẽ dây AB là cạnh của một hình vuông nội tiếp đường tròn (O), gọi C là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Khi đó CA là cạnh của hình tám cạnh đều nội tiếp. Hãy tính CA trong tam giác vuông CAC' (h.5).



Hình 5

50. Trong đường tròn (O ; R) cho một dây AB bằng cạnh hình vuông nội tiếp và dây BC bằng cạnh tam giác đều nội tiếp (điểm C và điểm A ở cùng một phía đối với BO). Tính các cạnh của tam giác ABC và đường cao AH của nó theo R.

51. Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi I là giao điểm của AD và BE. Chứng minh $DI^2 = AI.AD$.

Hướng dẫn. Vẽ đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều ABCDE rồi xét hai tam giác đồng dạng AIE và AED.

Bài tập bổ sung

8.1. Mỗi câu sau đây đúng hay sai ?

a) Mỗi tam giác luôn có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp.

b) Mỗi tứ giác luôn có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp.

c) Giao điểm ba đường trung tuyến của một tam giác là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ấy.

d) Giao điểm ba đường trung trực của một tam giác là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ấy.

e) Giao điểm ba đường phân giác trong của một tam giác là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ấy.

f) Giao điểm ba đường cao của một tam giác là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ấy.

g) Tứ giác có tổng độ dài các cặp cạnh đối bằng nhau thì ngoại tiếp được đường tròn.

h) Tứ giác có tổng số đo các cặp góc (trong) đối nhau bằng nhau thì nội tiếp được đường tròn.

i) Đường tròn tiếp xúc với các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác là đường tròn nội tiếp tam giác đó.

8.2. Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm M ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O). Qua điểm M kẻ cát tuyến MCD với đường tròn (O) (tức là đường thẳng đi qua điểm M và cắt đường tròn tại hai điểm là C, D). Gọi I là trung điểm của dây CD. Khi đó MAOIB có là ngũ giác nội tiếp hay không ?

§9. Độ dài đường tròn, cung tròn

52. Cho hai đường tròn có bán kính lần lượt là R = 1km và r = 1m. Nếu độ dài của mỗi đường tròn ấy đều tăng thêm 1m thì bán kính của mỗi đường tròn tăng thêm bao nhiêu ? Hãy giải thích.

53. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp :

a) Một lục giác đều có cạnh là 4cm ;

b) Một hình vuông có cạnh là 4cm ;

c) Một tam giác đều có cạnh là 6cm.

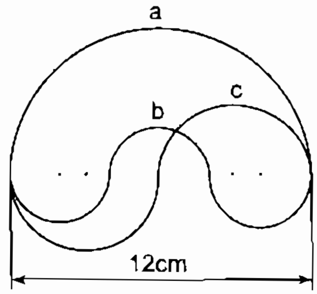
54. Xích Đạo là một đường tròn lớn của Trái Đất có độ dài khoảng 40 000km. Hãy tính bán kính của Trái Đất.

55. Mát-xcơ-va có vĩ độ là 56^{o} Bắc. Tìm độ dài cung kinh tuyến từ Mát-xcơ-va đến Xích Đạo, biết rằng mỗi kinh tuyến là một nửa đường tròn lớn của Trái Đất, có độ dài khoảng 20 000km.

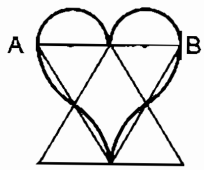
56. Hãy so sánh độ dài ba đường cong a, b, c trong hình 6.

57. Các tam giác trong hai hình quả tim dưới đây (h.7 và h.8) đều là tam giác đều.

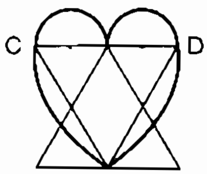
Biết AB = CD = 8cm. Tính chu vi của mỗi hình quả tim.



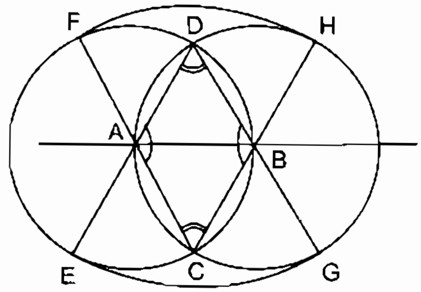
Hình 6



Hình 7



Hình 8



Hình 9

58. Vẽ hình quả trứng (h. 9) với AB = 3cm. Nêu cách vẽ. Tính chu vi của hình quả trứng đó.

59. Tính độ dài cung $36^{o}45'$ của một đường tròn có bán kính là R.

60. Cho tam giác cân ABC có $\widehat{B} = 120^{o}$, AC = 6cm. Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

61. Trong dân gian Việt Nam có lưu truyền quy tắc sau đây để tìm đường kính khi biết độ dài đường tròn : "Quân bát, phát tam, tồn ngũ, quân nhị", tức là chia đường tròn thành tám phần, bỏ đi ba phần, còn lại năm phần, lại chia đôi.

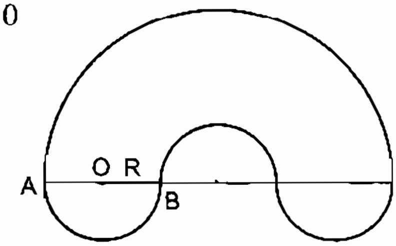
a) Theo quy tắc đó thì số π được lấy gần đúng là bao nhiêu ?

b) Hãy áp dụng quy tắc trên để tính đường kính của một thân cây gần tròn bằng cách dùng dây quấn quanh thân cây.

62. Trái Đất quay xung quanh Mặt Trời theo một quỹ đạo gần tròn. Giả thiết quỹ đạo này tròn và có bán kính khoảng 150 triệu kilômét. Cứ hết một năm thì Trái Đất quay được một vòng quanh Mặt Trời. Biết 1 năm có 365 ngày, hãy tính quãng đường đi được của Trái Đất sau 1 ngày (làm tròn đến 10 000km).

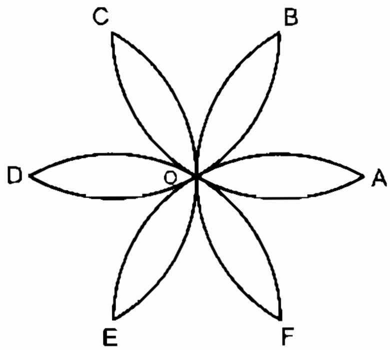
Bài tập bổ sung

9.1. Tính chu vi của hình bên biết OA = OB = R > 0 (h.bs.5).



Hình bs.5

9.2. Tính chu vi của hình cánh hoa, biết OA = R (h.bs.6).



Hình bs.6

§10. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn

63. a) Điền vào ô trống trong bảng sau (S là diện tích hình tròn bán kính R).

R	0	1	2	3	4	5	10	20
S								

b) Vẽ đồ thị biểu diễn diện tích hình tròn theo bán kính của nó.

c) Diện tích hình tròn có tỉ lệ thuận với bán kính không ?

64. a) Điền vào ô trống trong bảng sau (S là diện tích hình quạt n^o).

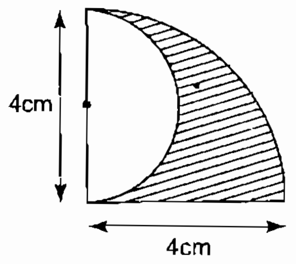
Cung n^o	0	45	90	180	360
S					

b) Vẽ đồ thị biểu diễn diện tích hình quạt theo n^o.

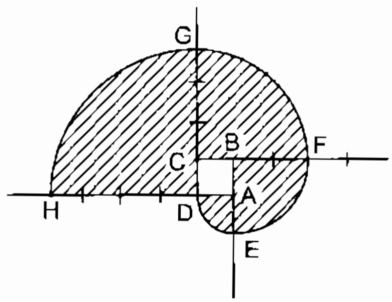
c) Diện tích hình quạt có tỉ lệ thuận với số đo độ của cung không ?

65. Tính diện tích hình tròn biết chu vi của nó là C.

66. So sánh diện tích hình gạch sọc và hình để trắng trong hình 10 :



Hình 10

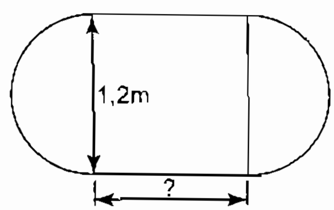


Hình 11

67. a) Vẽ đường xoắn (h.11) xuất phát từ một hình vuông cạnh 1cm. Nói cách vẽ.

b) Tính diện tích hình gạch sọc.

68. Một chiếc bàn hình tròn được ghép bởi hai nửa hình tròn đường kính 1,2m. Người ta muốn nới rộng mặt bàn bằng cách ghép thêm (vào giữa) một mặt hình chữ nhật có một kích thước là 1,2m (h.12).



Hình 12

Hỏi

a) Kích thước kia của hình chữ nhật phải là bao nhiêu nếu diện tích mặt bàn tăng gấp đôi sau khi nới ?

b) Kích thước kia của hình chữ nhật phải là bao nhiêu nếu chu vi mặt bàn tăng gấp đôi sau khi nới ?

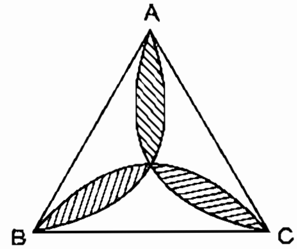
69. Cho đường tròn (O ; R). Chia đường tròn này thành ba cung có số đo tỉ lệ với 3, 4 và 5 rồi tính diện tích các hình quạt tròn được tạo thành.

70. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R) có $\widehat{C} = 45^o$.

a) Tính diện tích hình quạt tròn AOB (ứng với cung nhỏ AB)

b) Tính diện tích hình viên phân AmB (ứng với cung nhỏ AB).

71. Trong một tam giác đều ABC (h.13), vẽ những cung tròn đi qua tâm của tam giác và từng cặp đỉnh của nó. Cho biết cạnh tam giác bằng a, tính diện tích hình hoa thị gạch sọc.



Hình 13

72. Cho tam giác ABC vuông ở A và đường cao AH. Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB. Biết BH = 2cm và HC = 6cm. Tính :

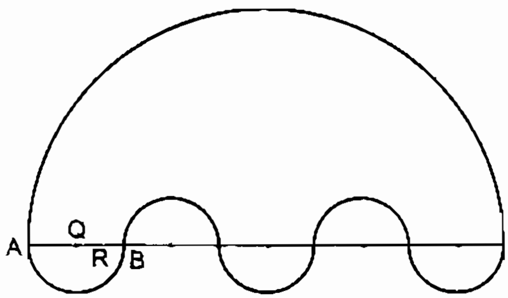
a) Diện tích hình tròn (O).

b) Tổng diện tích hai hình viên phân AmH và BnH (ứng với các cung nhỏ).

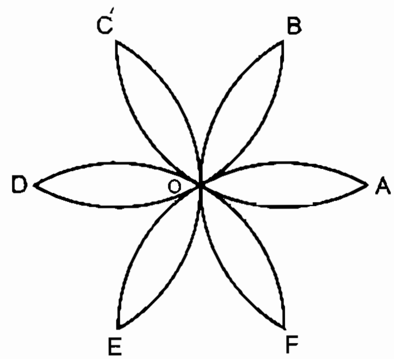
c) Diện tích hình quạt tròn AOH (ứng với cung nhỏ AH).

Bài tập bổ sung

10.1. Tính diện tích của hình được giới hạn bởi các đường cong, biết OA = OB = R > 0 (h.bs.7).



Hình bs.7



Hình bs.8

10.2. Tính diện tích của hình cánh hoa, biết OA = R (h.bs.8).

Bài tập ôn chương III

73. Cho đường tròn đường kính AB. Qua A và B kẻ hai tiếp tuyến của đường tròn đó. Gọi M là một điểm trên đường tròn. Các đường thẳng AM và BM cắt các tiếp tuyến trên lần lượt tại B' và A'.

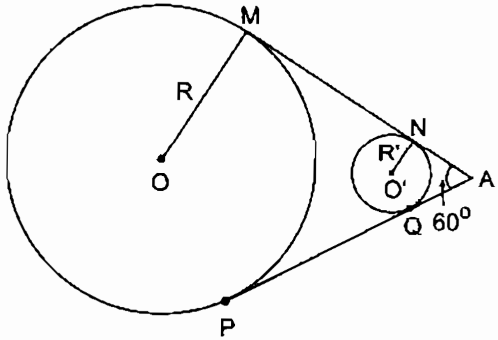
a) Chứng minh rằng $AA'.BB' = AB^2$.

b) Chứng minh rằng $A'A^2 = A'M.A'B$.

74. Cho lục giác đều ABCDEF. Chứng minh rằng đường chéo BF chia AD thành hai đoạn thẳng theo tỉ số 1 : 3.

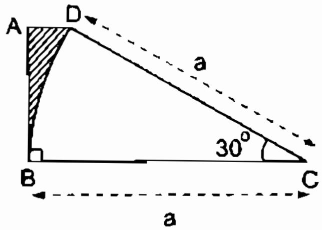
75. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Dựng điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{BMC} = \overset{\frown}{CMA}$.

76. Hai ròng rọc có tâm O, O' và bán kính R = 4a, R' = a. Hai tiếp tuyến chung MN và PQ cắt nhau tại A theo góc 60^o (h.14). Tìm độ dài của dây cua-roa mắc qua hai ròng rọc.



Hình 14

77. Tính diện tích của phần gạch sọc trên hình 15 (theo kích thước đã cho trên hình).



Hình 15

78. Cho tam giác AHB có $\widehat{H} = 90^o$, $\widehat{A} = 30^o$ và BH = 4cm. Tia phân giác của góc B cắt AH tại O. Vẽ đường tròn (O ; OH) và đường tròn (O ; OA).

a) Chứng minh đường tròn (O ; OH) tiếp xúc với cạnh AB.

b) Tính diện tích hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn trên.

79. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi C là một điểm chạy trên nửa đường tròn đó. Trên AC lấy điểm D sao cho AD = CB. Qua A kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn rồi lấy AE = AB (E và C cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB).

a) Tìm quỹ tích điểm D.

b) Tính diện tích phần chung của hai nửa hình tròn đường kính AB và AE.

Bài tập bổ sung

III.1. Cho hai tam giác đều ACB và ACD, cạnh a. Lần lượt lấy B và D làm tâm vẽ hai đường tròn bán kính a. Kẻ các đường kính ABE và ADF. Trên cung nhỏ CE của đường tròn tâm B lấy điểm M (không trùng với E và C). Đường thẳng CM cắt đường tròn tâm D tại điểm thứ hai là N. Hai đường thẳng EM và NF cắt nhau tại điểm T. Gọi H là giao điểm của AT và MN. Chứng minh :

a) MNT là tam giác đều.

b) AT = 4AH.

III.2. Cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm M ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD với đường tròn (O), trong đó điểm C ở giữa hai điểm M, D. Đường thẳng qua điểm C và vuông góc với OA cắt AB tại H. Gọi I là trung điểm của dây CD. Chứng minh HI song song với AD.

Mỗi bài từ III.3 đến III.12 sau đây đều có 4 phương án lựa chọn là (A), (B), (C) và (D) nhưng chỉ có một trong số đó đúng. Hãy chỉ ra phương án mà em cho là đúng.

III.3. Góc nội tiếp là góc

(A) có đỉnh nằm trên đường tròn.

(B) có hai cạnh là hai dây của đường tròn.

(C) có hai đỉnh là tâm đường tròn và có hai cạnh là hai bán kính.

(D) có hai cạnh là hai dây của đường tròn đó và chỉ có một đầu mút chung.

III.4. Một đường tròn là đường tròn nội tiếp nếu nó

(A) đi qua các đỉnh của một tam giác.

(B) tiếp xúc với các đường thẳng chứa các cạnh của một tam giác.

(C) tiếp xúc với các cạnh của một tam giác.

(D) nằm trong một tam giác.

III.5. Một tứ giác là tứ giác nội tiếp nếu

(A) có hai đỉnh cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau.

(B) có 4 góc bằng nhau.

(C) có 4 cạnh bằng nhau.

(D) có các cạnh tiếp xúc với đường tròn.

III.6. Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc 120° là

(A) một đường tròn đi qua hai điểm A, B.

(B) một đường thẳng song song với AB.

(C) một cung chứa góc 120° dựng trên hai điểm A, B.

(D) hai cung chứa góc 120° (đối xứng nhau) dựng trên hai điểm A, B.

III. 7. Độ dài của nửa đường tròn có đường kính 8R bằng

(A) πR ; (B) $2\pi R$;

(C) $4\pi R$; (D) $8\pi R$.

III.8. Diện tích của nửa hình tròn có đường kính 4R bằng

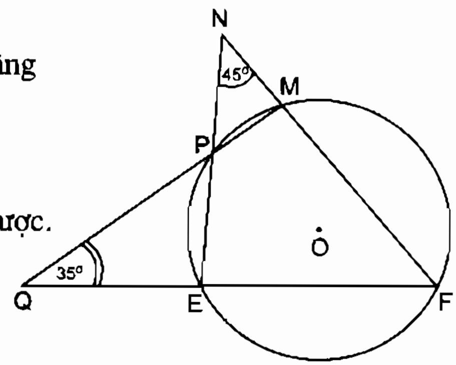
(A) $\frac{1}{2}\pi R^2$; (B) πR^2 ;

(C) $2\pi R^2$; (D) $4\pi R^2$.

III.9. Cho hình bs.9. Khi đó, số đo của $\overset{\frown}{MFE}$ bằng bao nhiêu ?

(A) 50^o ; (B) 80^o ;

(C) 130^o ; (D) Không tính được.



Hình bs.9

III.10. Tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Khi đó, $\overset{\frown}{BOC}$ có số đo bằng bao nhiêu ?

(A) 60^o ; (B) 120^o ;

(C) 240^o ; (D) Không tính được.

III.11. Hình vuông XYZT nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Điểm M bất kì thuộc cung nhỏ XT. $\overset{\frown}{ZMT}$ có số đo bằng bao nhiêu ?

(A) $22^o30'$; (B) 45^o ;

(C) 90^o; (D) Không tính được.

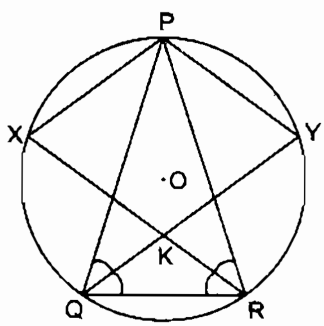
III.12. Cho hình bs.10 như hình bên (PQ = PR ; QY và RX là các tia phân giác). Khi đó, PYKX là :

(A) hình thang và không phải là hình bình hành.

(B) hình bình hành và không phải là hình thoi.

(C) hình thoi và không phải là hình chữ nhật.

(D) hình chữ nhật.



Hình bs.10

B. LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Góc ở tâm. Số đo cung

1. a) 60^o ; b) 90^o.

2. 150^o.

3. 36^o.

4. Tam giác vuông OAM là nửa tam giác đều, nên $\widehat{AOM} = 60^o$.

Vậy $\widehat{AOB} = 2.\widehat{AOM} = 120^o$.

5. Có hai đáp số :

$$\widehat{DOB} = 90^o + 60^o = 150^o$$

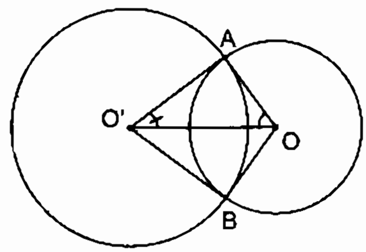
$$\widehat{DOB} = 90^o - 60^o = 30^o.$$

6. a) (h.16) Vì số đo cung nhỏ AB của (O ; R) lớn hơn số đo cung nhỏ AB của (O' ; R') nên góc ở tâm AOB lớn hơn góc ở tâm AO'B. Trong tam giác AOO' có

$$\widehat{AOO'} > \widehat{AO'O}$$

suy ra O'A > OA

hay R' > R.

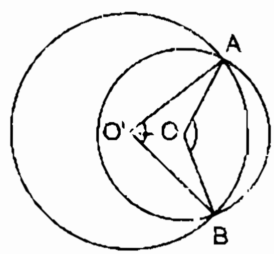


Hình 16

Nếu vẽ như hình 17 thì ta đưa về hình 16 (bằng cách lấy đối xứng đường tròn tâm O qua đường thẳng AB), rồi chứng minh như trên.

b) Học sinh tự suy luận đưa về trường hợp a).

(Vì tổng số đo cung lớn AB và số đo cung nhỏ AB trên một đường tròn là 360^o nên từ giả thiết suy ra số đo cung nhỏ AB của (O ; R) lớn hơn số đo cung nhỏ AB của (O' ; R')).



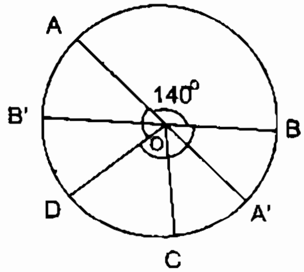
Hình 17

c) Suy ra tam giác AOO' cân và O'A = OA hay R' = R.

7. $\widehat{BOC} = \widehat{BO'D}$.

8. (h.18). Theo giả thiết, suy ra :

$$\widehat{AOB} = 140^o,$$
$$\widehat{BOD} = 140^o,$$
$$\widehat{COA} = 140^o.$$



Hình 18

Kẻ các đường kính AA', BB' ta có :

$$\widehat{AOB'} = 180^o - \widehat{AOB} = 180^o - 140^o = 40^o,$$
$$\widehat{BOA'} = 40^o \text{ (đối đỉnh)},$$
$$\widehat{B'OD} = 180^o - \widehat{BOD} = 180^o - 140^o = 40^o.$$

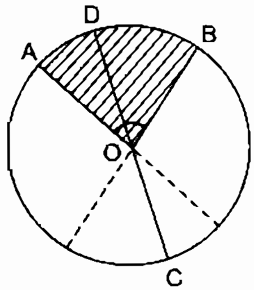
Suy ra $\widehat{COD} = \widehat{COA} - \widehat{AOB'} - \widehat{B'OD}$

$$= 140^o - 40^o - 40^o = 60^o.$$

Từ đó, số đo cung nhỏ CD bằng 60^o và số đo cung lớn CD là :

$$360^o - 60^o = 300^o.$$

9. a) Trường hợp tia OC nằm trong góc đối đỉnh của góc ở tâm AOB. Kẻ đường kính CD (h.19). Ta có :



Hình 19

$$+\begin{array}{r} \widehat{DOA} + \widehat{AOC} = 180^o \\ \widehat{DOB} + \widehat{BOC} = 180^o \end{array}$$

$$\underbrace{\widehat{DOA} + \widehat{DOB}}_{\widehat{AOB}} + \widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 360^o$$

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} + \widehat{BOC} = 360^o.$$

Chuyển qua cung, ta có :

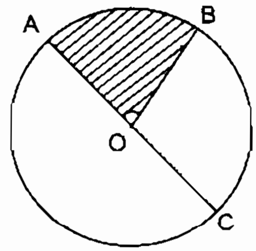
số đo cung nhỏ AB + số đo cung nhỏ AC + số đo cung nhỏ CB = 360^o

số đo cung nhỏ AC + số đo cung nhỏ CB = $\underbrace{360^o - \text{số đo cung nhỏ AB}}$

số đo cung nhỏ AC + số đo cung nhỏ CB = số đo cung lớn AB.

Vậy ta đã chứng minh được nếu C nằm trên cung lớn AB thì $sđ\overset{\frown}{AB} = sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{CB}$.

b) Trường hợp tia OC trùng với tia đối của một cạnh của góc ở tâm AOB (h.20). Ta có :



Hình 20

$$\begin{array}{rl} + & \widehat{AOB} + \widehat{COB} = 180^o \\ & \widehat{AOC} = 180^o \\ \hline & \widehat{AOC} + \widehat{COB} + \widehat{AOB} = 360^o \end{array}$$

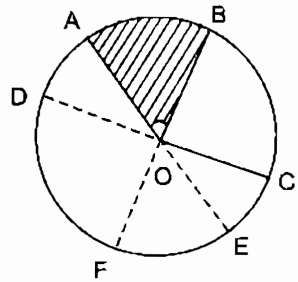
$$\widehat{AOC} + \widehat{COB} = 360^o - \widehat{AOB}.$$

Chuyển qua cung, ta có

số đo cung nửa đường tròn AC + số đo cung nhỏ CB = số đo cung lớn AB.

Vậy với cung lớn AB ta có sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ$\overset{\frown}{CB}$.

c) Trường hợp tia OC nằm trong một góc kề bù với góc ở tâm AOB (h.21). Theo trường hợp b), ta có số đo cung lớn AB = số đo cung nửa đường tròn AE + số đo cung nhỏ EB.



Hình 21

Theo trường hợp "điểm C nằm trên cung nhỏ EB" ta có số đo cung nhỏ EB = số đo cung nhỏ EC + số đo cung nhỏ CB.

Vậy số đo cung lớn AB = số đo cung nửa đường tròn AE + số đo cung nhỏ EC + số đo cung nhỏ CB.

Lại theo trường hợp b), ta có

số đo cung nửa đường tròn AE + số đo cung nhỏ EC = số đo cung lớn AC.

Vậy số đo cung lớn AB = số đo cung lớn AC + số đo cung nhỏ CB.

Bài tập bổ sung

1.1. a) Các góc ở tâm có số đo nhỏ hơn 180^o là : $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{BOD}$, $\widehat{COD}$.

b) Số đo của mỗi góc ở tâm tìm được là : $\widehat{AOB} = 30^o$, $\widehat{AOC} = 90^o$, $\widehat{AOD} = 120^o$, $\widehat{BOC} = 60^o$, $\widehat{BOD} = 90^o$, $\widehat{COD} = 30^o$.

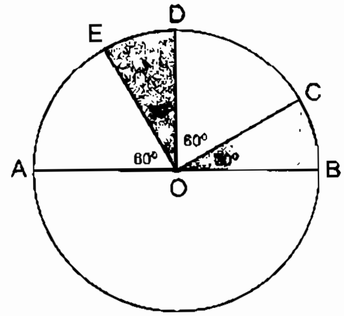
c) Các cặp cung có số đo bằng nhau (nhỏ hơn 180^{0}) trong hình đó là : AB và CD ; AC và BD.

d) Ta có số đo cung BC gấp đôi số đo cung AB.

1.2. a) Các góc ở tâm có số đo không lớn hơn 180^{0} là : $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{BOD}, \widehat{BOE}, \widehat{COD}, \widehat{COE}, \widehat{COA}, \widehat{DOE}, \widehat{DOA}, \widehat{EOA}$.

b) Số đo của mỗi góc ở tâm tìm được là :

$\widehat{AOB} = 180^{0}$, $\widehat{BOC} = 30^{0}$, $\widehat{BOD} = 90^{0}$, $\widehat{BOE} = 120^{0}$, $\widehat{COD} = 60^{0}$, $\widehat{COE} = 90^{0}$, $\widehat{COA} = 150^{0}$, $\widehat{DOE} = 30^{0}$, $\widehat{DOA} = 90^{0}$, $\widehat{EOA} = 60^{0}$.



Hình bs.11

c) Các cặp cung có số đo bằng nhau (nhỏ hơn 180^{0}) là : AE và CD ; BC và ED ; AD và DB ; AD và EC ; EC và BD.

d) Ta có số đo cung AE gấp đôi số đo cung BC.

§2. Liên hệ giữa cung và dây

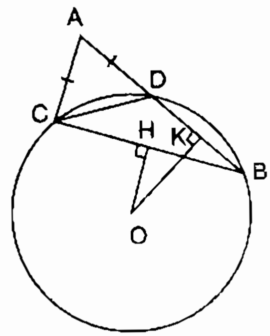
10. (h.22) a) Trong tam giác ABC, theo bất đẳng thức tam giác, ta có

$$BC > AB - AC.$$

Nhưng AC = AD nên

$$BC > AB - AD$$

hay BC > BD.



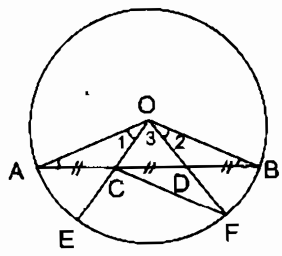
Hình 22

Theo định lí về dây cung và khoảng cách đến tâm, từ BC > BD suy ra OH < OK.

b) Từ bất đẳng thức về dây cung BC > BD ta suy ra bất đẳng thức về cung $\overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{BD}$.

11. (h.23) a) Tam giác AOB là tam giác cân vì $OA = OB$, suy ra $\widehat{A} = \widehat{B}$.

$\Delta AOC = \Delta BOD$ (c.g.c) vì có $OA = OB$, $\widehat{A} = \widehat{B}$, $AC = DB$. Từ đó $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ suy ra $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{FB}$.



Hình 23

b) Tam giác OCD là tam giác cân (vì $OC = OD$ do $\Delta AOC = \Delta BOD$) nên $\widehat{ODC} < 90^o$, từ đó $\widehat{CDF} > 90^o$ (vì $\widehat{ODC}$ và $\widehat{CDF}$ kề bù). Do vậy trong tam giác CDF ta có $\widehat{CDF} > \widehat{CFD}$ suy ra $CF > CD$ hay $CF > CA$.

Xét hai tam giác AOC và COF, chúng có $OA = OF$, OC chung, nhưng $CF > AC$ suy ra $\widehat{O_3} > \widehat{O_1}$, từ đó $\overset{\frown}{EF} > \overset{\frown}{AE}$.

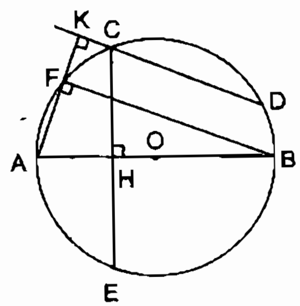
(Sử dụng định lí : Nếu hai tam giác có hai cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một nhưng các cạnh thứ ba không bằng nhau thì các góc xen giữa hai cạnh đó cũng không bằng nhau và góc nào đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn).

12. (h.24) a) CD và FB đều vuông góc với AK nên $CD // FB$.

Suy ra $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB}$ (1)

(hai cung bị chắn giữa hai dây song song).

b) Do tính chất đối xứng qua đường kính AB ta có $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BE}$. (2)



Hình 24

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được

$\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{BE}$ (tính chất cộng hai cung)

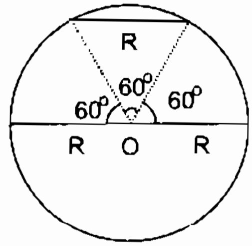
hay $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{DE}$. (3)

c) Với (3) ta suy ra $BF = DE$.

13. Học sinh vẽ hình, viết giả thiết và kết luận.

Từ $\overset{\frown}{IA} = \overset{\frown}{IB}$ suy ra $IA = IB$ (định lí 1). Lại có $OA = OB = R$ nên OI là đường trung trực của AB, do đó OI đi qua H, nói cách khác ba điểm O, H, I thẳng hàng hay đường thẳng IH đi qua O.

14. (h.25) Ta phân biệt : cung nhỏ, cung lớn và cung nửa đường tròn. Nếu không là cung lớn thì có thể là cung nhỏ hoặc cung nửa đường tròn. Ta thấy cung nửa đường tròn (180^0) có dây căng cung là một đường kính (2R) và cung 60^0 có dây căng cung là R. Vậy nửa đường tròn và cung 60^0 thoả mãn yêu cầu bài toán.



Hình 25

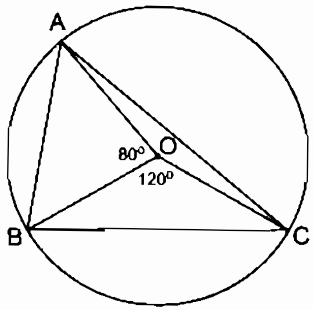
Bài tập bổ sung

2.1. Xem hình vẽ (h.bs.12).

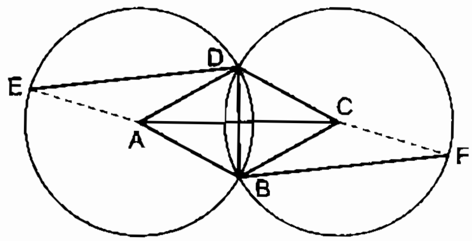
Ta có $\overset{\frown}{AOB} = 80^0$ và $\overset{\frown}{BOC} = 120^0$ kề nhau nên suy ra $\overset{\frown}{AOC} = 160^0$.

Vì số đo của cung bị chắn bằng số đo của góc ở tâm nên suy ra :

$$AB < BC < CA.$$



Hình bs.12



Hình bs.13

2.2 Xem hình vẽ (h.bs.13).

Theo giả thiết ta có $\overset{\frown}{EDB} = \overset{\frown}{FBD}$, suy ra $\overset{\frown}{EDA} = \overset{\frown}{FBC}$.

Từ đó hai tam giác cân ADE và CBF bằng nhau, suy ra $\overset{\frown}{EAD} = \overset{\frown}{BCF}$.

Vậy hai cung DE và BF bằng nhau.

§3. Góc nội tiếp

15. Cách vẽ

Vẽ đường tròn (O ; 1,5cm). Vẽ hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau. Nối A và B, B và C, C và D, D và A.

Vậy ABCD là một hình vuông (tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

16. (h.26) SM là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M nên $SM \perp OM$, suy ra

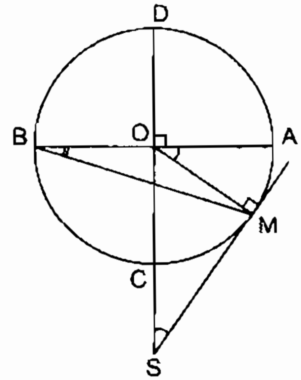
$$\widehat{MSD} = \widehat{MOA}$$

(cùng phụ với góc MOS).

Mặt khác $\widehat{MOA} = 2\widehat{MBA}$

(góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AM).

Vậy $\widehat{MSD} = 2.\widehat{MBA}$.



Hình 26

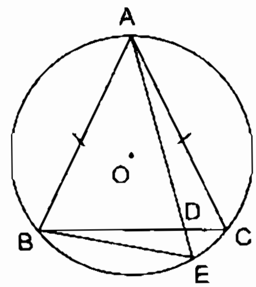
17. (h.27) Xét hai tam giác ABD và AEB. Chúng có :

$\widehat{A}$ chung, $\widehat{AEB} = \widehat{ABC}$ (chắn hai cung bằng nhau $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$).

Vậy $\Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g.g),

suy ra $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB}$,

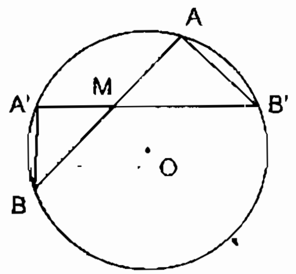
hay $AB^2 = AD.AE$.



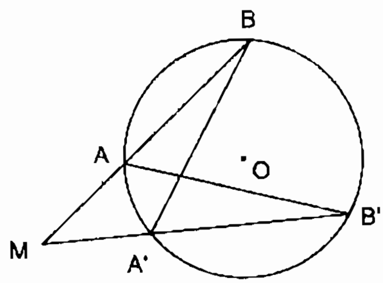
Hình 27

18. *Hướng dẫn.* Xét hai trường hợp :

- M ở bên trong đường tròn (h.28)
- M ở bên ngoài đường tròn (h.29).



Hình 28



Hình 29

Trong mỗi trường hợp, ta kẻ hai cát tuyến MAB và MA'B', rồi xét hai tam giác đồng dạng ΔMAB' và ΔMA'B, từ đó suy ra :

$$MA.MB = MA'.MB',$$

tức là tích MA.MB không đổi với mỗi điểm M cho trước cố định.

19. Áp dụng bài 18, ta có

$$BC^2 = AB(2R - AB)$$

Thay số, ta có

$$(28,4)^2 \approx 1,1.(2R - 1,1)$$

$$2,2R \approx 807,77$$

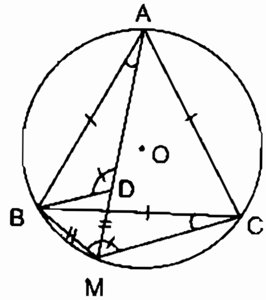
$$R \approx 367,2 \text{ (mét)}.$$

20. (h.30) a) Theo giả thiết, ta có

MB = MD, mà $\widehat{BMD} = 60^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn cung AB có số đo là 120°) vậy tam giác MBD là tam giác đều.

b) Ta có $\widehat{BAM} = \widehat{BCM}$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung BM).

$\widehat{ADB} = \widehat{BMC}$ (2) (vì góc ADB kề bù với góc 60° và góc BMC chắn cung 240°).



Hình 30

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{ABD} = \widehat{CBM}$ (3) (tổng các góc trong của một tam giác bằng 180°).

Vậy $\Delta BDA = \Delta BMC$ (c.g.c) (4) (vì AB = BC, BD = BM, $\widehat{ABD} = \widehat{CBM}$).

c) MA = MD + DA nhưng MD = MB (theo giả thiết)

DA = MC (suy từ (4))

Vậy MA = MB + MC.

21. (h.31) Từ giả thiết, ta suy ra số đo các cung nhỏ sau :

sđ $\overset{\frown}{CB} = 64^{\circ}$

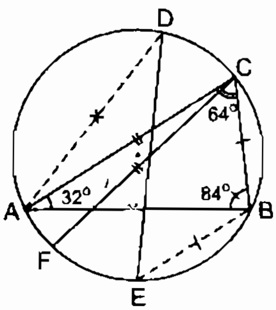
sđ $\overset{\frown}{BE} = 64^{\circ}$

sđ $\overset{\frown}{AB} = 128^{\circ}$

sđ $\overset{\frown}{AD} = 128^{\circ}$

sđ $\overset{\frown}{CA} = 168^{\circ}$

sđ $\overset{\frown}{CF} = 168^{\circ}$.



Hình 31

Do đó : $sđ\overset{\frown}{FE} = sđ\overset{\frown}{CF} - sđ\overset{\frown}{CE} = 168^o - 128^o = 40^o$

$sđ\overset{\frown}{AE} = sđ\overset{\frown}{AB} - sđ\overset{\frown}{BE} = 128^o - 64^o = 64^o$

$sđ\overset{\frown}{DE} = 360^o - sđ\overset{\frown}{DA} - sđ\overset{\frown}{AE} = 360^o - 128^o - 64^o = 168^o$.

Từ đó $\widehat{FDE} = 20^o$ (góc nội tiếp chắn cung FE có $sđ\overset{\frown}{FE} = 40^o$)

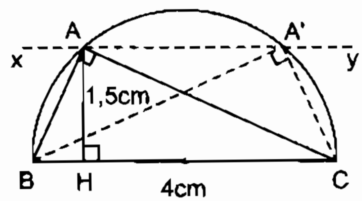
$\widehat{DFE} = 84^o$ (góc nội tiếp chắn cung DE có $sđ\overset{\frown}{DE} = 168^o$)

$\widehat{FED} = 180^o - 20^o - 84^o = 76^o$.

22. (h.32) Cách vẽ như sau :

- Vẽ đoạn thẳng BC dài 4cm.
- Vẽ nửa đường tròn đường kính BC.
- Vẽ đường thẳng xy // BC và cách BC một khoảng là 1,5cm.

Đường thẳng xy cắt nửa đường tròn tại A và A'.



Hình 32

Ta có tam giác ABC hoặc tam giác A'BC thoả mãn yêu cầu của đề toán

($\widehat{A} = 90^o$, BC = 4cm, AH = 1,5cm).

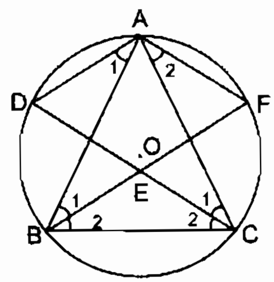
23. (h.33) Theo giả thiết ta suy ra các cung bằng nhau :

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{FC}.$$

Do đó $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ mà chúng ở vị trí so le trong nên AD // EF. (1)

$\widehat{A_2} = \widehat{C_1}$ mà chúng ở vị trí so le trong nên AF// CD. (2)

và AD = AF. (3)



Hình 33

Từ (1), (2), (3) suy ra ADEF là hình thoi.

Bài tập bổ sung

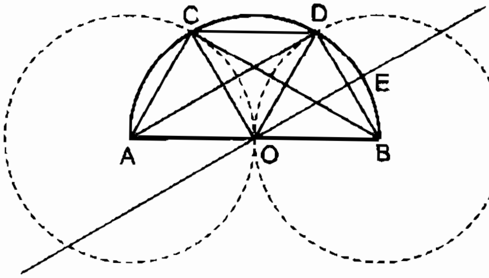
3.1. (E).

3.2. Xem hình vẽ (h.bs.14).

a) $\widehat{ADC}$ và $\widehat{ABC}$ bằng nhau vì là góc nội tiếp cùng chắn một cung.

b) Có thể chứng minh CD song song với AB theo một số cách sau đây :

Cách 1 : Từ giả thiết có AOC và BOD là hai tam giác đều, suy ra $\widehat{DOC} = 60^o$. Hơn nữa, OC = OD nên COD là tam giác đều, suy ra $\widehat{ODC} = \widehat{DOB} = 60^o$. Từ đó CD song song với AB.



Hình bs.14

Cách 2 : Hai dây AC và BD bằng nhau, nên hai cung AC và BD bằng nhau, suy ra hai dây AB và CD song song với nhau.

c) Vì AOC và BOD là hai tam giác đều nên AODC là hình thoi. Từ đó CO vuông góc với AD.

d) $\widehat{DAO} = 30^o$ vì là góc nội tiếp chắn cung BD.

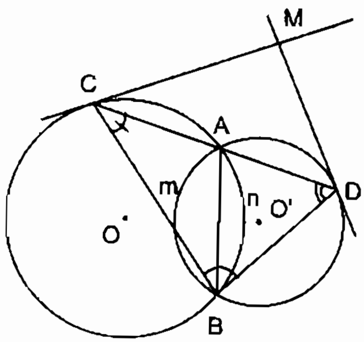
e) Vì AOC và BOD là hai tam giác đều, suy ra $\widehat{COD} = 60^0$. Vì AD song song với OE nên $\widehat{DAO} = \widehat{EOB} = 30^o$ (góc đồng vị), suy ra $\widehat{DOE} = \widehat{EOB} = 30^o$. Từ đó suy ra số đo cung CD gấp đôi số đo cung BE.

§4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây

24. (h.34) a) Trong tam giác CBD, ta có :

$$\widehat{C} = \frac{sđ\overparen{AnB}}{2}$$

$$\widehat{D} = \frac{sđ\overparen{AmB}}{2}$$



Hình 34

Vì $\overset{\frown}{AnB}$ và $\overset{\frown}{AmB}$ cố định nên $\widehat{C}, \widehat{D}$ có giá trị không đổi, suy ra $\widehat{CBD}$ có giá trị không đổi, không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến CAD khi cát tuyến đó quay xung quanh điểm A.

b) Gọi M là giao điểm của hai tia tiếp tuyến tại C và D của (O) và (O').

Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{ACM}$ (1) (cùng chắn cung nhỏ CA của (O)),

$\widehat{ABD} = \widehat{ADM}$ (2) (cùng chắn cung nhỏ DA của (O')).

Cộng (1) và (2) vế với vế được

$$\widehat{ABC} + \widehat{ABD} = \widehat{ACM} + \widehat{ADM} = \widehat{CBD} \text{ (không đổi).}$$

Suy ra $\widehat{CMD}$ không đổi (tổng các góc trong một tam giác bằng 180^0).

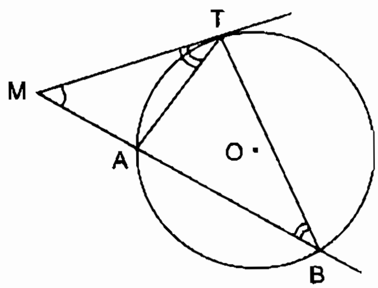
25. (h.35) a) Xét hai tam giác BMT và TMA.

Chúng có $\widehat{M}$ chung,

$\widehat{B} = \widehat{MTA}$ (cùng chắn cung nhỏ AT)

nên $\Delta BMT \backsim \Delta TMA$, suy ra

$$\frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT} \text{ do đó } MT^2 = MA.MB.$$



Hình 35

Vì cát tuyến MAB kẻ tuỳ ý nên ta luôn có $MT^2 = MA.MB$ không phụ thuộc vị trí của cát tuyến MAB.

b) (h.36) Gọi bán kính đường tròn là R.

$$MT^2 = MA.MB$$

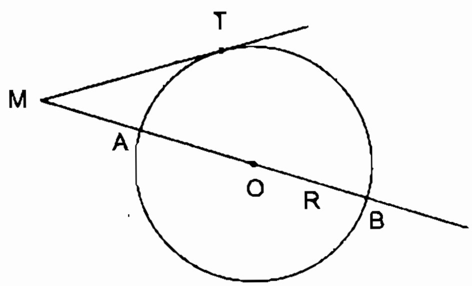
$$MT^2 = (MB - 2R).MB.$$

Thay số ta có

$$20^2 = (50 - 2R).50$$

$$400 = 2500 - 100R$$

$$R = 21 \text{ (cm).}$$



Hình 36

26. (h.37) Áp dụng kết quả bài 25, ta có

$$MT^2 = MA.MB$$

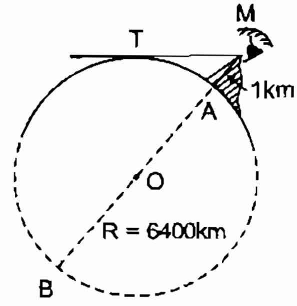
$$MT^2 = MA(MA + 2R).$$

Thay số, ta có

$$MT^2 = 1(1 + 12800)$$

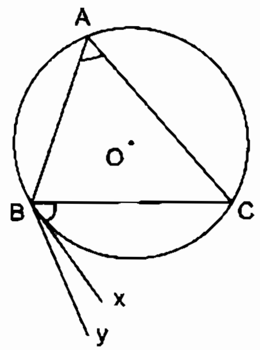
$$MT^2 = 12801$$

$$MT \approx 113{,}1 \text{ (km)}.$$

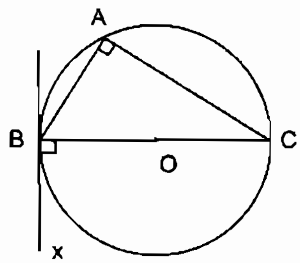


Hình 37

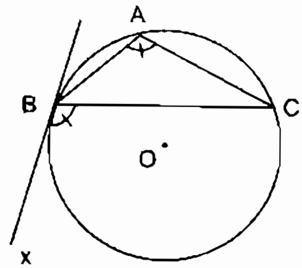
27.



Hình 38



Hình 39



Hình 40

Cách thứ nhất (h.38, 39, 40)

Giả sử Bx không phải là tiếp tuyến của (O), ta vẽ tia By là tiếp tuyến của (O) tại B, hai tia Bx và By cùng nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ chứa BC. Ta có

$\widehat{CBy} = \widehat{BAC}$ (định lí về số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung),

$\widehat{CBx} = \widehat{BAC}$ (giả thiết).

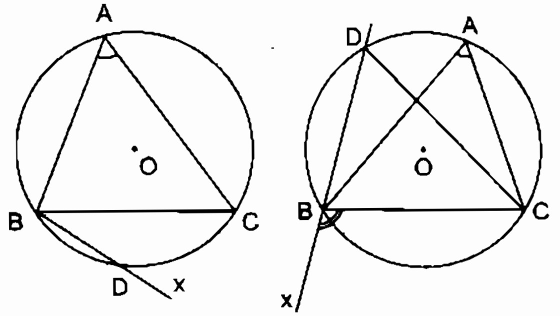
Từ đó $\widehat{CBy} = \widehat{CBx}$, tức là hai tia By và Bx khác nhau tạo với tia BC cùng một góc. Điều này trái với tính chất đã được công nhận ở lớp 6 (tiên đề về đặt tia trên nửa mặt phẳng). Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng điều giả sử Bx không phải là tiếp tuyến là sai, suy ra Bx là tiếp tuyến của (O).

Cách thứ hai (h.41a)

Giả sử Bx không phải là tiếp tuyến, thì nó là cát tuyến, khi đó nó cắt cung nhỏ BC tại D và $\widehat{CBx}$ là góc nội tiếp chắn cung CD.

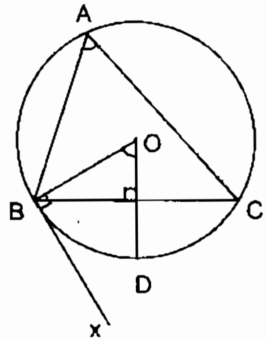
$$\widehat{CBx} = \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{DC} \left(< \frac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{BC} \right)$$

tức là $\widehat{CBx} < \widehat{BAC}$. Điều này trái với giả thiết. Vậy Bx là tiếp tuyến của (O) tại B (có thể tia Bx không cắt cung nhỏ BC, mà tia đối của tia Bx cắt cung lớn BC tại D (h.41b). Khi đó dễ dàng chứng minh rằng $\widehat{CBx} > \widehat{BAC}$ (trái với giả thiết)).



a) b)

Hình 41



Hình 42

Cách thứ ba (h.42)

Gọi D là điểm chính giữa của cung BC, khi đó $\widehat{BOD} = \widehat{A}$, theo giả thiết thì $\widehat{A} = \widehat{CBx}$, suy ra $\widehat{BOD} = \widehat{CBx}$.

Mặt khác $\widehat{BOD} + \widehat{CBO} = 90^o$ nên $\widehat{CBx} + \widehat{CBO} = 90^o$. Vậy $Bx \perp BO$ hay Bx là tiếp tuyến của (O) tại B.

Bài tập bổ sung

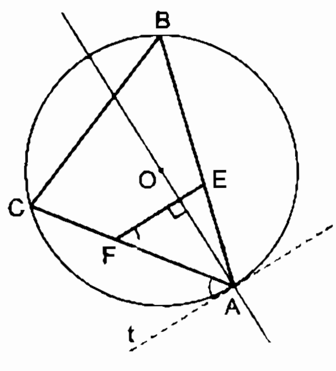
4.1. Xem hình vẽ (h.bs.15).

Kẻ tiếp tuyến At của đường tròn (O).

Khi đó, FE song song với At nên ta có $\widehat{EFA} = \widehat{FAt}$ (so le trong).

Mặt khác, $\widehat{CAt} = \widehat{CBA}$ (cùng bằng nửa số đo cung nhỏ CA).

Mà $\widehat{EFA} + \widehat{EFC} = 180^o$ (kề bù), suy ra $\widehat{CBE} + \widehat{EFC} = 180^o$.

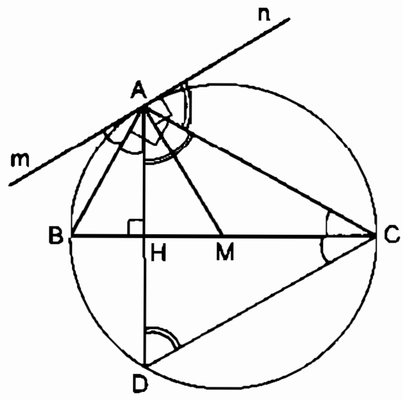


Hình bs.15

Vì tổng các góc trong tứ giác bằng 360^o mà $\widehat{CBE} + \widehat{EFC} = 180^o$ nên suy ra $\widehat{BCF} + \widehat{BEF} = 180^o$.

4.2. Xem hình vẽ (h.bs.16).

Ta có MA = MB = MC nên đường tròn tâm M bán kính MA đi qua A, B và C.
Gọi D là giao điểm của AH với đường tròn vừa dựng thì hai cung nhỏ BA, BD bằng nhau, đồng thời hai cung nhỏ CA, CD bằng nhau.
Do mn là tiếp tuyến tại A của đường tròn, dựa vào tính chất của góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung suy ra $\widehat{mAB} = \widehat{ACB} = \widehat{BCD} = \widehat{BAH}$.



Hình bs.16

Tương tự, chứng minh được $\widehat{CAH} = \widehat{CDA} = \widehat{CAn}$.

Vậy, AB là tia phân giác của $\widehat{mAH}$ và AC là tia phân giác của $\widehat{nAH}$.

§5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

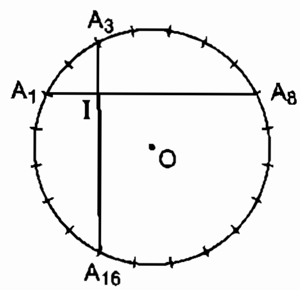
28. (h.43) Đường tròn được chia thành 20 cung bằng nhau, vậy số đo mỗi cung là $360^o : 20 = 18^o$.

Gọi giao điểm của hai dây A_1A_8 và A_3A_{16} là I.

$$\widehat{A_1IA_3} = \frac{sđ\overset{\frown}{A_1A_3} + sđ\overset{\frown}{A_8A_{16}}}{2}$$

$$= \frac{18^o.2 + 18^o.8}{2} = 90^o.$$

Vậy $A_1A_8 \perp A_3A_{16}$.



Hình 43

29. (h.44) Góc C có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, nên

$$\widehat{C} = \frac{sđ\overset{\frown}{AmB} - sđ\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{sđ\overset{\frown}{ADB} - sđ\overset{\frown}{AD}}{2}$$

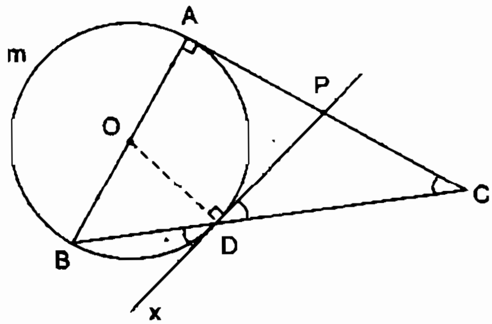
do đó $\widehat{C} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{BD}}{2}$. (1)

$\widehat{CDP} = \widehat{BDx}$ (hai góc đối đỉnh) ; (2)

$\widehat{BDx} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{BD}}{2}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và một dây). (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $\widehat{C} = \widehat{CDP}$

suy ra tam giác CPD cân, do đó PD = PC.



Hình 44

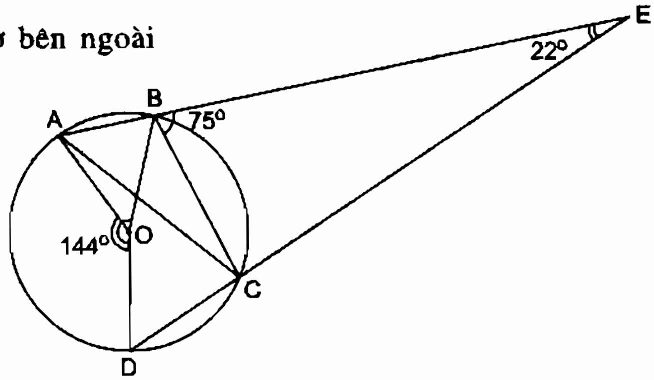
30. (h.45) $\widehat{E}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, nên

$$\widehat{E} = \frac{sđ\overset{\frown}{AD} - sđ\overset{\frown}{BC}}{2}$$

hay $22^o = \dfrac{144^o - sđ\overset{\frown}{BC}}{2}$.

Suy ra

$sđ\overset{\frown}{BC} = 144^o - 2 \times 22^o = 100^o$.



Hình 45

Do đó $\widehat{BAC} = 50^o$. (1)

Mặt khác $\widehat{CBE} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$ (góc ngoài của tam giác)

hay $75^o = 50^o + \widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{ACB} = 75^o - 50^o = 25^o$

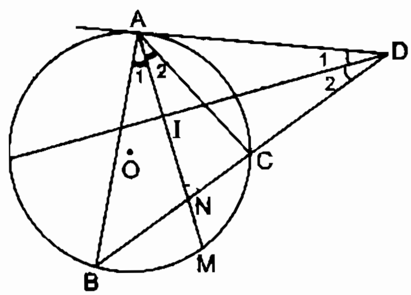
hay $sđ\overset{\frown}{AB} = 50^o$ (số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn).

Vậy $\widehat{AOB} = 50^o$. (2)

So sánh (1) và (2), ta có $\widehat{AOB} = \widehat{BAC}$.

31. (h.46) Gọi giao điểm của AM và BC là N, ta có

$$\widehat{AND} = \frac{sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{BM}}{2}.$$



Hình 46

Nhưng $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{CM}$ (vì AM là tia phân giác)

nên $\widehat{AND} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AC} + sđ\overset{\frown}{CM}}{2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AM}}{2}$. (1)

Mặt khác $\widehat{NAD} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{AM}}{2}$ (2) (góc tạo bởi tia tiếp tuyến AD và dây AM).

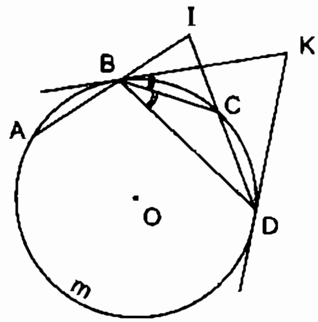
So sánh (1) và (2) ta có $\widehat{AND} = \widehat{NAD}$ hay tam giác DAN cân tại D, suy ra tia phân giác DI đồng thời là đường cao. Do đó DI ⊥ AM.

32. (h.47) a) Theo giả thiết ta có

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}. \qquad (1)$$

$\widehat{BIC}$ là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn, nên

$$\widehat{BIC} = \frac{sđ\overset{\frown}{AmD} - sđ\overset{\frown}{BC}}{2}. \qquad (2)$$



Hình 47

$\widehat{BKD}$ cũng là góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn (hai cạnh là tiếp tuyến của đường tròn), nên

$$\widehat{BKD} = \frac{sđ\overset{\frown}{BAD} - sđ\overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{sđ(\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AmD}) - sđ(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD})}{2}.$$

Do (1), ta có

$$\widehat{BKD} = \frac{sđ\overset{\frown}{AmD} - sđ\overset{\frown}{BC}}{2}. \qquad (3)$$

So sánh (2) và (3) suy ra $\widehat{BIC} = \widehat{BKD}$.

b) $\widehat{KBC}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây nên

$$\widehat{KBC} = \frac{sđ\overset{\frown}{BC}}{2}. \qquad (4)$$

$\widehat{CBD}$ là góc nội tiếp nên

$$\widehat{CBD} = \frac{sđ\overset{\frown}{CD}}{2}. \qquad (5)$$

Từ (1), (4), (5) suy ra $\widehat{KBC} = \widehat{CBD}$ hay BC là tia phân giác của $\widehat{KBD}$.

Chú ý. Không yêu cầu chứng minh tia nằm giữa.

• Giả thiết AB = BC = CD (nhỏ hơn R) để có hình vẽ như trên. Không yêu cầu biện luận về điều kiện "nhỏ hơn R".

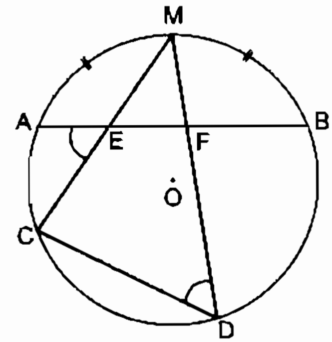
Bài tập bổ sung

5.1. Xem hình vẽ (h.bs.17).

Ta có cung AM và MB bằng nhau, suy ra tổng số đo của hai cung (nhỏ) MA và AC bằng tổng số đo của hai cung (nhỏ) MB và AC. Suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{CDM}$ (cùng bằng nửa tổng số đo của hai cung nhỏ MA và AC).

Mà $\widehat{AEC} + \widehat{FEC} = 180^o$ (kề bù), suy ra $\widehat{CDF} + \widehat{FEC} = 180^o$.

Vì tổng các góc trong tứ giác bằng 360^o mà $\widehat{CDF} + \widehat{FEC} = 180^o$ nên suy ra $\widehat{EFD} + \widehat{ECD} = 180^o$.



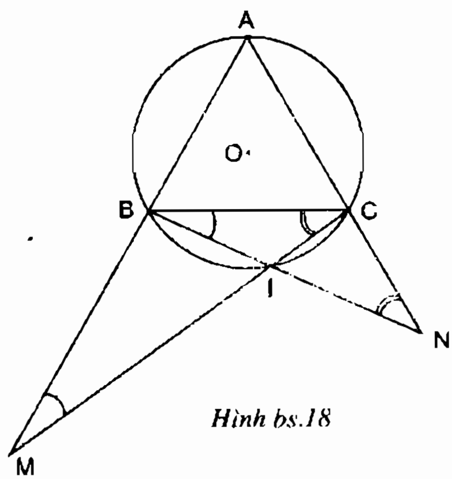
Hình bs.17

5.2. Xem hình vẽ (h.bs.18).

Theo giả thiết các cung (nhỏ) AB, BC, CA bằng nhau.

a) Ta có sđ $\overset{\frown}{BI}$ = sđ $\overset{\frown}{BC}$ − sđ $\overset{\frown}{CI}$ = sđ $\overset{\frown}{AB}$ − sđ $\overset{\frown}{CI}$ $\Rightarrow \widehat{BCI} = \widehat{ANB}$.

b) Ta có sđ $\overset{\frown}{CI}$ = sđ $\overset{\frown}{BC}$ − sđ $\overset{\frown}{BI}$ = sđ $\overset{\frown}{AC}$ − sđ $\overset{\frown}{BI}$ $\Rightarrow \widehat{CBI} = \widehat{AMC}$.



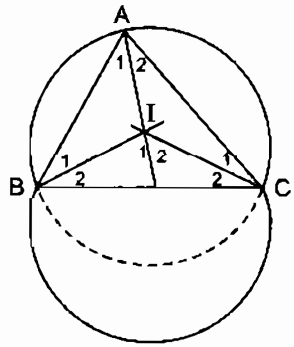
Hình bs.18

§6. Cung chứa góc

33. (h.48) Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có :

$$\hat{I}_1 = \hat{B}_1 + \hat{A}_1 \qquad (1)$$

$$\hat{I}_2 = \hat{C}_1 + \hat{A}_2. \qquad (2)$$



Hình 48

Cộng (1) và (2) vế với vế, ta có

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \underbrace{\hat{B}_1 + \hat{A}_1 + \hat{C}_1}_{} + \hat{A}_2$$

hay $\widehat{BIC} = 90^o + \hat{A}_2.$

Vậy $\widehat{BIC} = 90^o + \dfrac{\alpha}{2}$ không đổi.

Điểm I nhìn đoạn thẳng BC cố định dưới góc $90^o + \dfrac{\alpha}{2}$ không đổi nên quỹ tích của I là cung chứa góc $90^o + \dfrac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC (hai cung đối xứng nhau qua đường thẳng BC).

34. (h.49) Trình tự dựng như sau :

Dựng AB = 3cm ;

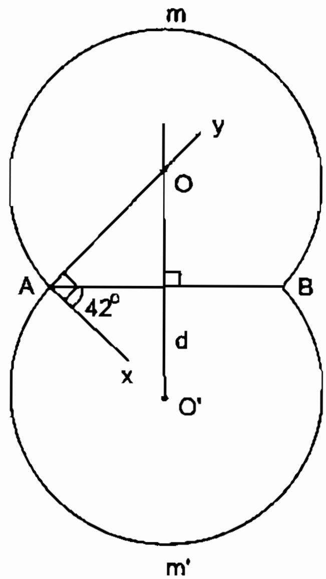
Dựng $\widehat{BAx} = 42^o$;

Dựng Ay vuông góc với Ax tại A ;

Dựng đường trung trực d của AB ;

Gọi O là giao điểm của d và Ay.

Dựng cung tròn AmB tâm O bán kính OA.



Hình 49

Dựng cung tròn Am'B đối xứng với $\overset{\frown}{AmB}$ qua đường thẳng AB.

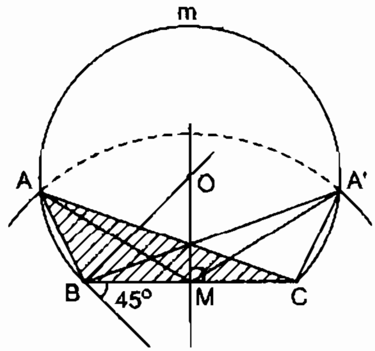
35. (h.50) Trình tự dựng gồm các bước sau :

- Dựng đoạn thẳng BC = 3cm.
- Dựng cung chứa góc 45° trên đoạn thẳng BC (cung BmC).
- Gọi M là trung điểm của BC.

Dựng đường tròn tâm M, bán kính 2,5cm.

Đường tròn này cắt $\overset{\frown}{BmC}$ tại A và A'.

Tam giác ABC (hoặc A'BC) là tam giác thoả mãn yêu cầu đề bài (BC = 3cm, $\widehat{A} = 45^{\circ}$, trung tuyến AM = 2,5cm).



Hình 50

36. (h.51)

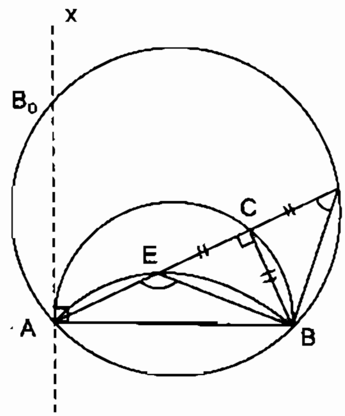
a) *Quỹ tích điểm* D

- *Phần thuận.* Ta có :

AB cố định

$\overset{\frown}{ADB} = 45^{\circ}$ (vì tam giác BCD vuông cân).

Vậy khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB thì D chuyển động trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng AB cố định.



Hình 51

- *Giới hạn quỹ tích*

Dây AC thay đổi phụ thuộc vị trí điểm C trên nửa đường tròn đường kính AB cố định ; AC lớn nhất, bằng đường kính của nửa đường tròn, khi C trùng với B, khi đó D cũng trùng với B, vậy B thuộc quỹ tích. AC nhỏ nhất bằng 0 khi C trùng với A, khi đó D trùng với B_0 (B_0 là giao điểm của cung chứa góc 45° và tia tiếp tuyến Ax tại A của nửa đường tròn).

- *Phần đảo.* Lấy điểm D' tuỳ ý trên cung BB_0, nối AD' cắt nửa đường tròn đường kính AB tại C'. Khi đó ta dễ dàng chứng minh được C'D' = C'B.

- *Kết luận.* Quỹ tích các điểm D khi C chạy trên nửa đường tròn là cung BB_0 nằm trên cung chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng AB, trong nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm C (bị giới hạn bởi tiếp tuyến Ax).

b) *Quỹ tích điểm* E

• *Phần thuận.* Ta có :

AB cố định

$\widehat{AEB} = 135^o$ (góc ngoài của tam giác vuông cân BCE).

Vậy khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB thì E chuyển động trên cung chứa góc 135^o dựng trên đoạn thẳng AB cố định.

• *Phần đảo*

Lấy điểm E' bất kì trên cung chứa góc 135^o. Tia AE' cắt nửa đường tròn tại C'. Vì $\widehat{AE'B}$ là góc ngoài của tam giác vuông BC'E', mà $\widehat{AE'B} = 135^o$, suy ra $\widehat{C'BE'} = 45^o$, từ đó tam giác BC'E' là tam giác vuông cân và C'E' = C'B.

• *Kết luận.* Quỹ tích các điểm E khi C chạy trên nửa đường tròn là cung chứa góc 135^o dựng trên đoạn thẳng AB (một cung).

37. (h.52)

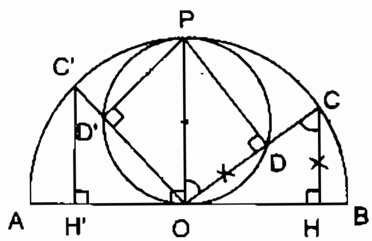
• *Phần thuận*

Vẽ OP vuông góc với AB (P thuộc nửa đường tròn). Nối P với D. Xét hai tam giác OPD và COH, chúng có :

OD = CH (theo giả thiết)

OP = OC (bán kính nửa đường tròn)

$\widehat{POD} = \widehat{OCH}$ (hai góc so le trong).



Hình 52

Vậy $\Delta OPD = \Delta COH$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ODP} = 90^o$.

Mà O, P cố định. Vậy điểm D nằm trên đường tròn đường kính OP.

• *Phần đảo*

Lấy điểm D' bất kì trên đường tròn đường kính OP, tia OD' cắt nửa đường tròn đường kính AB tại C'. Hạ đường vuông góc C'H' với AB. Ta phải chứng minh OD' = C'H'.

Xét hai tam giác vuông OD'P và C'H'O. Chúng có cạnh huyền bằng nhau (OP = OC' bằng bán kính nửa đường tròn đã cho) và một góc nhọn bằng nhau ($\widehat{POD'} = \widehat{OC'H'}$ vì ở vị trí so le trong), vậy $\Delta OD'P = \Delta C'H'O$, suy ra OD' = C'H'.

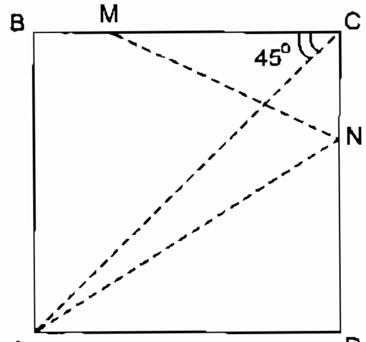
• *Kết luận*

Quỹ tích các điểm D khi C chạy trên nửa đường tròn đường kính AB là đường tròn đường kính OP, với $OP = \frac{AB}{2}$.

38. *Phân tích* (h.53). Giả sử đã dựng được hình vuông thoả mãn yêu cầu của đề bài. Ta có thể quy bài toán về việc dựng đỉnh C. Đỉnh C là giao điểm của :

– Cung chứa góc 90° dựng trên đoạn thẳng MN (vì $\widehat{BCD} = 90^{\circ}$ mà BC chứa M, CD chứa N).

– Cung chứa góc 45° dựng trên đoạn thẳng AM. (vì đường chéo AC cũng là đường phân giác nên $\widehat{ACB} = 45^{\circ}$ mà CB lại chứa M).



Hình 53

Cách dựng

– Dựng cung chứa góc 90° trên đoạn thẳng MN.

– Dựng cung chứa góc 45° trên đoạn thẳng AM.

Giao điểm của hai cung trên chính là đỉnh C của hình vuông.

Nối C với M, nối C với N, kẻ AB vuông góc với MC, kẻ AD vuông góc với CN. Ta có tứ giác ABCD là hình vuông phải dựng.

Bài tập bổ sung

6.1. Có thể dựng cung chứa góc 60° trên đoạn thẳng AB theo cách được học trong SGK hoặc theo cách tương tự bài tập 46 trong SGK.

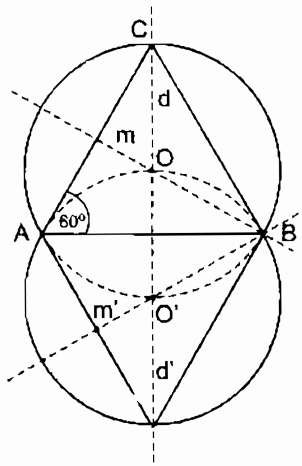
Vì bài này có góc đặc biệt là 60° nên có thể làm theo cách sau :

– Dùng AB làm cạnh dựng một tam giác đều ABC (h.bs.19).

– Dựng đường trung trực của hai cạnh, chẳng hạn AB và AC. Khi đó xác định được điểm O sao cho OA = OB = OC.

– Lấy O làm tâm vẽ đường tròn bán kính R = OA, đường tròn này đi qua 3 điểm A, B, C.

Vì $\widehat{ACB} = 60^{\circ}$ nên cung (lớn) AB là cung chứa góc 60°.



Hình bs.19

Lấy đối xứng qua đường thẳng AB, ta được cung chứa góc thứ hai thỏa mãn bài toán.

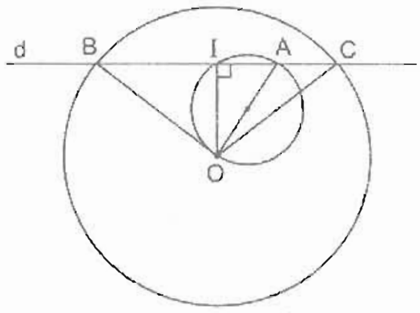
Chú ý : Cung nhỏ AB trong cách dựng trên là cung chứa góc 120^o.

6.2. Xem hình vẽ (h.bs.20).

Ta có : hai điểm O, A và đường tròn (O) cố định ; các độ dài R, OA không đổi ; đường thẳng d di động kéo theo hai điểm B, C di động, kéo theo điểm I di động ; I là điểm sinh quỹ tích.

Vì OBC là tam giác cân (OB = OC = R) nên OI vuông góc với BC.

Như vậy, điểm I di động, luôn nhìn hai điểm O, A cố định dưới góc vuông, do đó quỹ tích I là đường tròn đường kính AO.



Hình bs.20

6.3. Trước hết cần làm xuất hiện tổng MA + MB + MC, sau đó tìm điều kiện để tổng ấy là nhỏ nhất.

Lấy MC làm cạnh, dựng tam giác đều MCN (h.bs.21), khi đó MC = MN.

Lấy AC làm cạnh dựng tam giác đều ACP (h.bs.22), khi đó AC = PC.

Đồng thời $\widehat{MCA} + \widehat{ACN} = 60^o = \widehat{PCN} + \widehat{ACN}$, suy ra $\widehat{MCA} = \widehat{PCN}$.

Do đó, CMA và CNP là hai tam giác bằng nhau (c.g.c), suy ra :

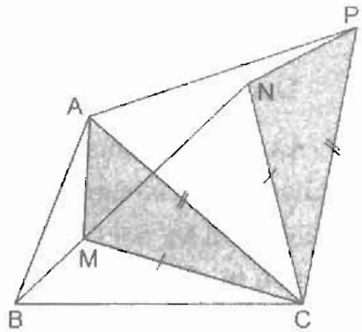
$$MA = NP \text{ và } \widehat{CMA} = \widehat{CNP}.$$

Từ đó : MA + MB + MC = NP + MB + MN.

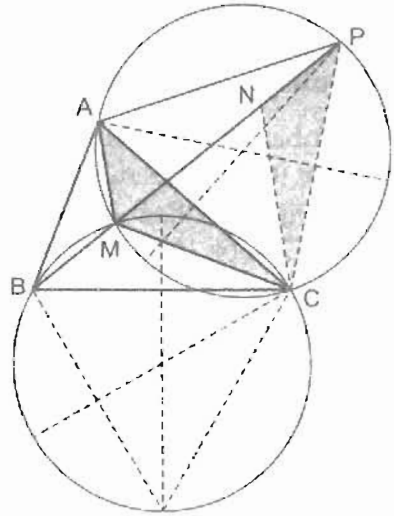
Do B, P cố định khi cho trước tam giác ABC nên BM + MN + NP ngắn nhất khi và chỉ khi 4 điểm B, M, N, P thẳng hàng.

Do $\widehat{CMN} = 60^o$ nên 3 điểm B, M, N thẳng hàng khi và chỉ khi $\widehat{BMC} = 120^o$.

Tương tự, do $\widehat{CNM} = 60^o$ nên 3 điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\widehat{CNP} = 120^o$.



Hình bs.21



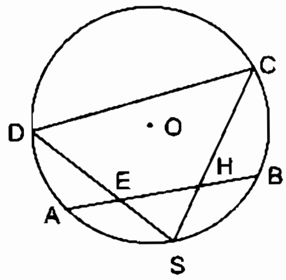
Hình bs.22

Vậy MA + MB + MC nhỏ nhất khi và chỉ khi $\widehat{BMC} = 120^o$ và $\widehat{AMC} = 120^o$.

Suy ra M là giao điểm của hai cung chứa góc 120^o, tương ứng dựng qua hai điểm B, C và C, A (h.bs.22).

§7. Tứ giác nội tiếp

39. (h.54) $\widehat{DEB}$ là góc có đỉnh ở trong đường tròn (O), nên



Hình 54

$$\widehat{DEB} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{DCB} + sđ\,\overset{\frown}{AS}}{2}. \quad (1)$$

$\widehat{DCS}$ là góc nội tiếp đường tròn (O) nên

$$\widehat{DCS} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{DAS}}{2} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{DA} + sđ\,\overset{\frown}{AS}}{2}. \quad (2)$$

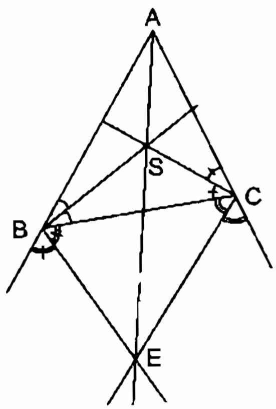
Từ (1) và (2), ta có

$$\widehat{DEB} + \widehat{DCS} = \frac{sđ\,\overset{\frown}{DCB} + sđ\,\overset{\frown}{AS} + sđ\,\overset{\frown}{DA} + sđ\,\overset{\frown}{AS}}{2}.$$

Mà $\overset{\frown}{AS} = \overset{\frown}{SB}$ (S là điểm chính giữa của cung AB),

do vậy $\widehat{DEB} + \widehat{DCS} = \dfrac{sđ\,\overset{\frown}{DCB} + sđ\,\overset{\frown}{AS} + sđ\,\overset{\frown}{DA} + sđ\,\overset{\frown}{SB}}{2} = \dfrac{360^o}{2} = 180^o$.

Vậy tứ giác EHCD nội tiếp được đường tròn vì có tổng hai góc đối diện bằng 180^o.



Hình 55

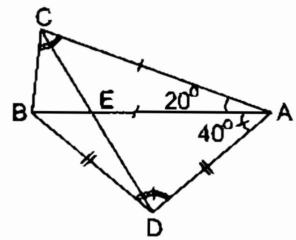
40. (h.55) $\widehat{SBE} = 90^o$ (góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù) ;

$\widehat{SCE} = 90^o$ (góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù).

Vậy $\widehat{SBE} + \widehat{SCE} = 180^o$ suy ra BSCE là tứ giác nội tiếp.

41. (h.56) a) Từ tam giác ABC cân, ta có

$$\widehat{BCA} = \frac{180^o - 20^o}{2} = 80^o. \qquad (1)$$



Hình 56

Từ tam giác ADB cân, ta có

$$\widehat{ADB} = 180^o - 2 \times 40^o = 100^o. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{BCA} + \widehat{ADB} = 80^o + 100^o = 180^o.$$

Vậy ACBD là tứ giác nội tiếp.

b) $\widehat{AED}$ là góc có đỉnh ở trong đường tròn, nên

$$\widehat{AED} = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD}}{2}.$$

Mà $\widehat{BAC} = 20^o$ là góc nội tiếp chắn cung BC nên sđ $\overset{\frown}{BC} = 40^o$

$\widehat{ABD} = 40^o$ là góc nội tiếp chắn cung AD nên sđ $\overset{\frown}{AD} = 80^o$.

Vậy $\quad \widehat{AED} = \dfrac{40^o + 80^o}{2} = 60^o.$

42. (h.57) Nối PA, PB, PC, AM, AN ta có các tứ giác nội tiếp AMBP, BDCP và APCN.

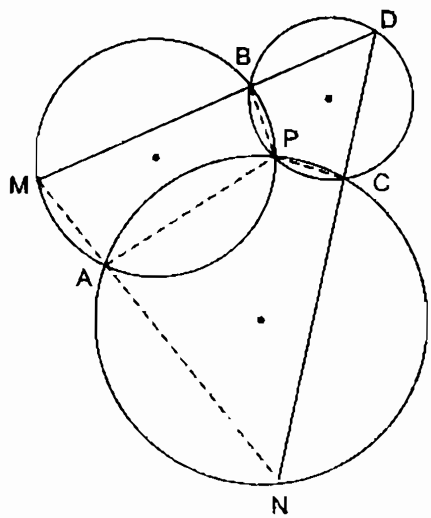
$\widehat{MAP} = \widehat{PBD}$ (cùng bù với $\widehat{MBP}$)

$\widehat{PAN} = \widehat{PCD}$ (cùng bù với $\widehat{PCN}$).

Suy ra

$$\widehat{MAP} + \widehat{PAN} = \widehat{PBD} + \widehat{PCD} = 180^o.$$

Do đó ba điểm M, A, N thẳng hàng.



Hình 57

43. (h.58) Từ giả thiết AE.EC = BE.ED, suy ra

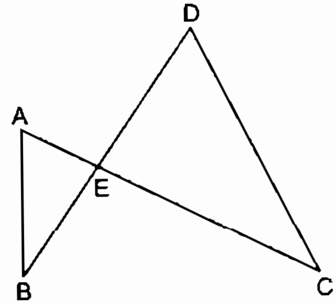
$$\frac{AE}{ED} = \frac{EB}{EC}. \qquad (1)$$

Ta lại có $\widehat{AEB} = \widehat{DEC}$ (đối đỉnh). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AEB \backsim \Delta DEC$,

từ đó $\widehat{BAE} = \widehat{CDE}$.

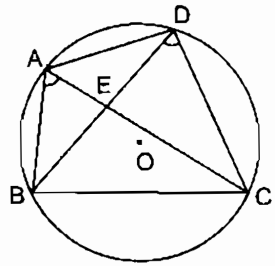
Đoạn thẳng BC cố định, $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, A và D ở trong cùng một nửa mặt phẳng có bờ BC nên bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.



Hình 58

Nhận xét

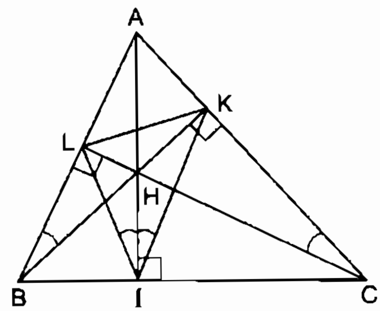
Nếu một tứ giác có hai đỉnh kề nhau nhìn cạnh nối hai đỉnh còn lại dưới hai góc bằng nhau thì tứ giác ấy nội tiếp được trong một đường tròn (h.59).



Hình 59

Bài tập bổ sung

7.1. Vì tam giác ABC có ba góc nhọn nên các đường cao cắt nhau tại điểm H nằm trong tam giác đó (h.bs.23).



Hình bs.23

a) LHIB, HICK, HKAL là các tứ giác nội tiếp vì có tổng hai góc đối diện bằng 180^0.

BLKC, CILA, AKIB là các tứ giác nội tiếp vì có hai đỉnh cùng nhìn một cạnh dưới một góc vuông.

b) LHIB là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{LBH} = \widehat{LIH}$ (cùng chắn cung nhỏ LH).

HICK là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{HIK} = \widehat{HCK}$ (vì cùng chắn cung nhỏ KH).

BLKC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{LBK} = \widehat{LCK}$ (vì cùng chắn cung nhỏ LK).

Từ đó suy ra $\widehat{LBH} = \widehat{LIH} = \widehat{KIH} = \widehat{KCH}$.

c) Bằng cách tương tự ý b) của bài này ta chứng minh được $\widehat{HCI} = \widehat{HKI} = \widehat{HKL} = \widehat{HAL}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

7.2. Xem hình vẽ (h.bs.24).

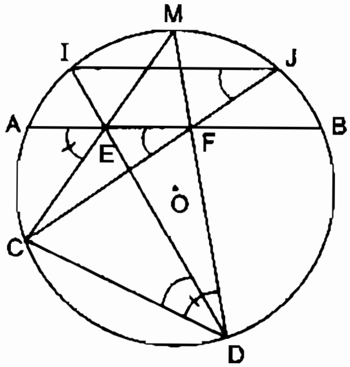
Ta có cung AM và MB bằng nhau nên $\widehat{AEC} = \widehat{CDM}$ (cùng bằng nửa số đo của cung nhỏ CM).

Suy ra CDFE là tứ giác nội tiếp.

Từ đó $\widehat{CDE} = \widehat{CFE}$ (cùng chắn cung CE).

Lại có $\widehat{IJC} = \widehat{IDC}$ (cùng chắn cung CI).

Vậy $\widehat{IJC} = \widehat{AFC}$, suy ra JI song song với AB.



Hình bs.24

§8. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

44. (h.60) Cách vẽ như sau :

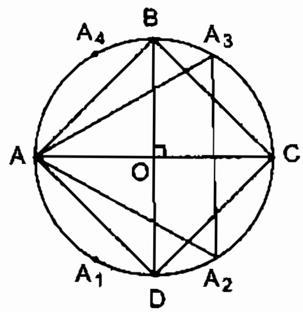
Vẽ đường tròn tâm O, bán kính R.

Vẽ hai đường kính AC và BD vuông góc với nhau.

Nối A với B, B với C, C với D, D với A, ta được tứ giác ABCD là hình vuông nội tiếp đường tròn (O ; R).

Từ điểm A ta đặt liên tiếp các cung $\overparen{AA_1}$, $\overparen{A_1A_2}$, $\overparen{A_2C}$, $\overparen{CA_3}$, $\overparen{A_3A_4}$ mà dây căng các cung đó có độ dài bằng R.

Nối A với A_2, A_2 với A_3, A_3 với A, ta được tam giác đều AA_2A_3 nhận O làm tâm.



Hình 60

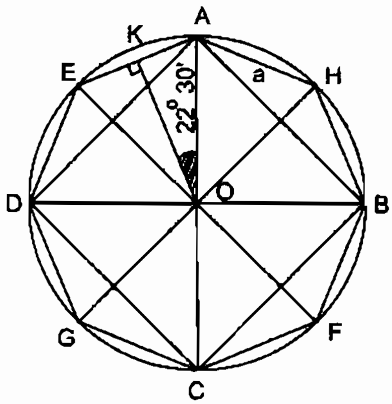
45. (h.61) Cách vẽ như sau :

Vẽ đường tròn tâm O, bán kính R = 2cm.

Vẽ hình vuông ABCD nội tiếp (O ; 2cm) như bài 44.

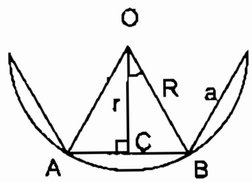
Vẽ hai đường kính EF, GH lần lượt vuông góc với AD và AB.

Nối A với E, E với D,... ta được đa giác AEDGCFBH là hình tám cạnh đều nội tiếp đường tròn (O ; 2cm).



Hình 61

46. (h.62) Giả sử một đa giác đều n cạnh có độ dài mỗi cạnh là a. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và r là bán kính đường tròn nội tiếp đa giác đều đó.



Hình 62

Xét tam giác vuông OCB, ta có :

$$\widehat{COB} = \frac{180^o}{n}$$

$$\sin\widehat{COB} = \frac{CB}{OB} = \frac{\frac{a}{2}}{R} \Rightarrow \sin\frac{180^o}{n} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^o}{n}} \\ a = 2R.\sin\dfrac{180^o}{n} \end{cases}$$

$$\text{tg}\widehat{COB} = \frac{CB}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow \text{tg}\frac{180^o}{n} = \frac{a}{2r} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{a}{2\text{tg}\dfrac{180^o}{n}} \\ a = 2r.\text{tg}\dfrac{180^o}{n} \end{cases}$$

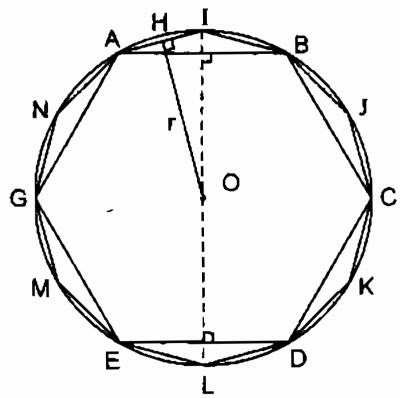
47. (h.63) a) Trình tự vẽ như sau :

- Vẽ đường tròn tâm O bán kính 2cm.

Từ một điểm A bất kì trên đường tròn (O ; 2cm) ta đặt liên tiếp các cung AB, BC,... mà dây căng cung dài 2cm. Nối A với B, B với C,... ta được lục giác đều ABCDEG nội tiếp đường tròn.

Còn có nhiều cách vẽ khác.

- Vẽ đường kính vuông góc với AB, DE, ta được I, L lần lượt là điểm chính giữa của các cung AB, DE.



Hình 63

Tương tự, ta lần lượt vẽ các trung điểm J, M, K, N của các cung BC, EG, CD, GA. Nối lại, ta có hình 12 cạnh đều AIBJCKDLEMGN.

b) AI là cạnh a của hình 12 cạnh đều nội tiếp đường tròn có bán kính R = 2cm. Áp dụng công thức $a = 2R.\sin\frac{180^o}{n}$, ta có

$$AI = 2 \times 2 \times \sin 15^o$$
$$\approx 4 \times 0,259$$
$$\approx 1,04 \text{ (cm)}.$$

c) OH là bán kính r của đường tròn nội tiếp hình 12 cạnh đều. Áp dụng công thức

$$r = \frac{a}{2.\text{tg}\frac{180^o}{n}}, \text{ ta có}$$

$$r \approx \frac{1,04}{2 \times \text{tg}\,15^o} \approx \frac{1,04}{2 \times 0,267} \approx 1,947 \text{ (cm)}.$$

48. a) Áp dụng công thức $a = 2R.\sin\frac{180^o}{n}$, ta có

$$a = 2.3.\sin 36^o \approx 6 \times 0,587 \approx 3,522 \text{ (cm)}.$$

b) Áp dụng công thức $a = 2r\,.\,\text{tg}\frac{180^o}{n}$, ta có

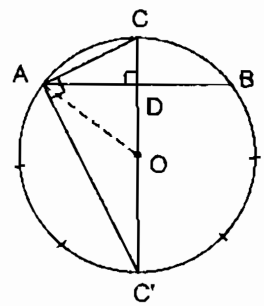
$$a = 2.3.\text{tg}36^o \approx 6 \times 0,726 \approx 4,356 \text{ (cm)}.$$

49. a) *Cách 1*. Áp dụng công thức $a = 2R\sin\frac{180^o}{n}$, ta có

$$a = 2R.\sin 22^o30' \approx 2.R.0,382 \approx 0,764.R.$$

b) *Cách 2* (h.64) :

CA là cạnh của hình bát giác đều nội tiếp vì $\overset{\frown}{AOC} = 45^o$.



Hình 64

Trong tam giác vuông CAC', ta có

$AC^2 = CD.CC'$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Ta biết $OD = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ (nửa cạnh hình vuông nội tiếp đường tròn (O ; R)).

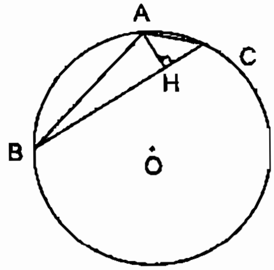
$$CD = OC - OD = R - \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R(2-\sqrt{2})}{2}\ ;$$

$$CC' = 2R.$$

Do đó $AC^2 = R^2(2-\sqrt{2}) \Rightarrow AC = R\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 0,76R.$

50. (h.65) Dây AB bằng cạnh hình vuông nội tiếp đường tròn (O ; R) nên $AB = R\sqrt{2}$ và cung nhỏ AB có sđ $\overset{\frown}{AB} = 90^o$.

Dây BC bằng cạnh tam giác đều nội tiếp nên $BC = R\sqrt{3}$ và cung nhỏ BC có sđ $\overset{\frown}{BC} = 120^o$. Từ đó



Hình 65

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC} = 120^o - 90^o = 30^o.$$

Vậy $\widehat{ABC} = 15^o$.

Từ đây ta có

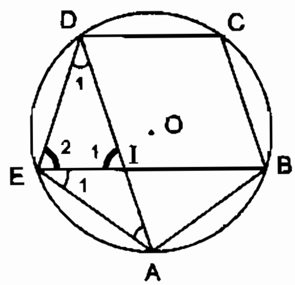
$$AH = AB.\sin\widehat{ABC} = \sqrt{2}R.\sin 15^o \approx 0{,}36R.$$

51. (h.66) Vẽ đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều ABCDE, ta có :

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{DE} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{EA} = \frac{360^o}{5} = 72^o. \quad (1)$$

$$\widehat{E}_1 = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}}{2} \quad (2)$$

$$\widehat{D}_1 = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{EA}}{2} \quad (3)$$



Hình 66

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{E}_1 = \widehat{D}_1$. (4)

Từ đó $\Delta AIE \backsim \Delta AED$ (theo (4) và vì $\widehat{A}$ chung)

suy ra $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AI}{AE}$. (5)

Lại có $\widehat{E}_2 = \dfrac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{CD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{BC}}{2}$ (6)

$$\widehat{I}_1 = \frac{\text{sđ}\,\overset{\frown}{DE} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}}{2}. \quad (7)$$

Từ (1), (6), (7) suy ra $\widehat{E}_2 = \widehat{I}_1$, từ đó DI = DE = AE. (8)

Thay (8) vào (5) ta có $\dfrac{DI}{AD} = \dfrac{AI}{DI}$ hay $DI^2 = AI.AD$.

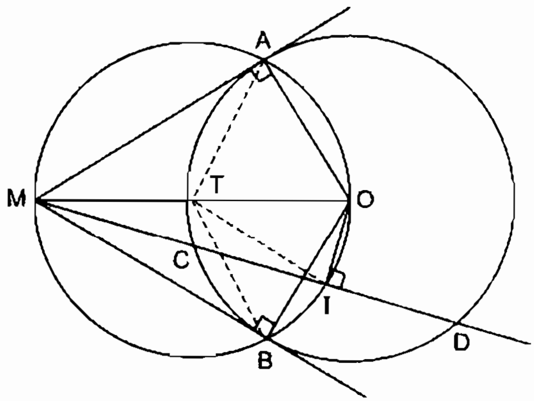
Bài tập bổ sung

8.1. Chỉ có các câu a), d), e), g) h) là đúng, các câu còn lại là sai.

8.2. Xem hình vẽ (h.bs.25).

Các điểm A, I, B cùng nhìn đoạn MO dưới một góc vuông, do đó cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

Vậy, MAOIB là ngũ giác nội tiếp.



Hình bs.25

§9. Độ dài đường tròn, cung tròn

52. Gọi a và b lần lượt là số tăng của bán kính R và r khi độ dài của mỗi đường tròn đều tăng thêm 1m. Ta có :

$$2\pi(R + a) = 2\pi R + 1 \Rightarrow 2\pi a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2\pi}(m)\ ;$$

$$2\pi(r + b) = 2\pi r + 1 \Rightarrow 2\pi b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2\pi}(m).$$

Vậy bán kính của mỗi đường tròn đều tăng $\frac{1}{2\pi}$(m).

53. a) Cạnh của lục giác đều bằng bán kính R của đường tròn ngoại tiếp, vậy theo giả thiết thì R = 4cm.

Độ dài đường tròn ngoại tiếp là $2\pi.4 = 8\pi$ (cm).

b) Cạnh a của hình vuông tính theo bán kính đường tròn ngoại tiếp là

$$a = R\sqrt{2}\text{, suy ra } R = \frac{a}{\sqrt{2}}\text{. Thay số ta có}$$

$$R = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ \text{(cm)}.$$

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp là $2\pi.2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.\pi$ (cm).

c) Cạnh a của tam giác đều tính theo bán kính đường tròn ngoại tiếp là

$$a = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\ (\text{cm}).$$

Độ dài đường tròn ngoại tiếp là

$$2\pi . 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.\pi\ (\text{cm}).$$

54. Gọi R là bán kính Trái Đất, ta có $2\pi R \approx 40\,000$km.

Vậy $$R \approx \frac{40\,000}{2\pi} \approx \frac{40\,000}{6{,}28} \approx 6369\,(\text{km}).$$

55. Cung 180^o ứng với 20 000 (km),

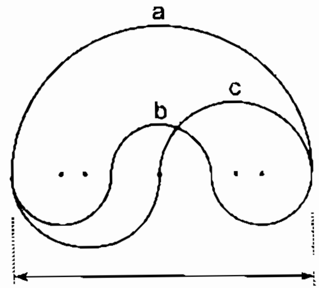
cung 56^o ứng với x (km).

Vậy $$x \approx \frac{20\,000 \times 56}{180} \approx 6222\ (\text{km}).$$

56. (h.67) Đường cong a là nửa đường tròn đường kính 12cm.

Đường cong b là ba nửa đường tròn đường kính 4cm.

Đường cong c là hai nửa đường tròn đường kính 6cm.



Hình 67

Ta có : $$a = \frac{1}{2}.\pi.12 = 6\pi\ (\text{cm})\ ;$$

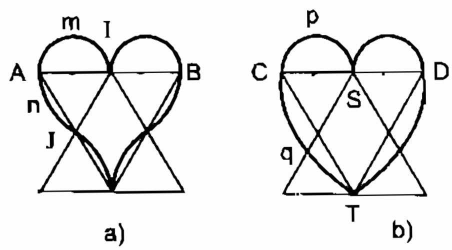
$$b = \frac{3}{2}.\pi.4 = 6\pi\ (\text{cm})\ ;$$

$$c = \pi.6 = 6\pi\ (\text{cm}).$$

Vậy ba đường cong có độ dài bằng nhau.

57. (h.68a) • $\overset{\frown}{AmI}$ là nửa đường tròn đường kính AI = 4cm. Có hai cung như thế.

$\overset{\frown}{AnJ}$ là $\frac{1}{6}$ đường tròn bán kính IJ = 4cm. Có bốn cung như thế.



Hình 68

Gọi l_1, l_2 lần lượt là độ dài của $\overset{\frown}{AmI}$ và $\overset{\frown}{AnJ}$, ta có :

$$l_1 = \frac{1}{2}.\pi.4 = 2\pi \text{ (cm)}$$

$$l_2 = \frac{1}{6}.2\pi.4 = \frac{4}{3}\pi \text{ (cm).}$$

Chu vi quả tim ở hình 68a) là

$$2\pi \times 2 + \frac{4}{3}\pi \times 4 = \frac{28}{3}\pi \text{ (cm).}$$

• (h.68b) $\overparen{CpS}$ là nửa đường tròn đường kính CS = 4cm. Có hai cung như thế.

$\overparen{CqT}$ là $\frac{1}{6}$ đường tròn bán kính DC = 8cm. Có hai cung như thế.

Gọi l_3, l_4 lần lượt là độ dài của $\overparen{CpS}$ và $\overparen{CqT}$, ta có :

$$l_3 = \frac{1}{2}.\pi.4 = 2\pi \text{ (cm)}$$

$$l_4 = \frac{1}{6}.2\pi.8 = \frac{8}{3}\pi \text{ (cm).}$$

Chu vi quả tim ở hình 68b) là $2\pi \times 2 + \frac{8}{3}\pi \times 2 = \frac{28}{3}\pi \text{ (cm)}$.

Vậy hai quả tim có chu vi bằng nhau.

58. (h.69) Cách vẽ :

Vẽ đoạn thẳng AB = 3cm.

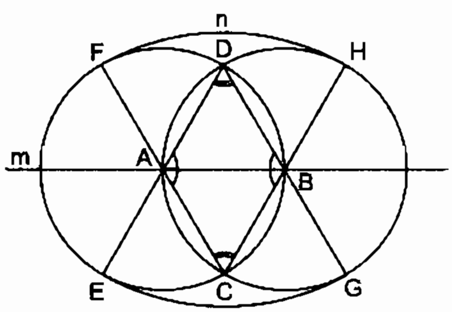
Vẽ đường tròn tâm A, bán kính 3cm.

Vẽ đường tròn tâm B, bán kính 3cm.

Hai đường tròn (A) và (B) giao nhau tại C và D.

Vẽ cung tròn tâm C, bán kính 6cm, cung tròn này tiếp xúc với (A) và (B) lần lượt tại F và H.

Vẽ cung tròn tâm D, bán kính 6cm. Cung này tiếp xúc với (A) và (B) lần lượt tại E và G.



Hình 69

Chu vi :

$\overset{\frown}{FmE} = \frac{1}{3}$ đường tròn bán kính 3cm. Có hai cung như thế ;

$\overset{\frown}{FnH} = \frac{1}{6}$ đường tròn bán kính 6cm. Có hai cung như thế.

Gọi l_1, l_2 lần lượt là độ dài của $\overset{\frown}{FmE}$ và $\overset{\frown}{FnH}$, ta có :

$$l_1 = \frac{1}{3}.2\pi.3 = 2\pi \text{ (cm) ;}$$

$$l_2 = \frac{1}{6}.2\pi.6 = 2\pi \text{ (cm).}$$

Vậy chu vi hình quả trứng là $2\pi \times 2 + 2\pi \times 2 = 8\pi$ (cm).

59. Trước hết ta đổi $36^o45'$ thành $\frac{147^o}{4}$.

Độ dài cung tròn phải tìm là :

$$\frac{\pi R.\frac{147}{4}}{180} = \frac{49}{240}\pi R.$$

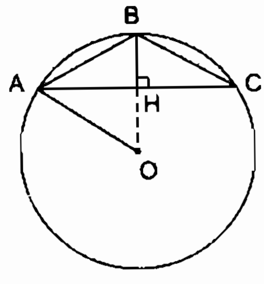
60. (h.70) $\hat{B} = 120^o$ suy ra $\hat{A} = \hat{C} = \frac{180^o - 120^o}{2} = 30^o$ (vì tam giác ABC cân),

OB ⊥ AC tại H, H là trung điểm của AC.

Theo giả thiết, ta có AH = 6 : 2 = 3 (cm).

Tam giác vuông AHB là nửa tam giác đều nên

$\frac{AB.\sqrt{3}}{2} = AH$ (đường cao h của tam giác đều tính theo cạnh a là $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$).



Hình 70

Thay số, ta có $\frac{AB.\sqrt{3}}{2} = 3$, suy ra $AB = 2\sqrt{3}$ (cm).

Trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có :

$\overset{\frown}{BOA} = 2.\overset{\frown}{BCA} = 2 \times 30^o = 60^o$. Suy ra tam giác AOB là tam giác đều, từ đó

$$OB = AB = 2\sqrt{3} \text{ (cm).}$$

Vậy độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$2\pi.2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \text{ (cm).}$$

61. a) Nếu gọi C là độ dài đường tròn và d là đường kính của nó thì $\pi = \frac{C}{d}$.

Theo quy tắc trên, ta tìm d như sau, lấy C chia làm tám phần (quân bát), mỗi phần là $\frac{C}{8}$, bỏ đi $\frac{3C}{8}$ (phát tam), còn lại $\frac{5C}{8}$ (tồn ngũ) lại chia đôi được $\frac{5C}{16}$ (quân nhị), từ đó $d = \frac{5C}{16}$. Từ đây ta tính được

$$\pi \approx \frac{C}{\frac{5C}{16}} = \frac{16}{5} = 3{,}2.$$

b) Lấy dây quấn xung quanh thân cây tròn được độ dài C. Suy ra đường kính của thân cây là $\frac{5}{16}C$.

62. Quãng đường đi được của Trái Đất sau một ngày là

$$\frac{2 \times 3{,}14 \times 150\,000\,000}{365} \approx 2\,580\,822 \approx 2\,580\,000 \text{(km)}.$$

Bài tập bổ sung

9.1. Hình đó gồm một nửa đường tròn bán kính 3R và 3 nửa đường tròn có bán kính R. Do đó, chu vi của hình đã cho là

$$C = \frac{2.\pi.3R}{2} + 3 \cdot \frac{2\pi R}{2} = 6\pi R.$$

9.2. Xem hình vẽ (h.bs.26).

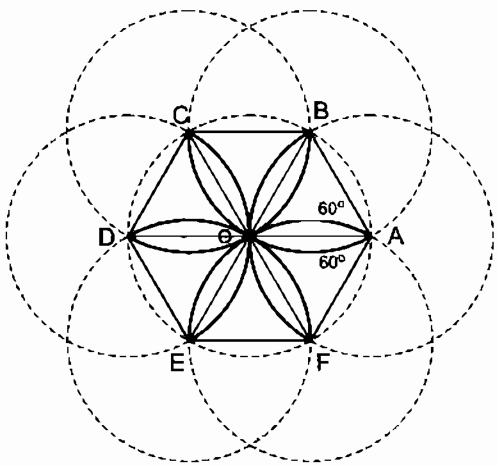
Ta có 12 cung đơn hoặc 6 cung kép tạo nên cánh hoa đó.

Xét một cung kép, chẳng hạn BOF, là cung của một đường tròn tâm A bán kính R với góc ở tâm là 120^o, nên có độ dài là

$$l = \frac{\pi.R.120}{180} = \frac{2\pi R}{3}.$$

Vậy chu vi cánh hoa là

$$C = 6 \cdot \frac{2\pi R}{3} = 4\pi R.$$



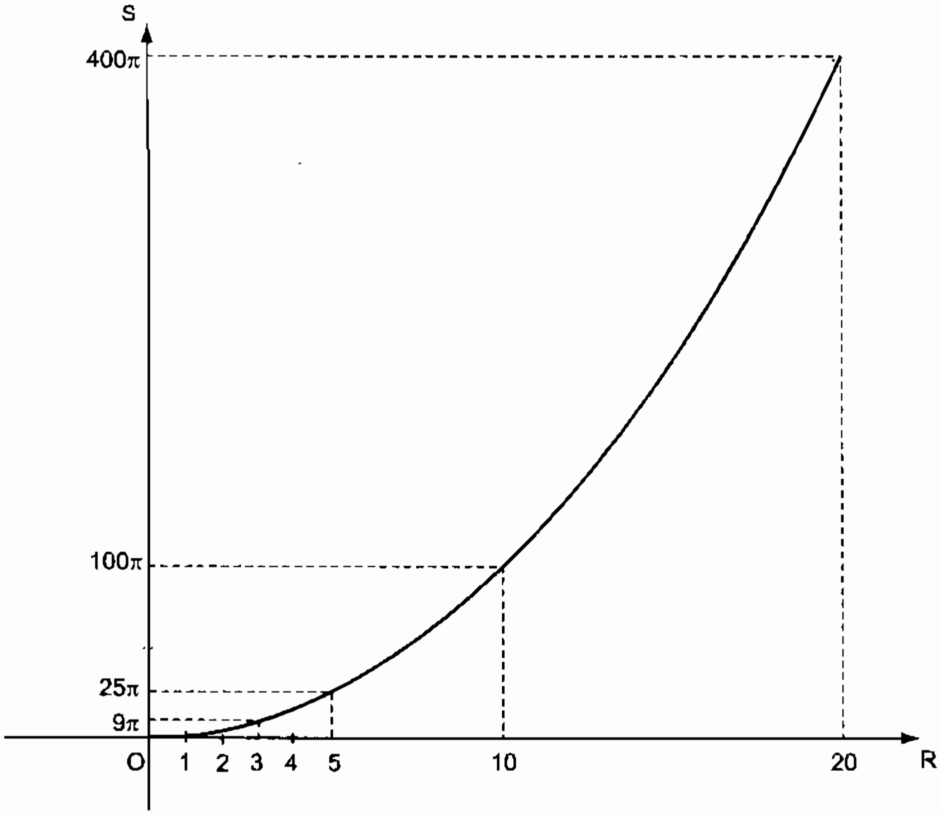
Hình bs.26

§10. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn

63. a)

R	0	1	2	3	4	5	10	20
S	0	π	4π	9π	16π	25π	100π	400π

b) (h.71)



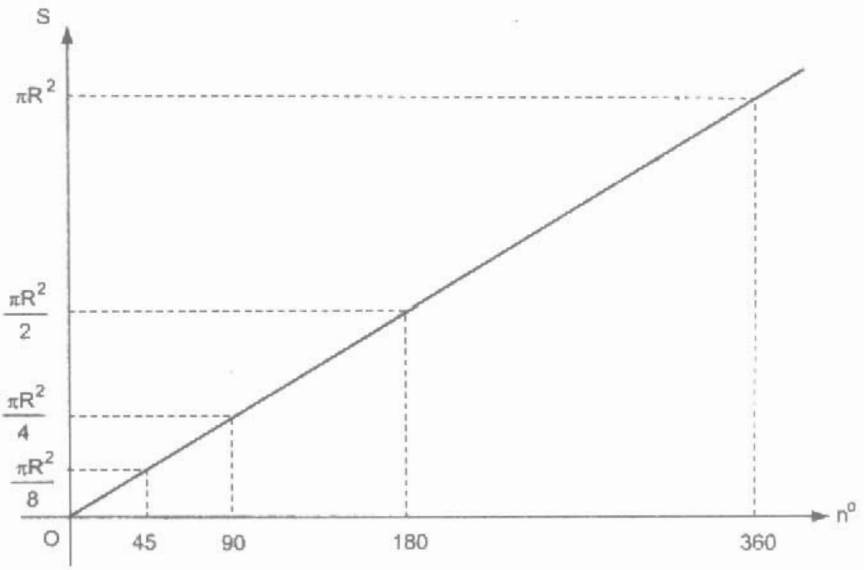
Hình 71

c) Diện tích hình tròn không tỉ lệ thuận với bán kính hình tròn.

64. a)

n^o	0	45	90	180	360
$S = \dfrac{\pi R^2 n}{360}$	0	$\dfrac{\pi R^2}{8}$	$\dfrac{\pi R^2}{4}$	$\dfrac{\pi R^2}{2}$	πR^2

b) (h.72)



Hình 72

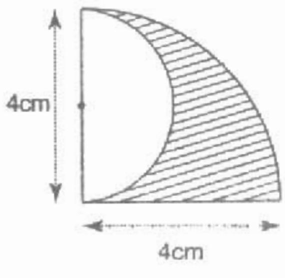
c) Diện tích hình quạt tròn tỉ lệ thuận với số đo độ của cung.

65. Gọi bán kính và diện tích của hình tròn lần lượt là R và S.

Biết chu vi hình tròn là $C = 2\pi R$ suy ra $R = \frac{C}{2\pi}$,

từ đó ta tính được diện tích hình tròn là

$$S = \pi R^2 = \pi\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 = \frac{C^2}{4\pi}.$$



Hình 73

66. (h.73) Hình để trắng là $\frac{1}{2}$ hình tròn bán kính 2cm

$$S_1 = \frac{1}{2}.\pi.2^2 = 2\pi\ (cm^2).$$

Diện tích cả hai hình là $\frac{1}{4}$ hình tròn bán kính 4cm

$$S = \frac{1}{4}\pi.4^2 = \frac{1}{4}.\pi.16 = 4\pi\ (cm^2).$$

Diện tích phần gạch sọc là

$$S_2 = S - S_1 = 4\pi - 2\pi = 2\pi\ (cm^2).$$

Vậy $S_1 = S_2$ (= 2π cm^2).

67. (h.74) a) Cách vẽ :

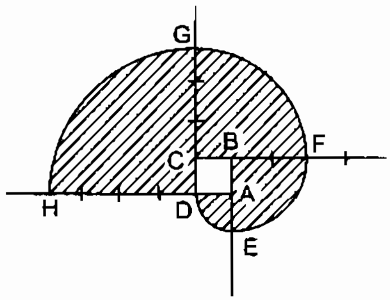
Vẽ hình vuông ABCD, cạnh 1cm.

Vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm A, bán kính 1cm, ta được cung DE.

Vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm B, bán kính 2cm, ta được cung EF.

Vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm C, bán kính 3cm, ta được cung FG.

Vẽ $\frac{1}{4}$ đường tròn tâm D, bán kính 4cm, ta được cung GH.



Hình 74

b) Tính diện tích phần gạch sọc.

Diện tích hình quạt DAE = $\frac{1}{4}.\pi.1^2$

Diện tích hình quạt EBF = $\frac{1}{4}.\pi.2^2$

Diện tích hình quạt FCG = $\frac{1}{4}.\pi.3^2$

Diện tích hình quạt GDH = $\frac{1}{4}.\pi.4^2$

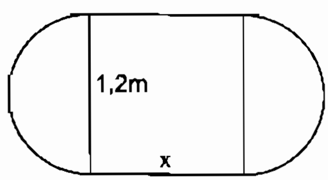
Diện tích phần gạch sọc S $= \frac{1}{4}\pi(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$

$= \frac{15}{2}\pi$ (cm^2).

68. (h.75) a) Gọi kích thước kia của mặt hình chữ nhật là x (m), x > 0.

Ta có $1{,}2 \times x + \pi(0{,}6)^2 = 2 \times \pi(0{,}6)^2$.

Vậy $x = \dfrac{\pi(0{,}6)^2}{1{,}2} = 0{,}3\pi \approx 0{,}942$ (m).



Hình 75

b) $1{,}2 \times \pi + 2x = 2 \times 1{,}2 \times \pi$.

Vậy $x = \dfrac{1{,}2 \times \pi}{2} \approx 1{,}884$ (m).

69. Gọi số đo của ba cung là x, y, z, ta có

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{3+4+5}=\frac{360^o}{12}=30^o.$$

Suy ra $x = 30^o.3 = 90^o$

$y = 30^o.4 = 120^o$

$z = 30^o.5 = 150^o.$

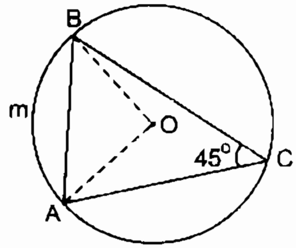
Diện tích các hình quạt tròn ứng với các cung 90^o, 120^o, 150^o theo thứ tự là :

$$S_1=\frac{\pi R^2.90}{360}=\frac{\pi R^2}{4},\ S_2=\frac{\pi R^2.120}{360}=\frac{\pi R^2}{3},\ S_3=\frac{\pi R^2.150}{360}=\frac{5\pi R^2}{12}.$$

70. (h.76) $\hat{C}=45^o \Rightarrow \widehat{AOB}=90^o.$

a) Diện tích hình quạt tròn AOB là

$$\frac{\pi R^2.90}{360}=\frac{\pi R^2}{4}.$$



Hình 76

b) Diện tích tam giác vuông AOB là

$$\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{R^2}{2}.$$

Diện tích hình viên phân AmB là

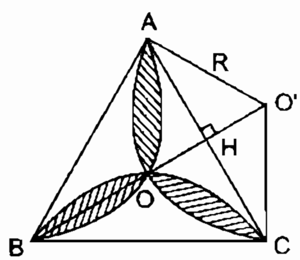
$$\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}=\frac{R^2}{4}(\pi-2).$$

71. (h.77) Diện tích hình hoa thị bằng tổng diện tích ba hình viên phân trừ đi diện tích của tam giác đều.

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC. Ta thấy OA = OB = OC, mặt khác OA, OB, OC lần lượt là phân giác của các góc A, B, C, từ đó

$$\widehat{OAC}=\widehat{OCA}=\frac{60^o}{2}=30^o \quad \text{và}$$

$$\widehat{AOC}=180^o-(30^o+30^o)=120^o.$$



Hình 77

Vậy hình viên phân AOC ứng với cung 120^o, dây AC là cạnh tam giác đều nội tiếp đường tròn tâm O', bán kính R (đường tròn đi qua ba điểm A, O, C).

Từ đó $AC = R\sqrt{3}$, suy ra $R = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích hình quạt tròn AO'C là

$$S_{quạt} = \frac{\pi\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 .120}{360} = \frac{\pi a^2}{9}.$$

Tam giác O'AC có $O'H = \frac{1}{2}O'A$ (vì tam giác O'AH là nửa tam giác đều) nên

$$O'H = \frac{a}{2\sqrt{3}} \text{ và } S_{O'AC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}.$$

Diện tích hình viên phân AOC là

$$S_{AOC} = \frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2}{4\sqrt{3}}.$$

Diện tích tam giác đều ABC cạnh a là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích hình hoa thị là

$$\begin{aligned} S &= 3S_{AOC} - S_{ABC} \\ &= 3.\left(\frac{\pi a^2}{9} - \frac{a^2}{4\sqrt{3}}\right) - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\pi a^2}{3} - \frac{3a^2}{4\sqrt{3}} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

Vậy $$S = \frac{a^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

72. (h.78) a) Trong tam giác vuông ABC, ta có

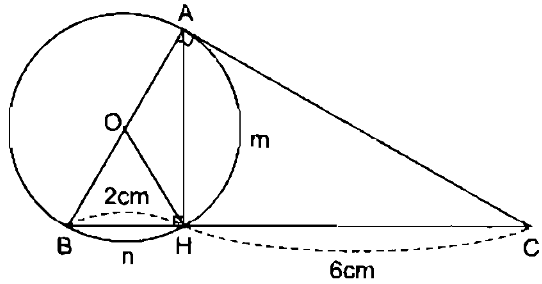
$$AB^2 = BH.BC. \text{ Thay số}$$

$$AB^2 = 2(2+6) = 16$$

$$AB = 4 \text{ (cm)}.$$

Do đó diện tích hình tròn (O) bằng

$$\pi.\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 4\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Hình 78

b) Tổng diện tích hai hình viên phân AmH và BnH là hiệu diện tích của nửa hình tròn (O) và diện tích tam giác vuông AHB.

Theo định lí Py-ta-go, trong tam giác vuông AHB ta có

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Diện tích tam giác vuông AHB là

$$\frac{BH.AH}{2} = \frac{2.2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Diện tích nửa đường tròn (O) là $4\pi : 2 = 2\pi$ (cm^2).

Do đó tổng diện tích hai hình viên phân là

$$2\pi - 2\sqrt{3} = 2(\pi - \sqrt{3}) \text{ (cm}^2\text{)}.$$

c) Tam giác BOH có OB = OH = BH = 2cm nên là tam giác đều, do đó $\widehat{BOH} = 60^o$, suy ra $\widehat{AOH} = 120^o$.

Vậy diện tích hình quạt tròn AOH là

$$\frac{\pi.2^2.120}{360} = \frac{4\pi}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài tập bổ sung

10.1. Hình đó gồm một nửa hình tròn bán kính 5R, thêm 3 nửa hình tròn có bán kính R và bớt 2 nửa hình tròn có bán kính R.

Do đó, diện tích của hình đã cho là

$$S = \frac{\pi.(5R)^2}{2} + 3\cdot\frac{\pi R^2}{2} - 2\cdot\frac{\pi R^2}{2} = 13\pi R^2.$$

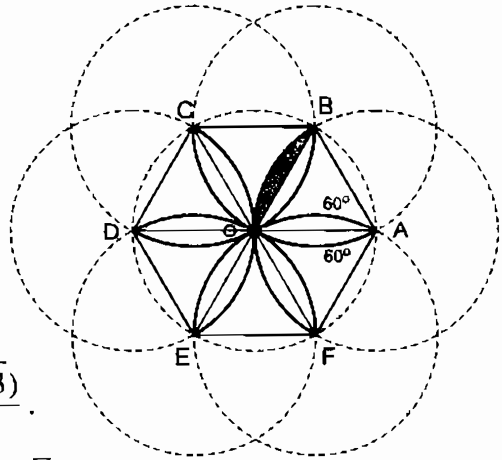
10.2. Xem hình vẽ (h.bs.27).

Ta có 12 hình viên phân có diện tích bằng nhau tạo nên cánh hoa đó.

Xét một hình viên phân, chẳng hạn hình viên phân giới hạn bởi cung BO và dây căng cung ấy, thì BO là cung của một đường tròn tâm A bán kính R với góc ở tâm là 60^0, nên diện tích hình viên phân đó là

$$S' = \frac{\pi.R^2.60}{360} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}.$$

Vậy diện tích cần tìm là $S = R^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.



Hình bs.27

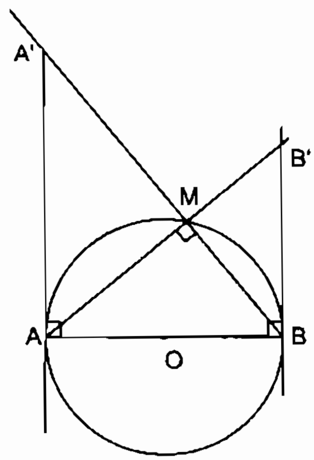
Bài tập ôn chương III

73. (h.79) a) Từ hai tam giác vuông đồng dạng $\Delta AA'B \backsim \Delta BAB'$, ta có

$$\frac{AA'}{BA} = \frac{AB}{BB'} \Rightarrow AA'.BB' = AB^2.$$

b) Từ hai tam giác vuông đồng dạng $\Delta A'MA \backsim \Delta A'AB$, ta có

$$\frac{A'M}{A'A} = \frac{A'A}{A'B} \Rightarrow A'A^2 = A'M.A'B.$$



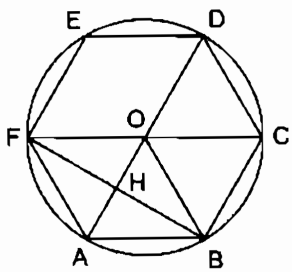
Hình 79

74. (h.80) Vẽ lục giác đều ABCDEF cùng với đường tròn ngoại tiếp. Dễ thấy rằng DA là đường kính và tứ giác OFAB là hình thoi. Gọi giao điểm của AD và BF là H. Ta có :

$$AH = \frac{R}{2},$$

$$HD = \frac{3R}{2}.$$

Từ đó $$\frac{AH}{HD} = \frac{1}{3}.$$

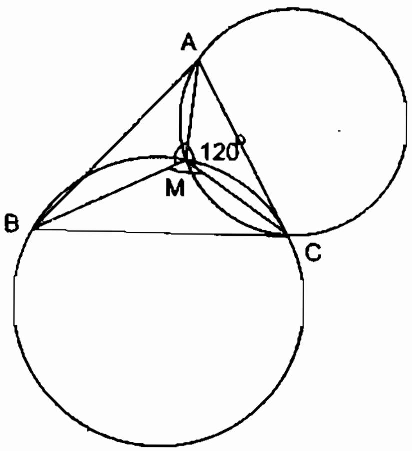


Hình 80

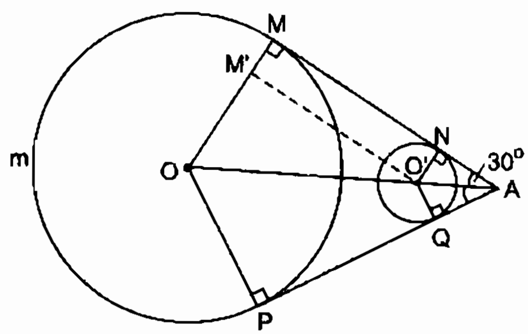
75. (h.81) Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA}$ thế thì điểm M nhìn các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC dưới cùng một góc là 120^0. Suy ra cách dựng sau :

Dựng cung tròn chứa góc 120^0 vẽ trên đoạn thẳng BC.

Dựng cung tròn chứa góc 120^0 vẽ trên đoạn thẳng AC.
Giao điểm của hai cung tròn này là điểm M phải dựng.



Hình 81



Hình 82

76. (h.82) AM và AP là hai tiếp tuyến chung xuất phát từ A đến đường tròn (O) nên OA là phân giác của $\widehat{MAP}$. Vì $\widehat{MAP} = 60^0$ nên $\widehat{MAO} = 30^0$. Tam giác vuông ANO' là nửa tam giác đều, ta có O'A = 2O'N = 2a. Chứng minh tương tự với tam giác vuông AMO, ta có OA = 2OM = 8a, từ đó OO' = 8a − 2a = 6a.

Từ O' kẻ O'M' // NM (M' nằm trên bán kính OM) ta có M'O' = MN (vì MNO'M' là hình chữ nhật). Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác vuông OM'O' ta có

$$M'O' = \sqrt{OO'^2 - OM'^2} = \sqrt{(6a)^2 - (3a)^2} = \sqrt{27a^2} = 3a\sqrt{3}.$$

Suy ra $MN = 3a\sqrt{3}$.

Tứ giác ANO'Q có $\widehat{N} = \widehat{Q} = 90^o$, $\widehat{A} = 60^o$, suy ra $\widehat{NO'Q} = 120^o$.

Tương tự, ta có $\widehat{MOP} = 120^o$, suy ra cung lớn MmP có

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{MmP} = 360^o - 120^o = 240^o.$$

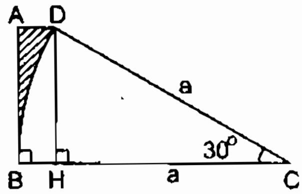
Độ dài cung nhỏ $\overset{\frown}{NQ}$ là $\quad l_1 = \dfrac{\pi.a.120}{180} = \dfrac{2\pi a}{3}$.

Độ dài cung lớn $\overset{\frown}{MmP}$ là $\quad l_2 = \dfrac{\pi.4a.240}{180} = \dfrac{16\pi a}{3}$.

Độ dài của dây cua-roa mắc qua hai ròng rọc là

$$2MN + l_1 + l_2 = 2.3a\sqrt{3} + \frac{2\pi a}{3} + \frac{16\pi a}{3} = 6a(\pi + \sqrt{3}) \approx 29{,}24a.$$

77. Diện tích phần gạch sọc trên hình 83 là hiệu giữa diện tích hình thang vuông ABCD và diện tích hình quạt tròn 30^o của đường tròn bán kính a.



Hình 83

Từ D kẻ DH vuông góc với BC thì tam giác vuông CHD là nửa tam giác đều, ta có $DH = \dfrac{a}{2}$

và $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, suy ra $BH = BC - CH = a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, từ đó $AD = a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì tứ giác ABHD là hình chữ nhật).

Diện tích hình thang vuông ABCD bằng

$$\frac{AD + BC}{2}.AB = \frac{a - \dfrac{a\sqrt{3}}{2} + a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Diện tích quạt tròn bằng $\dfrac{\pi a^2.30}{360} = \dfrac{\pi a^2}{12}$.

Vậy diện tích phần gạch sọc là $\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} - \dfrac{\pi a^2}{12} = \dfrac{a^2}{24}(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi)$

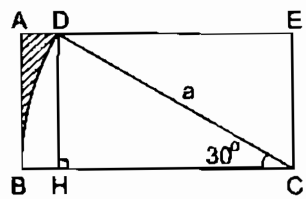
$$\approx 0{,}022a^2.$$

Có thể tính cách khác, như sau :

Diện tích phần gạch sọc trên hình 84 bằng diện tích hình chữ nhật ABCE trừ đi tổng diện tích hình quạt tròn CBD và tam giác vuông CED.

$$S_{ABCE} = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

$$S_{quạt} = \frac{\pi a^2}{12}$$



Hình 84

$$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

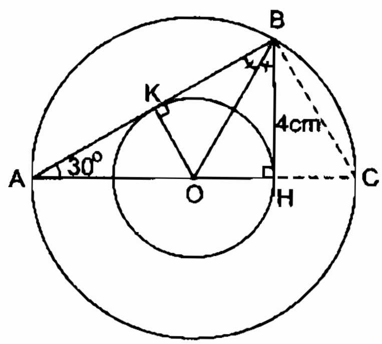
Diện tích phần gạch sọc bằng

$$\frac{a^2}{2} - \left(\frac{\pi a^2}{12} + \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{a^2}{24}(12 - 3\sqrt{3} - 2\pi) \approx 0{,}022a^2.$$

78. (h.85) a) Hạ OK vuông góc với AB. Tâm O nằm trên tia phân giác của góc B nên cách đều hai cạnh của góc, ta có OK = OH. Do đó đường tròn (O ; OH) tiếp xúc với cạnh AB.

b) Tia đối của tia HA cắt đường tròn lớn tại C. Nối B với C. Ta có tam giác AOB cân (vì $\widehat{A} = \widehat{ABO} = 30^\circ$) nên OA = OB. Vậy đường tròn (O ; OA) đi qua B.

$\widehat{ABC} = 90^\circ$ vì là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O ; OA).



Hình 85

Trong tam giác vuông ABC, ta có

$$AH.HC = BH^2,$$

hay

$$(OA + OH)(OA - OH) = 4^2$$

$$OA^2 - OH^2 = 16. \qquad (*)$$

Nhân hai vế của (*) với π ta có

$$\pi.(OA^2 - OH^2) = 16\pi.$$

Nhưng $\pi(OA^2 - OH^2)$ chính là diện tích hình vành khăn. Vậy diện tích hình vành khăn nằm giữa hai đường tròn là 16π (cm^2).

79. a) (h.86)

• *Phần thuận*

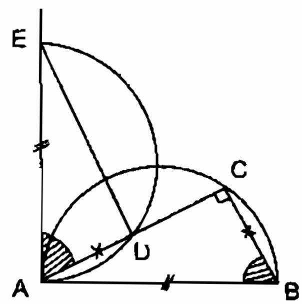
Nối D với E.

$\Delta ADE = \Delta BCA$ vì chúng có :

AE = AB,

AD = BC,

$\widehat{EAD} = \widehat{ABC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).



Hình 86

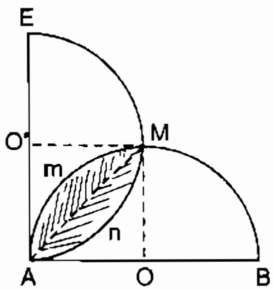
Suy ra $\widehat{D} = 90^\circ$ (vì $\widehat{D} = \widehat{C}$).

Khi C di chuyển trên nửa đường tròn đường kính AB, điểm D luôn nhìn đoạn thẳng AE dưới một góc bằng 90^{0}, nên D nằm trên nửa đường tròn đường kính AE.

• *Phần đảo*

Lấy điểm D' bất kì trên đường tròn đường kính AE. Đường thẳng AD' cắt đường tròn đường kính AB tại C'. Nối C' với B, nối D' với E. Hai tam giác AD'E và BC'A có $\widehat{D'} = \widehat{C'} = 90^{0}$, AE = AB, $\widehat{EAD'} = \widehat{ABC'}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) suy ra $\Delta AD'E = \Delta BC'A$, từ đó AD' = BC', đó là điều phải chứng minh.

• *Kết luận*. Vậy khi điểm C chạy trên nửa đường tròn đường kính AB thì quỹ tích điểm D là nửa đường tròn đường kính AE. (Khi C trùng với B thì D trùng với A, khi C trùng với A thì D trùng với E).



Hình 87

b) (h.87) Gọi tâm của hai nửa đường tròn đường kính AB và AE lần lượt là O và O'. Hai nửa đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai M. Dễ dàng chứng minh được O'AOM là hình vuông.

Diện tích phần chung của hai nửa đường tròn (O) và (O') là hai hình viên phân bằng nhau AmM và AnM.

Diện tích viên phân AmM = diện tích quạt AOM – diện tích tam giác AOM

$= \frac{1}{4}$ hình tròn đường kính AB – diện tích tam giác vuông cân AOM

$$= \frac{1}{4}.\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}.\frac{AB}{2}.\frac{AB}{2}$$

$$= \frac{\pi AB^2}{16} - \frac{AB^2}{8} = \frac{AB^2}{16}(\pi - 2).$$

Diện tích phần chung của hai nửa đường tròn là $\frac{AB^2}{8}(\pi - 2)$.

Bài tập bổ sung

III.1. Xem hình vẽ (h.bs.28).

a) Ta có $\widehat{AMC} = 30^{0}$ và $\widehat{ANC} = 30^{0}$ (vì cùng chắn cung AC), suy ra $\widehat{TMC} = 60^o$ và $\widehat{TNC} = 60^o$.

Từ đó MNT là tam giác đều.

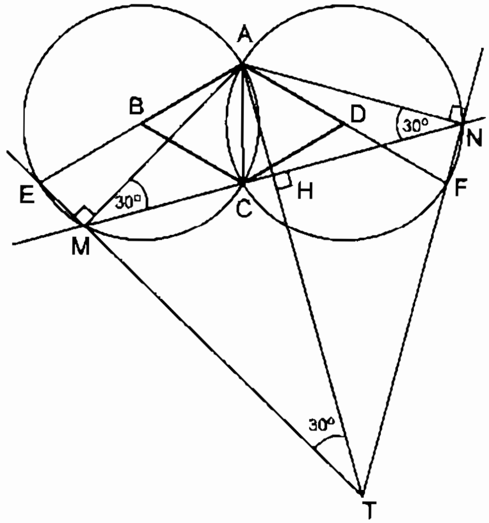
b) Theo trên MAN là tam giác cân nên AH vuông góc với MN, đồng thời HM = HN.

Khi đó TH cũng vuông góc với MN, suy ra $\widehat{HTM} = 30^o$.

Trong tam giác vuông AHM có $\widehat{AMH} = 30^o$ nên AM = 2 AH.

Trong tam giác vuông AMT có $\widehat{ATM} = 30^o$ nên AT = 2 MA.

Suy ra AT = 4 AH.



Hình bs.28

III.2. Xem hình vẽ (h.bs.29).

Các điểm A, I, B cùng nhìn đoạn MO dưới một góc vuông, do đó cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

Do đó $\widehat{AMI} = \widehat{ABI}$ (cùng chắn cung nhỏ AI).

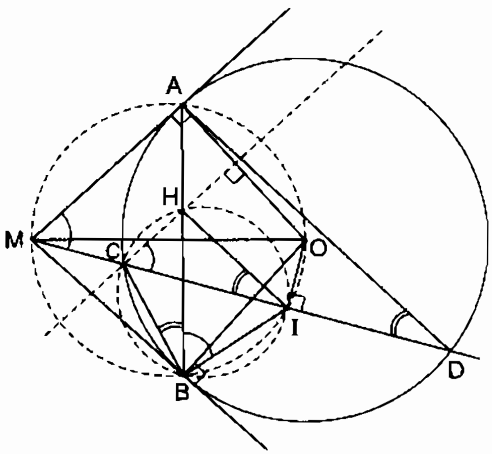
Vì CH và MA cùng vuông góc với OA nên CH // MA, suy ra $\widehat{AMI} = \widehat{HCI}$ (đồng vị). Từ đó, $\widehat{HCI} = \widehat{HBI}$ nên CHIB là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\widehat{HBC} = \widehat{HIC}$ (cùng chắn cung nhỏ HC).

Mặt khác, trong đường tròn (O) có $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ (cùng chắn cung nhỏ AC).

Suy ra $\widehat{ADC} = \widehat{HIC}$.

Vậy HI song song với AD.



Hình bs.29

Bài số	III.3	III.4	III.5	III.6	III.7	III.8	III.9	III.10	III.11	III.12
Đáp án	D	C	A	D	C	C	A	B	B	C

Chương IV

HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

A. ĐỀ BÀI

§1. Hình trụ. Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ

1. Diện tích và chu vi của một hình chữ nhật ABCD (AB > AD) theo thứ tự là $2a^2$ và 6a. Cho hình chữ nhật quay quanh cạnh AB một vòng, ta được một hình trụ. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ này.

2. Mô hình của một cái lọ thí nghiệm dạng hình trụ (không nắp) có bán kính đường tròn đáy 14cm, chiều cao 10cm. Trong các số sau đây, số nào là diện tích xung quanh cộng với diện tích một đáy ?

$\left(\text{Lấy } \pi = \dfrac{22}{7}\right)$

(A) $564cm^2$; (B) $972cm^2$;

(C) $1865cm^2$; (D) $2520cm^2$; (E) $1496cm^2$.

3. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 6cm, chiều cao 9cm. Hãy tính :

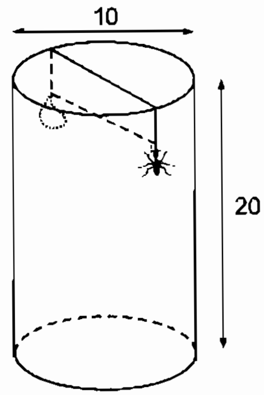
a) Diện tích xung quanh của hình trụ.

b) Thể tích của hình trụ.

(Lấy $\pi \approx 3{,}142$, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

4. *Đố. Đường đi của con kiến.* Thành bên trong của một cái lọ thuỷ tinh dạng hình trụ có một giọt mật cách miệng lọ 3cm.

Bên ngoài thành lọ có một con kiến đậu ở điểm đối diện với giọt mật qua tâm đường tròn (song song với đường tròn đáy – xem hình 88).



Hình 88

Hãy chỉ ra đường đi ngắn nhất của con kiến để đến đúng giọt mật, biết rằng chiều cao của cái lọ là 20cm và đường kính đường tròn đáy là 10cm (lấy $\pi \approx 3,14$).

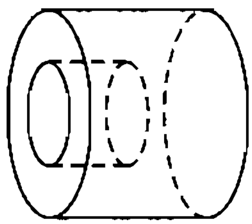
5. Một cái ống rỗng dạng hình trụ hở một đầu, kín một đầu (độ dày không đáng kể) dài b (cm) và bán kính đường tròn đáy là r (cm). Nếu người ta sơn cả bên ngoài lẫn bên trong ống thì diện tích ống được sơn bao phủ là :

(A) $2(\pi r^2 + 2\pi rb)cm^2$; (B) $(\pi r^2 + 2\pi rb)cm^2$;

(C) $(2\pi r^2 + 2\pi rb)cm^2$; (D) $(\pi r^2 + 4\pi rb)cm^2$.

Hãy chọn kết quả đúng.

6. Một vật thể có dạng hình trụ, bán kính đường tròn đáy và độ dài của nó đều bằng 2r (cm). Người ta khoan một lỗ cũng có dạng hình trụ như hình 89, có bán kính đáy và độ sâu đều bằng r (cm). Thể tích phần vật thể còn lại (tính theo cm^3) là :



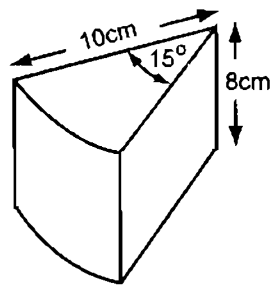
Hình 89

(A) $4\pi r^3$; (B) $7\pi r^3$;

(C) $8\pi r^3$; (D) $9\pi r^3$.

Hãy chọn kết quả đúng.

7. Hình 90 là một mẩu pho mát được cắt ra từ một khối pho mát dạng hình trụ (có các kích thước như trên hình vẽ). Khối lượng của mẩu pho mát là :



Hình 90

(A) 100g ; (B) 100πg ;

(C) 800g ; (D) 800πg.

(Khối lượng riêng của pho mát là $3g/cm^3$).

Hãy chọn kết quả đúng.

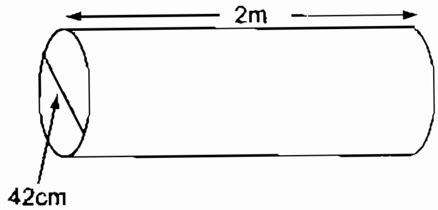
8. Diện tích xung quanh của một hình trụ là $10m^2$ và diện tích toàn phần của nó là $14m^2$. Hãy tính bán kính của đường tròn đáy và chiều cao của hình trụ (lấy $\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

9. Một cái trục lăn có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 42cm, chiều dài trục lăn là 2m (h.91). Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo trên sân phẳng một diện tích là :

(A) $26400cm^2$; (B) $58200cm^2$;

(C) $528m^2$; (D) $264000cm^2$.

(Lấy $\pi = \frac{22}{7}$). Hãy chọn kết quả đúng.



Hình 91

10. *Đúng nửa cốc (!)*

Một cái cốc hình trụ được đổ đầy sữa. Liệu em có thể rót ra đúng một nửa lượng sữa mà không cần phải sử dụng các dụng cụ đo hay không ?

11. Người ta đổ nước vào một thùng chứa dạng hình trụ, có đường kính đường tròn đáy là 3m lên đến độ cao $2\frac{1}{3}$m. Biết rằng $1cm^3$ nước có khối lượng là 1g.

Trong các số sau đây, số nào là số biểu diễn khối lượng nước đổ vào thùng ?

(A) 165 ; (B) 16500 ;

(C) 33000 ; (D) 66000.

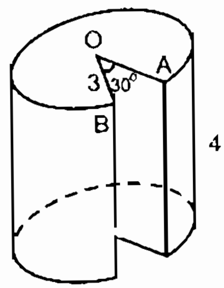
(Lấy $\pi = \frac{22}{7}$ và kết quả tính theo kilôgam).

12. Một hình trụ có bán kính đường tròn đáy 3cm, chiều cao 4cm được đặt đứng trên mặt bàn. Một phần của hình trụ bị cắt rời ra theo các bán kính OA, OB và theo chiều thẳng đứng từ trên xuống dưới với $\widehat{AOB} = 30^o$ (xem hình 92).

Hãy tính :

a) Thể tích phần còn lại.

b) Diện tích toàn bộ của hình sau khi đã bị cắt.



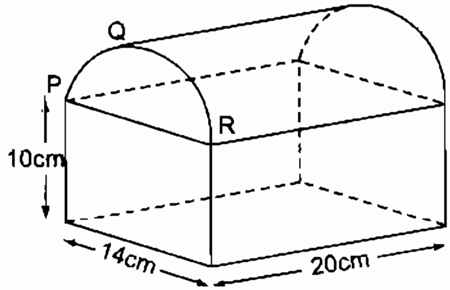
Hình 92

13. Một vật thể hình học như hình 93. Phần trên là nửa hình trụ, phần dưới là một hình hộp chữ nhật, với các kích thước cho trên hình vẽ. Thể tích của vật thể hình học này là :

(A) $4340cm^3$; (B) $4760cm^3$;

(C) $5880cm^3$; (D) $8cm^3$.

(Lấy $\pi = \frac{22}{7}$). Hãy chọn kết quả đúng.

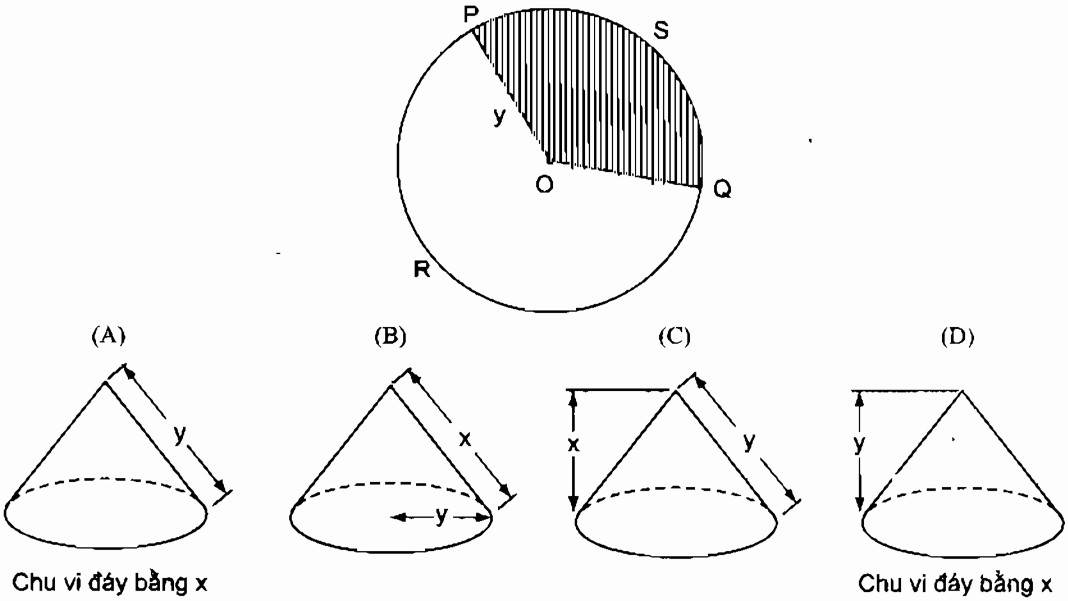


Hình 93

§2. Hình nón. Hình nón cụt. Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt

14. Cho tam giác ABC vuông tại A, góc $\widehat{B} = 60^\circ$ và BC = 2a (đơn vị độ dài). Quay tam giác đó một vòng quanh cạnh huyền BC. Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của hình tạo thành.

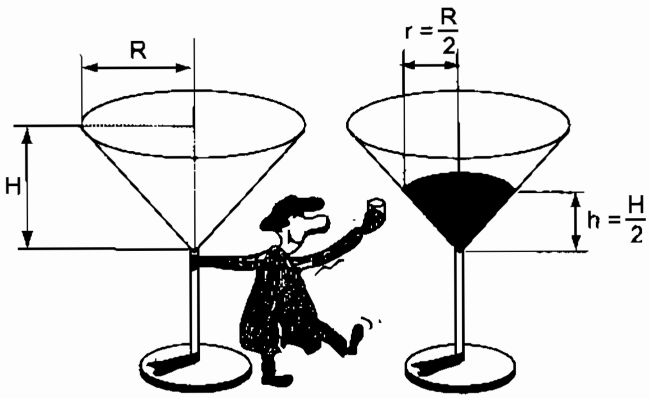
15. Cắt bỏ hình quạt OPSQ (xem hình 94 - phần gạch sọc). Biết độ dài $\overset{\frown}{PRQ}$ là x thì phần còn lại có thể ghép thành hình nón nào dưới đây ?



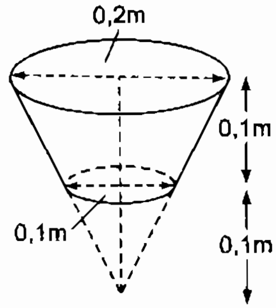
Hình 94

16. Một chiếc cốc dạng hình nón, chứa đầy rượu (h.95). Cụ Bá uống một lượng rượu nên "chiều cao" của rượu còn lại trong cốc bằng một nửa chiều cao ban đầu.

Hỏi cụ Bá đã uống bao nhiêu phần rượu trong cốc ?



Hình 95



Hình 96

17. Người ta minh hoạ một cái xô đựng nước như ở hình 96.

Thể tích nước chứa đầy xô sẽ là (tính theo cm^3) :

(A) $\dfrac{1000\pi}{3}$; (B) $\dfrac{1750\pi}{3}$;

(C) $\dfrac{2000\pi}{3}$; (D) $\dfrac{2750\pi}{3}$.

Hãy chọn kết quả đúng.

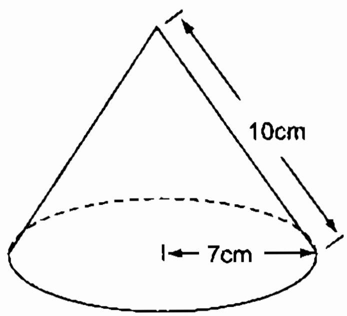
18. Diện tích toàn phần của hình nón, theo các kích thước của hình 97 là :

(A) 220 ; (B) 264 ;

(C) 308 ; (D) 374.

(Chọn $\pi = \dfrac{22}{7}$ và tính gần đúng đến cm^2).

Hãy chọn kết quả đúng.



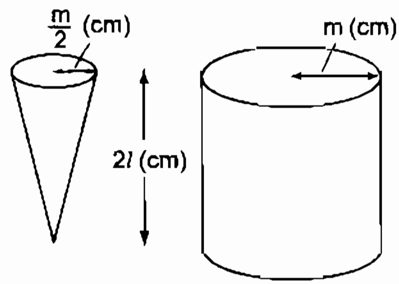
Hình 97

19. Cho hình bình hành ABCD với AB = 1, $AD = x$ $(x > 0)$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

a) Tính diện tích toàn phần S của hình tạo thành khi quay hình bình hành ABCD đúng một vòng quanh cạnh AB và diện tích toàn phần S_1 của hình tạo thành khi quay quanh cạnh AD.

b) Xác định giá trị x khi $S = S_1$ và $S = 2S_1$.

20. Hình 98 có một hình nón, bán kính đường tròn đáy là $\frac{m}{2}$ (cm), chiều cao là $2l$ (cm) và một hình trụ, bán kính đường tròn đáy m (cm), chiều cao $2l$ (cm). Người ta múc đầy nước vào hình nón và đổ vào hình trụ (không chứa gì cả) thì độ cao của nước trong hình trụ là :



Hình 98

(A) $\frac{l}{6}$ (cm) ; (B) l (cm) ;

(C) $\frac{5}{6}l$ (cm) ; (D) $\frac{11}{6}l$ (cm).

Hãy chọn kết quả đúng.

21. Nếu chiều cao và bán kính đáy của một hình nón đều tăng lên và bằng $\frac{5}{4}$ so với các kích thước tương ứng ban đầu thì trong các tỉ số sau đây, tỉ số nào là tỉ số giữa thể tích của hình nón mới với thể tích của hình nón ban đầu ?

(A) $\frac{5}{4}$; (B) $\frac{15}{12}$; (C) $\frac{25}{16}$; (D) $\frac{125}{64}$.

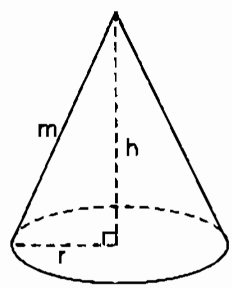
22. Từ một hình nón, người thợ tiện có thể tiện ra một hình trụ cao nhưng "hẹp" hoặc một hình trụ rộng nhưng "thấp".
Trong trường hợp nào thì người thợ tiện loại bỏ ít vật liệu hơn ?

23. Hình 99 là một hình nón.
Chiều cao là h (cm), bán kính đường tròn đáy là r (cm) và độ dài đường sinh m (cm) thì thể tích hình nón này là :

(A) $\pi r^2 h$ (cm^3) ; (B) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (cm^3) ;

(C) πrm (cm^3) ; (D) $\pi r(r + m)$ (cm^3).

Hãy chọn kết quả đúng.



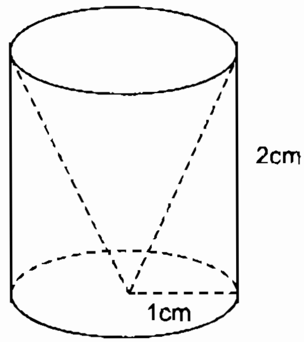
Hình 99

24. Một hình trụ có bán kính đáy 1cm và chiều cao 2cm, người ta khoan đi một phần có dạng hình nón như hình vẽ (h.100) thì phần thể tích còn lại của nó sẽ là :

(A) $\frac{2\pi}{3}$ (cm^3) ; (B) $\frac{4\pi}{3}$ (cm^3) ;

(C) 2π (cm^3) ; (D) $\frac{8\pi}{3}$ (cm^3).

Hãy chọn kết quả đúng.



Hình 100

25. Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi V_1, V_2, V_3 theo thứ tự là thể tích của những hình sinh ra khi quay tam giác ABC một vòng xung quanh các cạnh BC, AB và AC. Chứng minh rằng :

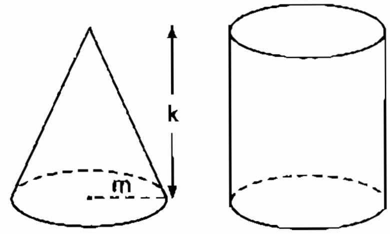
$$\frac{1}{V_1^2} = \frac{1}{V_2^2} + \frac{1}{V_3^2}.$$

26. Hình 101 có một hình nón, chiều cao k (cm), bán kính đường tròn đáy m (cm) và một hình trụ có cùng chiều cao và bán kính đường tròn đáy với hình nón. Chứa đầy cát vào hình nón rồi đổ hết vào hình trụ thì độ cao của cát trong hình trụ sẽ là :

(A) $\frac{k}{4}$ cm ; (B) $\frac{k}{3}$ cm ;

(C) $\frac{2k}{3}$ cm ; (D) $\frac{3k}{4}$ cm.

Hãy chọn kết quả đúng.

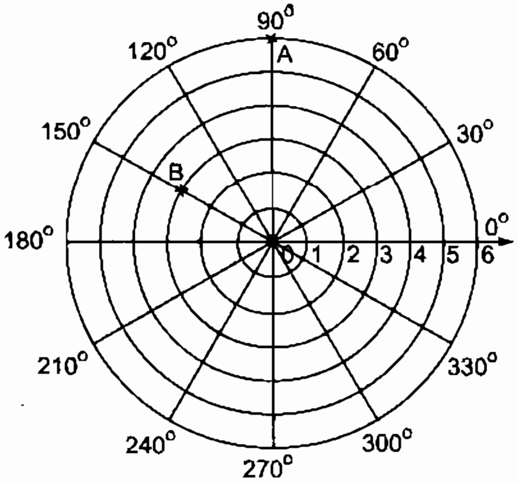


Hình 101

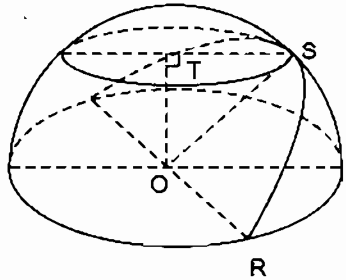
§3. Hình cầu. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

27. a) Trong hình 102, cho A là giao điểm của đường tròn (0 ; 6) với tia 90^0 và kí hiệu là A(6 ; 90^0). Tương tự B là giao điểm của đường tròn (0 ; 3) với tia 150^0 và kí hiệu là B(3 ; 150^0). Hãy đánh dấu các điểm C(6 ; 210^0), D(3 ; 30^0) và E(6 ; 330^0) trên hình 102.

b) Nối AB, BC, AD, DE và BD em thấy hình gì ?



Hình 102



Hình 103

28. Trong nửa hình cầu (h.103) có OR = x (cm), $\widehat{TOS} = 45^{o}$.

Độ dài đoạn ST nhận giá trị nào trong các giá trị sau :

(A) x (cm) ; (B) $\sqrt{2}x$ (cm) ;

(C) $\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ (cm) ; (D) 2x (cm).

29. Trong các hình sau đây, hình nào có diện tích lớn nhất ?

(A) Hình tròn có bán kính 2cm.

(B) Hình vuông có độ dài cạnh 3,5cm.

(C) Tam giác với độ dài các cạnh là 3cm, 4cm, 5cm.

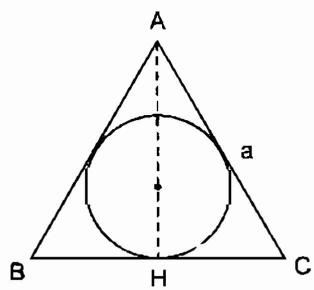
(D) Nửa mặt cầu bán kính 4cm.

Hãy chọn kết quả đúng.

30. Tam giác đều ABC có độ dài cạnh là a, ngoại tiếp một đường tròn.

Cho hình quay một vòng xung quanh đường cao AH của tam giác đó, (xem hình 104), ta được một hình nón ngoại tiếp một hình cầu.

Tính thể tích phần hình nón bên ngoài hình cầu.



Hình 104

31. Hai hình cầu A và B có các bán kính tương ứng là x và 2x (cm).

Tỉ số các thể tích của hai hình cầu này là :

(A) 1 : 2 ; (B) 1 : 4 ;

(C) 1 : 8 ; (D) Một kết quả khác.

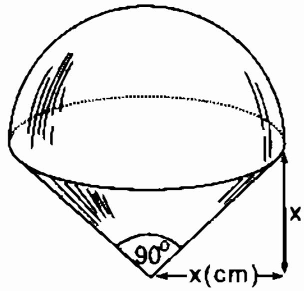
Hãy chọn kết quả đúng.

32. Hình 105 minh hoạ : hình gồm một nửa hình cầu và một hình nón.

Thể tích của hình nhận giá trị nào trong các giá trị sau :

(A) $\frac{2}{3}\pi x^3(cm^3)$; (B) $\pi x^3(cm^3)$;

(C) $\frac{4}{3}\pi x^3(cm^3)$; (D) $2\pi x^3(cm^3)$.



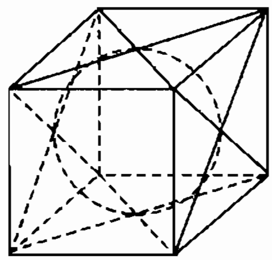
Hình 105

33. Một quả bóng hình cầu bên trong một hình lập phương như hình 106.

a) Tính tỉ số giữa diện tích toàn phần của hình lập phương với diện tích mặt cầu.

b) Nếu diện tích mặt cầu là 7π (cm^2) thì diện tích toàn phần của hình lập phương là bao nhiêu ?

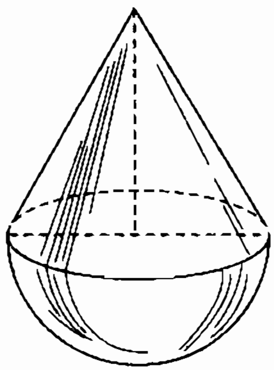
c) Nếu bán kính hình cầu là 4cm thì thể tích phần trống (trong hình hộp ngoài hình cầu) là bao nhiêu ?



Hình 106

34. Sử dụng các thông tin và hình 107 để trả lời các câu hỏi sau :

Một đồ chơi "lắc lư" của trẻ em gồm một hình nón gắn với nửa hình cầu (h.107) (chiều cao của hình nón bằng đường kính của đường tròn đáy). Có hai loại đồ chơi : loại thứ nhất cao 9cm, loại thứ hai cao 18cm.



Hình 107

a) Tỉ số : $\dfrac{\text{Thể tích đồ chơi loại thứ hai}}{\text{Thể tích đồ chơi loại thứ nhất}}$

là : (A) 2 ; (B) 4 ;

(C) 8 ; (D) 16.

Hãy chọn kết quả đúng.

b) Trong các số sau đây :

(A) 2 (cm) ; (B) 3 (cm) ;

(C) 4 (cm) ; (D) $4\frac{1}{2}$ (cm).

Số nào là bán kính đường tròn đáy của đồ chơi loại thứ nhất ?

c) Trong các số sau đây :

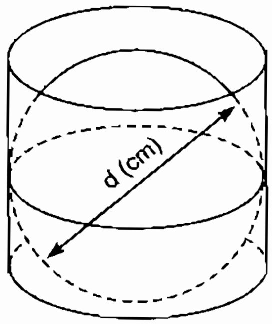
(A) 30π (cm^3) ; (B) 36π (cm^3) ;

(C) 72π (cm^3) ; (D) 610 (cm^3).

Số nào là thể tích của đồ chơi loại thứ nhất ?

35. Một hình cầu đặt vừa khít vào bên trong một hình trụ như hình 108 (chiều cao của hình trụ bằng độ dài đường kính của hình cầu) thì thể tích của nó bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ.

Nếu đường kính của hình cầu là d (cm) thì thể tích của hình trụ là :



Hình 108

(A) $\frac{1}{4}\pi d^3$(cm^3) ; (B) $\frac{1}{3}\pi d^3$(cm^3) ;

(C) $\frac{2}{3}\pi d^3$(cm^3) ; (D) $\frac{3}{4}\pi d^3$(cm^3).

Hãy chọn kết quả đúng.

36. *Chọn dưa hấu.*

Với hai quả dưa hấu (xem như là hai hình cầu) một to và một nhỏ, tỉ số các đường kính của chúng là 5 : 4, nhưng giá của quả to gấp rưỡi giá của quả nhỏ. Bạn chọn mua quả nào thì lợi hơn ? (xem "chất lượng" của chúng là như nhau).

37. Đổ đầy nước vào một dụng cụ để đong có dạng hình nón, sau đó đổ hết lượng nước đó vào một hình trụ có bán kính đáy bằng bán kính đáy của hình nón và chiều cao bằng chiều cao của hình nón. Việc làm này lặp lại cho đến khi hình trụ đó đầy nước thì số lần múc đầy vào hình nón là :

(A) 1 ; (B) 2 ;

(C) 3 ; (D) 4.

Hãy chọn kết quả đúng.

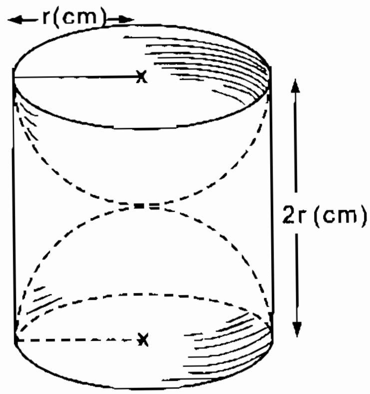
38. Một khối gỗ dạng một hình trụ đứng, bán kính đường tròn đáy là r (cm), chiều cao 2r (cm), người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu như hình 109.

Như vậy diện tích toàn bộ của khối gỗ là :

(A) $4\pi r^2(cm^2)$; (B) $6\pi r^2(cm^2)$;

(C) $8\pi r^2(cm^2)$; (D) $10\pi r^2(cm^2)$.

Hãy chọn kết quả đúng.



Hình 109

39. Với một cái thước dây, liệu có thể xác định được thể tích của một vật thể có dạng hình cầu hay không ?

40. Chiều cao của một hình trụ gấp ba lần bán kính đáy của nó.

Tỉ số của thể tích hình trụ này và thể tích của hình cầu có bán kính bằng bán kính đáy của hình trụ là :

(A) $\frac{4}{3}$; (B) $\frac{9}{4}$; (C) $\frac{3}{1}$; (D) $\frac{4}{9}$.

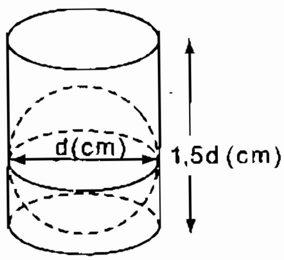
Hãy chọn kết quả đúng.

41. Một hình cầu đường kính d (cm) được đặt vào trong một hình trụ có chiều cao là 1,5d (cm) như hình 110.

Xét các phân số sau đây :

(A) $\frac{2}{3}$; (B) $\frac{4}{9}$; (C) $\frac{2}{9}$; (D) $\frac{1}{3}$.

Đâu là tỉ số $\frac{V_{cầu}}{V_{trụ}}$?



Hình 110

Bài tập ôn chương IV

42. Độ dài các cạnh của một tam giác ABC vuông tại A, thoả mãn các hệ thức sau :

$$BC = AB + 2a \qquad (1)$$

$$AC = \frac{1}{2}(BC + AB) \qquad (2)$$

a là một độ dài cho trước.

a) Tính theo a, độ dài các cạnh và chiều cao AH của tam giác.

b) Tam giác ABC nội tiếp được trong nửa hình tròn tâm O. Tính diện tích của phần thuộc nửa đường tròn nhưng ở ngoài tam giác đó.

c) Cho tam giác ABC quay một vòng quanh cạnh huyền BC. Tính tỉ số diện tích giữa các phần do các dây cung AB và AC tạo ra.

43. Với một hình nón có bán kính đường tròn đáy là r (cm) và chiều cao 2r (cm) và một hình cầu bán kính r (cm). Hãy tính :

a) Diện tích mặt cầu, biết diện tích toàn phần của hình nón là 21,06 (cm^2) ;

b) Thể tích hình nón, biết thể tích hình cầu là 15,8 (cm^3).

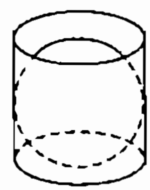
44. Một cái hộp hình trụ được làm ra sao cho một quả bóng hình cầu đặt vừa khít vào hộp đó (h.111).

Tỉ số $\frac{V_{cầu}}{V_{trụ}}$ là :

(A) $\frac{3}{4}$; (B) $\frac{4}{3}$;

(C) $\frac{3}{2}$; (D) $\frac{2}{3}$.

Hãy chọn kết quả đúng.



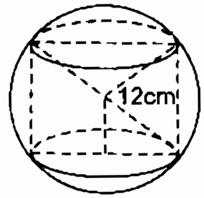
Hình 111

45. Một hình trụ được "đặt khít" vào bên trong một hình cầu bán kính r = 12cm như hình 112. Hãy tính :

a) Diện tích xung quanh của hình trụ, biết chiều cao của hình trụ bằng đường kính đáy của nó.

b) Thể tích hình cầu.

c) Diện tích mặt cầu.



Hình 112

46. Cho bán kính của Trái Đất và Mặt Trăng tương ứng là 6371 và 1738 kilômet. Trong các số sau đây, số nào là tỉ số thể tích giữa Trái Đất và Mặt Trăng ?

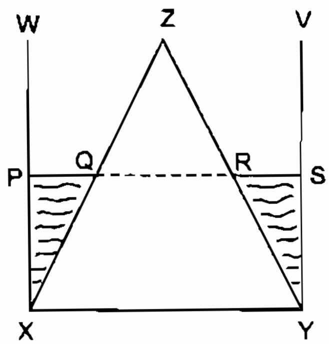
(A) 3,67 ; (B) 4,93 ; (C) 15,63 ; (D) 49,26.

47. Với nửa hình cầu bán kính r và một hình trụ có bán kính đường tròn đáy và chiều cao đều bằng h.

a) Khi r = 12 (cm) và thể tích hai hình bằng nhau thì giá trị h (cm) làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất là bao nhiêu ?

b) Khi h = 12 (cm) và tổng diện tích nửa mặt cầu và diện tích "hình tròn đáy" gấp ba lần diện tích toàn phần của hình trụ thì r (cm) bằng bao nhiêu ?

48. Hình bên (h.113) gồm một hình nón được đặt khít vào bên trong một cốc hình trụ, chúng có cùng đáy, cùng chiều cao. Người ta đổ vào đó một lượng nước lên đến một nửa chiều cao của hình. (Giả sử rằng nước không rò rỉ, không thẩm thấu vào bên trong hình nón).



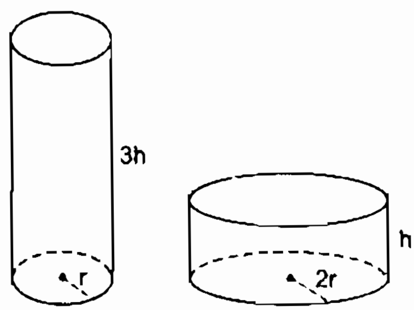
Hình 113

Hãy chọn đúng tỉ số giữa các đoạn thẳng $\dfrac{QR}{XY}$

(A) $\dfrac{1}{2}$; (B) $\dfrac{1}{3}$; (C) $\dfrac{2}{3}$;

(D) Không tính được, vì câu hỏi phụ thuộc vào bán kính đáy.

49. Hai cái lọ có dạng hình trụ, các kích thước như ở hình 114. Lọ nào có dung tích lớn hơn ?



Hình 114

Bài tập bổ sung

IV.1. Một bể nước hình trụ có bán kính đáy là 0,8 m và chiều cao là 1,2 m. Người ta muốn làm một bể nước hình trụ mới có thể tích gấp 2 lần bể nước cũ.

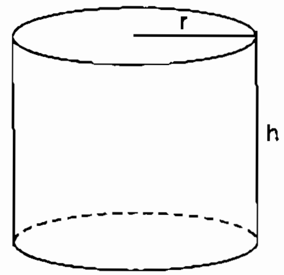
Bạn An nói : Bể nước mới cần có bán kính dài gấp 2 lần bán kính bể nước cũ.

Bạn Ngọc nói : Bể nước mới cần có chiều cao gấp 2 lần chiều cao của bể nước cũ.

Bạn Vân nói : Bể nước mới cần có cả chiều cao và bán kính đáy tương ứng gấp 2 lần chiều cao và bán kính đáy của bể nước cũ.

Theo em, bạn nào nói đúng, tại sao ?

IV.2. Quan sát hình trụ ở hình bs.30 rồi điền số thích hợp vào các ô trống trong bảng sau (lấy $\pi = 3,14$).



Hình bs. 30

r	6	....	....	12	....
h	15	8	....	....	26
Diện tích một đáy	....	706,5	78,5	....	....
Diện tích xung quanh	....	....	439,6	....	....
Diện tích toàn phần	....	....	....	....	973,4
Thể tích	....	....	....	9043,2	....

IV.3. Thể tích của một hình nón thay đổi thế nào nếu :

a) gấp đôi chiều cao của hình nón.

b) gấp đôi bán kính của hình nón.

c) gấp đôi cả chiều cao và bán kính đáy của hình nón.

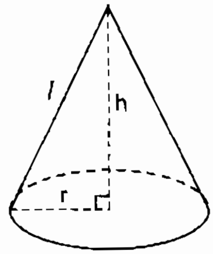
IV.4. Thể tích và diện tích của hình cầu thay đổi thế nào nếu bán kính hình cầu :

a) tăng gấp 2 lần ?

b) tăng gấp 3 lần ?

c) giảm đi hai lần ?

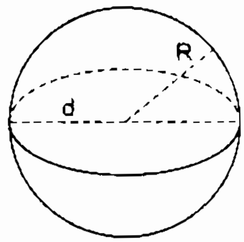
IV.5. Quan sát hình nón ở hình bs.31 rồi điền số thích hợp vào các ô trống trong bảng sau (lấy $\pi = 3{,}14$).



Hình bs.31

r	....	....	8	....	....
h	35	....	6	4,5	....
l	37	5	....	....	....
Diện tích xung quanh	....	....	....	....	6735,3
Diện tích toàn phần	....	75,36	....	....	10154,76
Thể tích	....	....	....	169,56	....

IV.6. Quan sát hình cầu ở hình bs.32 rồi điền số thích hợp vào các ô trống trong bảng sau (lấy $\pi = 3{,}14$).



Hình bs.32

R	4	....	....	....	....
d	....	12	....	....	....
Độ dài đường tròn lớn	....	....	....	....	15,7
Diện tích	....	....	78,5	....	....
Thể tích	....	....	....	904,32	....

B. LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Hình trụ. Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ

1. Nếu ta xem độ dài của các cạnh AB và AD như là các ẩn thì chúng sẽ là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 - 3ax + 2a^2 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này, đối chiếu điều kiện của đề bài, ta có

$$AB = 2a \text{ và } AD = a.$$

- Thể tích hình trụ

$$V = \pi AD^2.AB = 2\pi a^3.$$

- Diện tích xung quanh của hình trụ

$$S_{xq} = 2\pi AD.AB = 4\pi a^2.$$

2. Diện tích xung quanh của lọ là

$$14 \cdot 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 10 = 880\ (cm^2).$$

- Diện tích đáy của lọ là

$$14^2 \cdot \frac{22}{7} = 616\,(cm^2).$$

- Diện tích xung quanh và diện tích một đáy của lọ là

$$880 + 616 = 1496\ (cm^2).$$

Chọn (E).

3. a) Diện tích xung quanh của hình trụ là

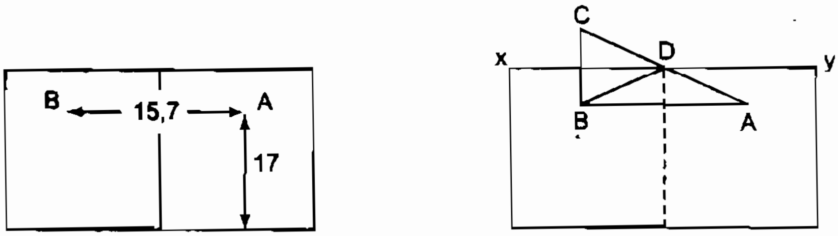
$$6.2.3,142.9 \approx 339\ (cm^2).$$

b) Thể tích của hình trụ là

$$6^2.3,142.9 \approx 1018\ (cm^3).$$

4. Khai triển hình trụ theo một đường sinh và trải phẳng ra, ta có một hình chữ nhật chiều rộng 20cm (h.115). Chiều dài bằng chu vi đáy của cái lọ :

$$10 \times 3,14 = 31,4 \text{ (cm)}.$$



Hình 115

Cần chú ý đến vị trí của con kiến và giọt mật : Kiến ở điểm A cách đáy 17cm, giọt mật ở điểm B cũng vậy và cách điểm A nửa chu vi đáy của cái lọ.

Lấy C đối xứng với B qua đường thẳng xy. Nối C với A cắt xy ở D ; D là điểm mà con kiến phải bò qua.

Vậy BDA là tuyến đường ngắn nhất ! Bạn hãy tự kiểm nghiệm lấy.

5. Diện tích xung quanh của ống hình trụ là $2\pi rb$ cm^2.

Diện tích đáy của ống hình trụ là πr^2 cm^2.

Diện tích ống được bao phủ bởi lớp sơn là $2(2\pi rb + \pi r^2)$ (cm^2).

Chọn (A).

6. Thể tích vật thể hình trụ là $\pi.(2r)^2.2r = 8\pi r^3$ (cm^3).

Thể tích lỗ khoan hình trụ là $\pi.r^2.r = \pi r^3$ (cm^3).

Thể tích phần vật thể còn lại là

$$8\pi r^3 - \pi r^3 = 7\pi r^3 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn (B).

7. Thể tích khối pho mát hình trụ là

$$\pi.10^2.8 = 800\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích mẩu pho mát bằng $\frac{15^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{24}$ thể tích khối pho mát.

Khối lượng mẩu pho mát là

$$\frac{1}{24}\cdot 800\pi.3 = 100\pi(g).$$

Chọn (B).

8. Diện tích mỗi hình tròn đáy của hình trụ là

$$S = \frac{14-10}{2} = 2\ (m^2)$$

do $S = \pi r^2$ nên $r^2 = \frac{S}{\pi} \approx \frac{2}{3{,}14} \approx 0{,}64\,(m^2)$.

Bán kính đường tròn đáy 0,8 (m).

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_1 = 2\pi rh$

$$\text{suy ra } h = \frac{S_1}{2\pi r} = \frac{10}{2\pi.0{,}8} = \frac{10}{1{,}6\pi}.$$

Vậy $h \approx 2$ (m).

9. 2m = 200cm

Diện tích xung quanh của cái trục lăn là

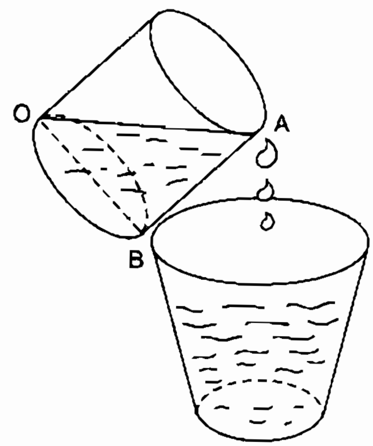
$$42 \times \frac{22}{7} \times 200 = 26400\ (cm^2).$$

Diện tích trục lăn tạo ra trên mặt sân phẳng là

$$26400 \times 10 = 264000\ (cm^2).$$

Chọn (D).

10. Ta nghiêng cái cốc hình trụ đầy sữa, rót sữa ra vật chứa cho đến khi sữa trong cốc của hình trụ tạo thành góc AOB như hình vẽ. Khi đó, số sữa trong cốc còn đúng một nửa (h.116).



Hình 116

11. Thể tích của nước trong thùng chứa là

$$\frac{22}{7}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot 2\frac{1}{3} = \frac{22\times 9\times 7}{7\times 4\times 3} =$$

$$= 16{,}5\ (m^3) = 16500000\ (cm^3).$$

Vậy khối lượng nước đổ vào thùng là 16500000g = 16500kg.

Chọn (B).

12. a) Phần hình trụ bị cắt đi $\dfrac{30^o}{360^o} = \dfrac{1}{12}$ (hình trụ).

Phần hình trụ còn lại $1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$ (hình trụ).

Thể tích phần còn lại là

$$3^2\pi \times 4 \times \frac{11}{12} = 33\pi\ (cm^3).$$

b) Diện tích phần còn lại của hai đáy

$$3^2\pi \times \frac{11}{12} \times 2 = \frac{33}{2}\pi (cm^2).$$

Diện tích xung quanh phần còn lại (không tính phần lõm vào)

$$3 \times 2 \times \pi \times 4 \times \frac{11}{12} = 22\pi\ (cm^2).$$

Diện tích toàn bộ hình này là

$$\frac{33}{2}\pi + 22\pi + 3.4.2 = 38\frac{1}{2}\pi + 24\ \ (cm^2).$$

13. Thể tích hình hộp chữ nhật là

$$10 \times 14 \times 20 = 2800\ (cm^3).$$

Thể tích nửa hình trụ là

$$\left[\left(\frac{14}{2}\right)^2 \times \frac{22}{7} \times 20\right] : 2 = 1540 (cm^3).$$

Thể tích của vật thể hình học này là

$$2800 + 1540 = 4340\ (cm^3).$$

Chọn (A).

§2. Hình nón. Hình nón cụt. Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt

14. Khi quay tam giác vuông ABC một vòng xung quanh cạnh huyền BC, ta được hai hình nón có các đáy "úp vào nhau", bán kính đường tròn đáy bằng đường cao AH kẻ từ A đến cạnh huyền BC.

Dễ thấy $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (đơn vị độ dài).

• Diện tích xung quanh của hình tạo thành

$$S = \pi AH(AB + AC) = \frac{\pi a^2(3+\sqrt{3})}{2} \text{ (đơn vị diện tích).}$$

• Thể tích của hình tạo thành

$$V = \frac{1}{3}\pi.AH^2.BC = \frac{\pi a^3}{2} \text{ (đơn vị thể tích).}$$

15. Hãy quan sát kĩ hình vẽ ở đề bài.

Chọn (A).

16. *Trả lời.* Cụ Bá đã uống $\frac{7}{8}$ lượng rượu trong cốc.

Để ý rằng lượng rượu còn lại sau khi uống là $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ (thể tích ban đầu).

17. Thể tích hình nón có đường kính đáy bằng 0,2m là

$$\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{0,2}{2}\right)^2\cdot 0,2 = \frac{0,002\pi}{3}(m^3) = \frac{2000\pi}{3}(cm^3).$$

Thể tích hình nón có đường kính đáy bằng 0,1m là

$$\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{0,1}{2}\right)^2\cdot 0,1 = \frac{0,00025\pi}{3}(m^3) = \frac{250\pi}{3}(cm^3).$$

Thể tích nước chứa đầy xô là

$$\frac{2000\pi}{3} - \frac{250\pi}{3} = \frac{1750\pi}{3}(cm^3).$$

Chọn (B).

18. Diện tích xung quanh hình nón

$$7.\frac{22}{7}.10 = 220\ (cm^2).$$

Diện tích đáy hình nón

$$7^2.\frac{22}{7} = 154\ (cm^2).$$

Diện tích toàn phần hình nón

$$220 + 154 = 374\ (cm^2).$$

Chọn (D).

19. a) Khi quay hình bình hành ABCD một vòng quanh cạnh AB thì diện tích S bằng diện tích xung quanh của hình trụ (do CDHK tạo ra) cộng với hai lần diện tích xung quanh của hình nón (do AHD tạo ra) (h.117).

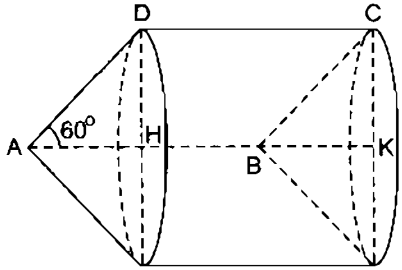
$S = 2\pi.DH.DC + 2\pi AD.DH =$

$= 2\pi\ DH(DC + AD).$

Ta có $DH = \dfrac{AD\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $S = \pi x\sqrt{3}(1 + x).$

Tương tự như vậy, bạn đọc cũng tính được $S_1 = \sqrt{3}\pi(x + 1).$



Hình 117

b) Để có $S = S_1$ thì phải có $\pi x\sqrt{3}(1 + x) = \sqrt{3}\pi(x + 1)$ suy ra

$$x(1 + x) = 1 + x \text{ hay } (1 + x)(x - 1) = 0.$$

Vì x là số đo độ dài cạnh nên x = 1.

Tương tự, để có $S = 2S_1$ thì x = 2.

20. Thể tích hình nón là

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{m}{2}\right)^2.2l = \frac{\pi m^2 l}{6}.$$

Thể tích hình trụ là

$$\pi m^2 2l = 2\pi m^2 l.$$

Thể tích hình nón so với thể tích hình trụ bằng

$$\frac{\dfrac{\pi m^2 l}{6}}{2\pi m^2 l} = \frac{1}{12}.$$

Vậy khi múc đầy nước vào hình nón và đổ vào hình trụ thì độ cao của nước trong hình trụ là $\dfrac{1}{6}l$.

Chọn (A).

21. Gọi r là bán kính đáy của hình nón, h là độ dài đường cao.

Thể tích hình nón là $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h.$

Thể tích hình nón mới sau khi chiều cao, bán kính đáy đều tăng lên là

$$\frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{4}r\right)^2\cdot\frac{5}{4}\cdot h=\frac{1}{3}\pi r^2h\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3.$$

Tỉ số giữa thể tích của hình nón mới và thể tích của hình nón ban đầu là

$$\frac{\frac{1}{3}\pi r^2h\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^3}{\frac{1}{3}\pi r^2h}=\frac{125}{64}.$$

Chọn (D).

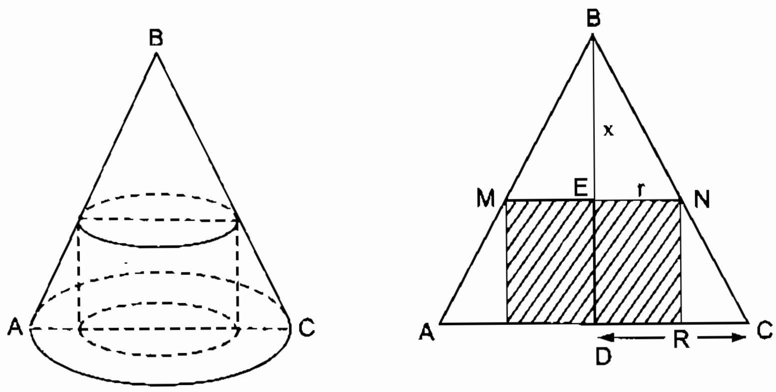
22. (h.118) Đặt BE = x thì có $\frac{ME}{AD}=\frac{BE}{BD}$ hay $\frac{r}{R}=\frac{x}{h}$

$$\Rightarrow\quad r=\frac{Rx}{h}.$$

Thể tích hình trụ là

$$V=\pi\cdot\frac{R^2x^2}{h^2}(h-x).$$

Ta có $\frac{2Vh^2}{\pi R^2}=x^2(2h-2x)$.



Hình 118

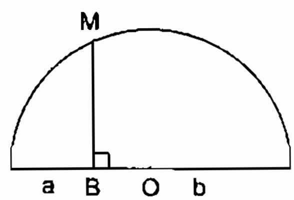
Vì h, π, R là các hằng số nên V sẽ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2(2h-2x)$ lớn nhất. Vì $x+x+(2h-2x)=2h$ (là hằng số) nên tích của nó $x^2(2h-2x)$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x=2h-2x$ hay $x=\frac{2}{3}h$.

Chú ý. Ta có thể chứng minh được mệnh đề : "Tổng ba số dương là không đổi thì tích của chúng đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi ba số đó bằng nhau".

Một chứng minh đơn giản bằng phương pháp hình học cho hai số như sau : Dựng đường tròn đường kính a + b (h.119), trong đó MB là một nửa dây cung của đường tròn có bán kính cố định $\left(r = \dfrac{a+b}{2}\right)$. Khi đó $MB^2 = ab$, do vậy nửa dây cung lớn nhất là bán kính.

23. Thể tích hình nón là $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Chọn (B).



Hình 119

24. Thể tích hình trụ là

$$1^2\pi.2 = 2\pi\ (cm^3).$$

Thể tích hình nón là

$$\frac{1}{3}\cdot 1^2\pi.2 = \frac{2\pi}{3}\ (cm^3).$$

Phần thể tích còn lại của hình trụ là

$$2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\ (cm^3).$$

Chọn (B).

25. Gọi độ dài các cạnh của tam giác là AC = b, AB = c, BC = a và AH = h là chiều cao dựng từ đỉnh A xuống cạnh huyền BC.

Ta có $h = \dfrac{bc}{a}$. Theo đầu bài thì

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi.AH^2.HC + \frac{1}{3}\pi.AH^2.HB = \frac{1}{3}\pi AH^2.BC = \frac{\pi b^2c^2}{3a},$$

suy ra $\dfrac{1}{V_1^2} = \dfrac{9a^2}{\pi^2b^4c^4}$

Tương tự

$$\frac{1}{V_2^2} = \frac{9}{\pi^2b^4c^2} \text{ và } \frac{1}{V_3^2} = \frac{9}{\pi^2b^2c^4}, \text{ từ đây ta có}$$

$$\frac{1}{V_2^2}+\frac{1}{V_3^2}=\frac{9}{\pi^2b^4c^2}+\frac{9}{\pi^2b^2c^4}$$

$$=\frac{9(b^2+c^2)}{\pi^2b^4c^4}=\frac{9a^2}{\pi^2b^4c^4}.$$

Vậy $\frac{1}{V_1^2}=\frac{1}{V_2^2}+\frac{1}{V_3^2}$.

26. Thể tích hình trụ là $m^2\pi k$.

Thể tích hình nón là $\frac{1}{3}m^2\pi k$.

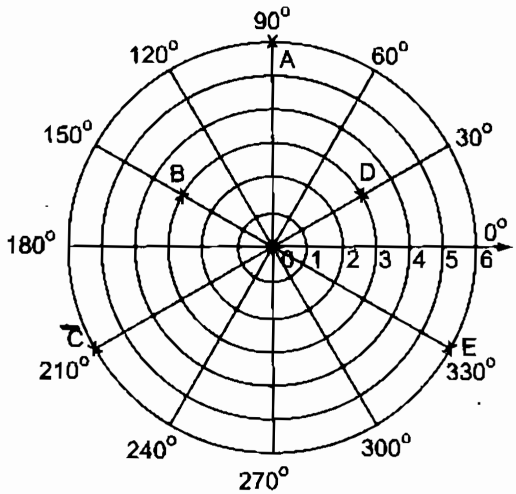
Thể tích của hình nón bằng $\frac{1}{3}$ thể tích hình trụ.

Do đó, khi chứa đầy cát trong hình nón đổ hết vào hình trụ thì độ cao của cát trong hình trụ là $\frac{k}{3}$.

Chọn (B).

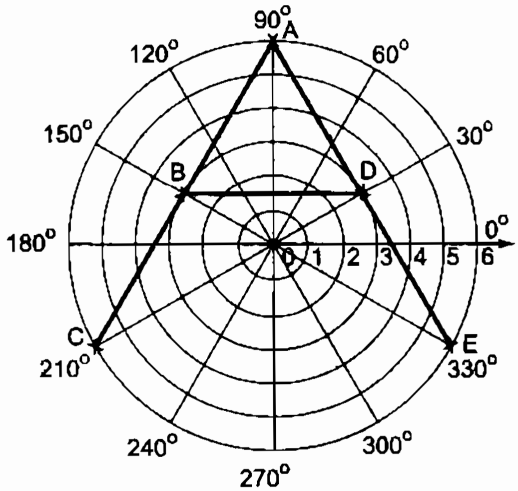
§3. Hình cầu. Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu

27. a) (h.120)



Hình 120

b) Ta có được hình chữ A (h.121).



Hình 121

28. Từ tam giác vuông TOS, ta có $ST = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ (cm).

Chọn (C).

29. Chọn (D).

30. Gọi h là chiều cao của tam giác đều và r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác đó thì ta có

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Thể tích hình nón

$$V = \frac{1}{3}\pi BH^2.AH = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Thể tích hình cầu

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}.$$

Thể tích phần cần tính bằng $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{3}}{216}$.

31. Thể tích hình cầu A là $\dfrac{4}{3}x^3\pi$ (cm^3).

Thể tích hình cầu B là $\dfrac{4}{3}(2x)^3\pi = \dfrac{4}{3}.8x^3\pi$ (cm^3).

Tỉ số thể tích hai hình cầu A và B là

$$\frac{\frac{4}{3}x^3\pi}{\frac{4}{3}.8x^3\pi} = \frac{1}{8}.$$

Chọn (C).

32. Thể tích hình nón là $\frac{1}{3}\pi x^2.x = \frac{1}{3}\pi x^3(cm^3)$.

Thể tích một nửa hình cầu là $(\frac{4}{3}\pi x^3) : 2 = \frac{2}{3}\pi x^3(cm^3)$.

Vậy thể tích của hình là $\frac{1}{3}\pi x^3 + \frac{2}{3}\pi x^3 = \pi x^3(cm^3)$.

Chọn (B).

33. Ta thấy ngay cạnh của hình lập phương gấp đôi bán kính hình cầu.

a) Tỉ số cần tính $\frac{6}{\pi}$; b) Diện tích toàn phần của hình lập phương là $42cm^2$.

c) Thể tích cần tính xấp xỉ $244cm^3$.

34. a) Chọn (C) ; b) Chọn (B) ; c) Chọn (B).

35. Chọn (A).

36. Mua quả to lợi hơn vì tỉ số giữa thể tích của nó với thể tích của quả nhỏ là

$\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$ (gần gấp đôi) trong khi đó giá của nó chỉ gấp rưỡi !

(Dễ thấy $\frac{125}{64} > \frac{3}{2} = \frac{96}{64}$).

37. Nhớ lại các công thức tính thể tích, sẽ có ngay kết quả.

Chọn (C).

38. Diện tích cần tính bằng diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao 2r (cm), bán kính đường tròn đáy r (cm) cộng với diện tích mặt cầu bán kính r (cm).

Chọn (C).

39. Dùng thước dây tạo ra đường tròn đặt vừa khít hình cầu, như vậy biết được độ dài đường tròn lớn là l từ đó thể tích hình cầu sẽ là $\frac{l^3}{6\pi^2}$.

40. Chọn (B).

41. Chọn (B).

Bài tập ôn chương IV

42. a) Đặt AB = x (x > 0), theo điều kiện (1) ở đề bài thì BC = x + 2a. (3)

Từ (2) và (3) suy ra AC = $\frac{1}{2}(x + 2a + x) = x + a$.

Mặt khác, theo định lí Py-ta-go ta có

$$(x + 2a)^2 = x^2 + (x + a)^2 \text{ hay } x^2 - 2ax - 3a^2 = 0.$$

Phương trình này chỉ có nghiệm x = 3a là thoả mãn điều kiện đầu bài.

Vậy AB = 3a, BC = 5a và AC = 4a.

Chiều cao AH = $\frac{12a}{5}$.

b) Gọi S là diện tích phần cần tính thì

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi BC^2}{4} - \frac{1}{2} AB.AC = \frac{a^2}{8}(25\pi - 48).$$

c) Khi tam giác ABC quay một vòng quanh cạnh huyền BC, ta có

+ Diện tích phần do dây cung AB tạo ra bằng

$$S_1 = \pi.AH.3a.$$

+ Diện tích phần do dây cung AC tạo ra bằng

$$S_2 = \pi.AH.4a.$$

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{4}$.

43. a) Với giả thiết ở đề bài, bạn đọc có thể tính được r từ đó tính được diện tích mặt cầu gần bằng $26cm^2$.

b) Tương tự như câu a), đáp số $7{,}9cm^3$.

44. Từ các công thức tính thể tích hình cầu và hình trụ có thể suy ra kết quả là $\frac{2}{3}$.

Chọn (D).

45. a) Diện tích xung quanh của hình trụ

$$288\pi\ (cm^2).$$

b) Thể tích hình cầu

$$2304\pi\ (cm^3).$$

c) Diện tích mặt cầu

$$576\pi\ (cm^2).$$

46. Chọn (D).

47. a) Giá trị gần đúng của h là

10,5cm.

b) Giá trị của r là

24cm.

48. Không khó khăn lắm trong việc tính toán

$$\frac{QR}{XY} = \frac{1}{2}.$$

Chọn (A).

49. Thể tích hình trụ có chiều cao 3h, bán kính đáy r là

$$V_{trụ} = \pi.r^2.3h = 3\pi r^2 h$$

Thể tích hình trụ có chiều cao h, bán kính đáy 2r là

$$V^*_{trụ} = \pi\,(2r)^2.h = 4\pi r^2 h.$$

So sánh hai thể tích này, ta thấy

dung tích của hình trụ "cao" chỉ bằng $\frac{3}{4}$ dung tích của hình trụ "thấp".

Bài tập bổ sung

IV.1. Thể tích hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h là : $V = \pi r^2 h$.

– Nếu tăng bán kính gấp đôi thì thể tích hình trụ là : $V' = \pi(2r)^2 h = 4.\pi r^2 h = 4V$.

– Nếu tăng chiều cao gấp đôi thì thể tích hình trụ là : $V' = \pi r^2\,(2h) = 2.\pi r^2 h = 2V$.

– Nếu tăng bán kính và chiều cao gấp đôi thì thể tích hình trụ là :

$$V' = \pi(2r)^2\,(2h) = 8.\pi r^2 h = 8V.$$

Vậy bạn Ngọc nói đúng.

IV.2.

r	6	15	5	12	5
h	15	8	14	20	26
Diện tích một đáy	113,04	706,5	78,5	452,16	78,5
Diện tích xung quanh	565,2	753,6	439,6	1507,2	816,4
Diện tích toàn phần	791,28	2166,6	596,6	2411,52	973,4
Thể tích	1695,6	5652	1099	9043,2	2041

IV.3. Hình nón với bán kính đáy r, chiều cao h có thể tích : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

a) Nếu gấp đôi chiều cao thì thể tích hình nón là :

$$V' = \frac{1}{3}\pi r^2 (2h) = 2.\frac{1}{3}\pi r^2 h = 2V.$$

b) Nếu gấp đôi bán kính thì thể tích hình nón là :

$$V' = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 h = 4\frac{1}{3}\pi r^2 h = 4V.$$

c) Nếu gấp đôi cả chiều cao và bán kính đáy thì thể tích hình nón là

$$V' = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 (2h) = 8.\frac{1}{3}\pi r^2 h = 8V.$$

IV.4. Hình cầu bán kính R có thể tích : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ và diện tích : $S = 4\pi R^2$.

Do đó :

a) Nếu bán kính tăng gấp 2 lần thì

thể tích hình cầu là : $V' = \frac{4}{3}\pi(2R)^3 = 8.\frac{4}{3}\pi R^3 = 8V$,

diện tích hình cầu là : $S' = 4\pi(2R)^2 = 4.4\pi R^2 = 4S$.

b) Nếu bán kính tăng gấp 3 lần thì

thể tích hình cầu là : $V' = \frac{4}{3}\pi(3R)^3 = 27.\frac{4}{3}\pi R^3 = 27V$, diện tích hình cầu là : $S' = 4\pi(3R)^2 = 9.4\pi R^2 = 9S$.

c) Nếu bán kính giảm đi 2 lần thì

thể tích hình cầu là : $V' = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{8}V$,

diện tích hình cầu là : $S' = 4\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.4\pi R^2 = \frac{1}{4}S$.

IV.5.

r	12	3	8	6	33
h	35	4	6	4,5	56
l	37	5	10	7,5	65
Diện tích xung quanh	1394,16	47,1	251,2	141,3	6735,3
Diện tích toàn phần	1846,32	75,36	452,16	254,34	10154,76
Thể tích	5275,2	37,68	401,92	169,56	63829,92

IV.6.

R	4	6	2,5	6	2,5
d	8	12	5	12	5
Độ dài đường tròn lớn	25,12	37,68	15,7	37,68	15,7
Diện tích	200,96	452,16	78,5	452,16	78,5
Thể tích	267,95	904,32	65,42	904,32	65,42

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

A. Phần đại số

1. Căn bậc hai số học của 0,36 là :

(A) 0,18 ; (B) –0,18 ;

(C) 0,6 ; (D) –0,6 và 0,6

Hãy chọn đáp số đúng.

2. Biểu thức $\sqrt{5-2x}$ xác định khi :

(A) $x = 2,5$; (B) $x \geq 2,5$;

(C) với mọi giá trị của x ; (D) $x \leq 2,5$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

3. Biểu thức $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$ có giá trị là :

(A) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$; (B) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

(C) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; (D) $8-2\sqrt{15}$.

Hãy chọn đáp số đúng.

4. Tính

$$\left(\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\sqrt{4,5}+\frac{2}{5}\sqrt{50}\right):\frac{4}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}.$$

5. Rút gọn

$$P=\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \text{ với } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2>0.$$

6. Chứng minh đẳng thức

$$\left(\frac{1}{a-\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}-1}\right):\frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} \text{ với } a>0,\ a\neq 1.$$

7. Cho biểu thức

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}-\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right).\frac{(1-x)^2}{2}.$$

4. Tính sin, cos, tang của các góc A và B của tam giác ABC vuông ở C biết :

a) BC = 8, AB = 17 ;

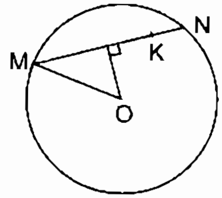
b) BC = 21, AC = 20 ;

c) BC = 1, AC = 2 ;

d) AC = 24, AB = 25.

5. BD là đường phân giác của tam giác ABC.

Chứng minh rằng $BD^2 = AB.BC - AD.DC$.

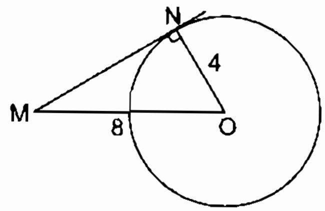


Hình 123

6. Cho đường tròn (O). Khoảng cách từ O đến dây MN của đường tròn bằng 7cm, $\widehat{OMN} = 45^o$. Trên dây MN lấy một điểm K sao cho MK = 3KN (h.123). Độ dài đoạn MK là :

(A) 10,5cm ; (B) 9cm ; (C) 14cm ; (D) 12cm.

Hãy chọn đáp số đúng.

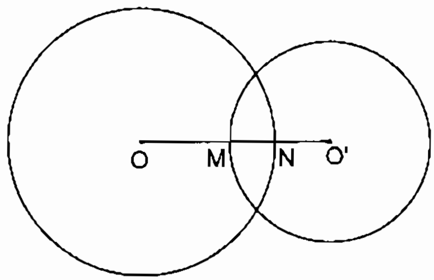


Hình 124

7. Cho đường tròn (O ; 4cm) và một điểm M sao cho MO = 8cm. Kẻ tiếp tuyến MN với đường tròn (O), N là tiếp điểm (h.124). Số đo của góc MON là :

(A) 45^o ; (B) 90^o ; (C) 30^o ; (D) 60^o.

Hãy chọn đáp số đúng.

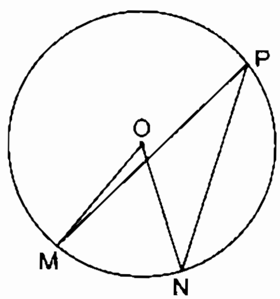


Hình 125

8. Cho đường tròn (O ; 8cm) và đường tròn (O' ; 6cm) có đoạn nối tâm OO' = 10cm. Đường tròn (O) cắt OO' tại N, đường tròn (O') cắt OO' tại M (h.125). Độ dài MN bằng :

(A) 5cm ; (B) 3cm ; (C) 6cm ; (D) 4cm.

Hãy chọn đáp số đúng.



Hình 126

9. Trên hình 126, số đo góc MPN nhỏ hơn số đo góc MON là 35^o. Tổng số đo hai góc MPN và MON là :

(A) 90^o ; (B) 105^o ; (C) 115^o ; (D) 70^o.

Hãy chọn đáp số đúng.

10. Cho hai đường tròn (O ; 16cm) và (O' ; 9cm) tiếp xúc ngoài tại A. Gọi BC là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn ($B \in (O)$, $C \in (O')$). Kẻ tiếp tuyến chung tại A cắt BC ở M.

a) Tính góc OMO'.

b) Tính độ dài BC.

c) Gọi I là trung điểm của OO'. Chứng minh rằng BC là tiếp tuyến của đường tròn tâm I, bán kính IM.

11. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O ; R) có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2 = 4R^2$.

12. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Trên đường chéo BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$. Chứng minh :

a) $\Delta ADE \backsim \Delta ACB$, $\Delta ABE \backsim \Delta ACD$;

b) AD.BC + AB.CD = AC.BD.

13. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một dây CD. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với CD, cắt AB tại I. Các tiếp tuyến tại A và B của nửa đường tròn cắt đường thẳng CD theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng :

a) Các tứ giác AECI và BFCI nội tiếp được ;

b) Tam giác IEF vuông.

14. Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Kẻ EF vuông góc với AD. Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh rằng :

a) Các tứ giác ABEF, DCEF nội tiếp được ;

b) Tia CA là tia phân giác của góc BCF ;

c) Tứ giác BCMF nội tiếp được.

15. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O) ta vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên cung nhỏ AB lấy một điểm C. Vẽ CD, CE, CF lần lượt vuông góc với AB, MA, MB. Gọi I là giao điểm của AC và DE, K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng :

a) Các tứ giác AECD, BFCD nội tiếp được ;

b) $CD^2 = CE.CF$;

c) Tứ giác ICKD nội tiếp được ;

d) $IK \perp CD$.

16. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Biết rằng thể tích hình trụ là $128\pi cm^3$. Tính diện tích xung quanh của nó.

17. Cho hình 127. Khi quay tam giác ABC một vòng quanh cạnh BC cố định thì được :

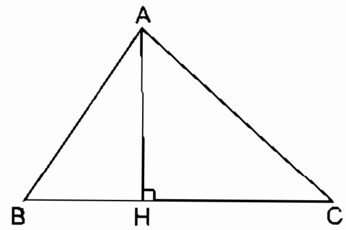
(A) một hình nón ;

(B) hai hình nón ;

(C) một hình trụ ;

(D) một đường tròn.

Hãy chọn câu trả lời đúng.



Hình 127

18. Quay tam giác vuông ABC ($\widehat{A} = 90^o$) một vòng quanh cạnh AB là được một hình nón. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón biết BC = 12cm và $\widehat{ABC} = 30^o$.

LỜI GIẢI

A. Phần đại số

1. Đáp số đúng là (C).

2. Câu trả lời đúng là (D).

3. Đáp số đúng là (C).

4. Ta có

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\sqrt{4,5} + \frac{2}{5}\sqrt{50}\right) : \frac{4}{15}\sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{15}{4}\sqrt{\frac{1}{2}.8} - \frac{3}{2}.\frac{15}{4}\sqrt{4,5.8} + \frac{2}{5}.\frac{15}{4}\sqrt{50.8}$$

$$= \frac{15}{8}.2 - \frac{45}{8}.6 + \frac{3}{2}.20 = \frac{15-135}{4} + 30 = \frac{-120}{4} + 30 = -30 + 30 = 0.$$

5. $$P = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 = \frac{(\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$$

$$= x - \sqrt{xy} + y - x + 2\sqrt{xy} - y = \sqrt{xy}.$$

6. Biến đổi vế trái, ta được

$$\left(\frac{1}{a-\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{a}-1}\right):\frac{\sqrt{a}+1}{a-2\sqrt{a}+1} = \frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}:\frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)}\cdot\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}.$$

7. a) Điều kiện để P có nghĩa là $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Rút gọn ta được $P = \sqrt{x}(1-\sqrt{x})$.

b) $P = -x + \sqrt{x} = -\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$.

Vậy P lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ khi $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{1}{4}$.

8. Đáp số đúng là (D). Điểm $(-1\ ;\ 7)$.

9. a) Hàm số đồng biến khi hệ số $a = m - 3 > 0$ hay $m > 3$ và nghịch biến khi $m < 3$.

b) Toạ độ điểm A phải nghiệm đúng hệ thức $y = (m-3)x$ tức là $2 = (m-3).1$ suy ra $m = 5$. Ta có hàm số $y = 2x$.

c) Tương tự, ta tìm được $m = 1$. Hàm số cần tìm là $y = -2x$.

10. Câu trả lời đúng là (D). Cặp số $\left(\frac{19}{7}\ ;\ \frac{17}{7}\right)$.

11. a) *Hướng dẫn*. Điều kiện $x \neq \pm y$. Đặt $\frac{1}{x+y} = u$, $\frac{1}{x-y} = v$.

Đáp số *:* $\left(\frac{77}{20}\ ;\ -\frac{63}{20}\right)$.

b) *Hướng dẫn*. Điều kiện $x \geq 0$; $y \geq 0$. Đặt $\sqrt{x} = u\ (u \geq 0)$, $\sqrt{y} = v\ (v \geq 0)$.

Đáp số *:* $(0\ ;\ 1)$.

12. Câu trả lời đúng là (D).

13. a) Phương trình (1) có nghiệm nếu $\Delta' = 1 - m \geq 0$ hay $m \leq 1$.

b) Có hai nghiệm dương nếu $\Delta' = 1 - m \geq 0$, $P = x_1x_2 = m > 0$ vì $S = x_1 + x_2 = 2 > 0$. Từ đó ta có $0 < m \leq 1$.

c) Có hai nghiệm trái dấu nếu $P = x_1x_2 = m < 0$.

14. Tổng hai nghiệm là $x_1 + x_2 = \frac{1}{10 - \sqrt{72}} + \frac{1}{10 + \sqrt{72}} = \frac{20}{28}$.

Tích hai nghiệm là $x_1 x_2 = \frac{1}{10 - \sqrt{72}} \cdot \frac{1}{10 + \sqrt{72}} = \frac{1}{28}$.

Vậy phương trình phải tìm là

$$x^2 - \frac{20}{28}x + \frac{1}{28} = 0$$

hay $28x^2 - 20x + 1 = 0$.

15. a) $x_1 = \sqrt{\frac{7}{20}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{20}}$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = -\frac{1}{2}$.

b) Vô nghiệm.

16. Cạnh đáy 20dm, chiều cao 15dm.

17. Gọi vận tốc ôtô là x (km/h) $(x > 0)$ và thời gian đi của ôtô là y (h) $(y > 0)$.
Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (x + 30)(y - 1) = xy \\ (x - 15)(y + 1) = xy \end{cases}.$$

Giải ra, được $x = 60$, $y = 3$.

18. Gọi hai số phải tìm là x và y. Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y$.

Cách 1. Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 20 & (1) \\ x^2 + y^2 = 208 \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $(x + y)^2 = 20^2$ hay $x^2 + y^2 + 2xy = 400$.

Do đó $2xy = 400 - 208 = 192$ nên $xy = 96$.

Các số x và y là các nghiệm của phương trình

$$X^2 - 20X + 96 = 0.$$

Phương trình này cho ta nghiệm $x = 12$, $y = 8$.

Cách 2. Đặt $x = 10 + a$ $(a \geq 0)$ thì $y = 20 - x = 20 - (10 + a) = 10 - a$.

Theo đề bài ta có phương trình $(10 + a)^2 + (10 - a)^2 = 208$.

Từ đó ta tìm được $a = 2$.

Suy ra hai số phải tìm là : $x = 12$, $y = 8$.

B. Phần hình học

1. a) $h = \sqrt{b'c'} = \sqrt{25.16} = 20$;

$b = \sqrt{ab'} = \sqrt{(b' + c').b'} = \sqrt{41.25} = 5\sqrt{41}$; $c = 4\sqrt{41}$.

b) $a = 24$, $c = 12\sqrt{3}$, $c' = 18$.

c) $a = 16$, $b = 8\sqrt{3}$, $b' = 12$.

d) $b = 3\sqrt{5}$, $c' = 4$, $b' = 5$, $h = 2\sqrt{5}$.

2. a) $ah = bc = 2S \Rightarrow h = \dfrac{bc}{a}$.

b) $c^2 = ac' \Rightarrow a = \dfrac{c^2}{c'}$, $b^2 = ab' \Rightarrow a = \dfrac{b^2}{b'}$, do đó $\dfrac{b^2}{b'} = \dfrac{c^2}{c'}$.

3. Vì $5^2 + 12^2 = 13^2$ nên $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Theo định lí Py-ta-go đảo, tam giác ABC vuông tại A.

Ta có $AB^2 = BC.BH \Rightarrow BH = \dfrac{AB^2}{BC} = \dfrac{5^2}{13} = 1\dfrac{12}{13}$ (cm).

Tương tự $CH = \dfrac{AC^2}{BC} = \dfrac{12^2}{13} = 11\dfrac{1}{13}$ (cm).

4. a) $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{17}$; $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \dfrac{15}{17}$; $\operatorname{tg} A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{8}{15}$;

$\cos B = \dfrac{BC}{AB} = \sin A = \dfrac{8}{17}$; $\sin B = \cos A = \dfrac{15}{17}$; $\operatorname{tg} B = \dfrac{15}{8}$.

b) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{21^2 + 20^2} = 29$;

$\sin A = \cos B = \dfrac{21}{29}$; $\cos A = \sin B = \dfrac{20}{29}$; $\operatorname{tg} B = \dfrac{20}{21}$; $\operatorname{tg} A = \dfrac{21}{20}$.

c) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{5}$; $\sin A = \cos B = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

$\cos A = \sin B = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\text{tg } A = \dfrac{1}{2}$, $\text{tg } B = 2$.

d) $\sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{24}{25}$; $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \dfrac{7}{25}$; $\text{tg } B = \dfrac{24}{7}$;

$\cos A = \sin B = \dfrac{24}{25}$; $\sin A = \cos B = \dfrac{7}{25}$; $\text{tg } A = \dfrac{7}{24}$.

5. (h.128) Gọi E là giao điểm của tia BD và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

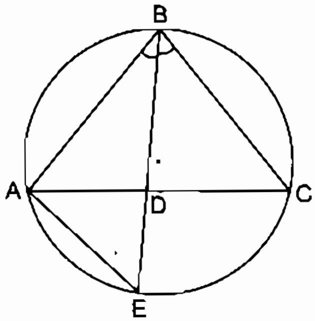
Ta có $\Delta BEA \backsim \Delta BCD$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BE}{BC}$.

Nhưng BE = BD + DE nên

$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BD + DE}{BC} \Rightarrow BD^2 + BD.DE = AB.BC$.

Ta lại có $BD.DE = AD.DC$. Từ đó

$BD^2 = AB.BC - AD.DC$.



Hình 128

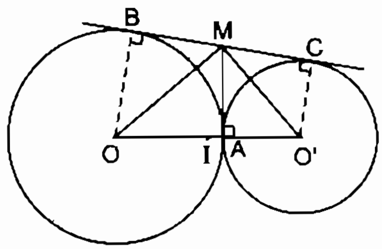
6. Đáp số đúng là (A).

7. Đáp số đúng là (D).

8. Đáp số đúng là (D).

9. Đáp số đúng là (D).

10. (h.129)



Hình 129

a) $\widehat{OMO'} = 90^0$ (vì MO là tia phân giác của $\widehat{AMB}$ và MO' là tia phân giác của $\widehat{AMC}$).

b) Trong tam giác vuông OMO' ta có

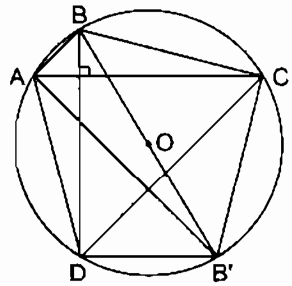
$MA^2 = AO.AO' = 16.9 = 144 \Rightarrow MA = 12$ (cm).

Ta lại có MA = MB = MC nên BC = 2MA = 24 (cm).

c) Dễ thấy OBCO' là hình thang vuông và IM là đường trung bình của nó. Suy ra IM vuông góc với BC và $IM = \dfrac{OB + O'C}{2} = \dfrac{OO'}{2} \Rightarrow$ IM là bán kính của đường tròn tâm I lại vuông góc với BC tại M. Vậy BC là tiếp tuyến của đường tròn tâm I.

11. (h.130) Kẻ đường kính BB'. Nối B'A, B'D, B'C. Ta có tứ giác ADB'C là hình thang (AC // B'D vì cùng vuông góc với BD). Hình thang này nội tiếp đường tròn (O) nên là hình thang cân suy ra CD = AB'. Do đó $AB^2 + CD^2 = AB^2 + AB'^2 = BB'^2$ (tam giác ABB' vuông ở A).

Vậy $AB^2 + CD^2 = 4R^2$.



Hình 130

12. (h.131)

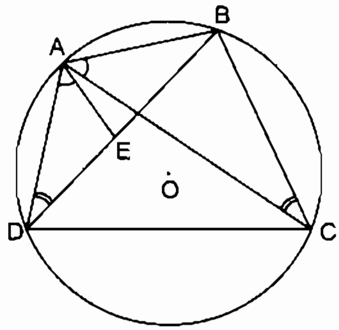
a) $\Delta ADE \backsim \Delta ACB$ (g.g)

$\Delta ABE \backsim \Delta ACD$ (g.g).

b) Từ câu a) suy ra

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} \Rightarrow AD.CB = AC.DE \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE. \qquad (2)$$



Hình 131

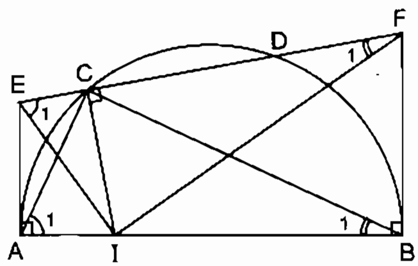
Từ (1) và (2) ta có

$$AD.BC + AB.CD = AC(DE + BE) = AC.BD.$$

13. (h.132)

a) Các tứ giác AECI và BFCI nội tiếp được vì chúng đều có tổng hai góc đối bằng 180^o ($\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{C} + \widehat{B} = 180^o$).

b) Xét ΔIEF và ΔCAB, có :



Hình 132

$\widehat{E}_1 = \widehat{A}_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AECI).

$\widehat{F}_1 = \widehat{B}_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BFCI).

Do đó $\Delta IEF \backsim \Delta CAB$ (g.g) suy ra $\widehat{EIF} = \widehat{ACB}$.

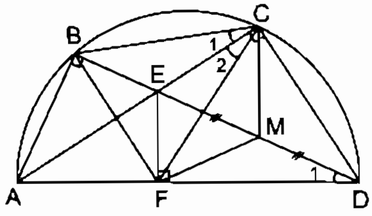
Ta lại có $\widehat{ACB} = 90^o$ nên $\widehat{EIF} = 90^o$, do đó ΔIEF vuông.

14. (h.133)

a) *Hướng dẫn*. Chứng minh tổng các góc đối bằng 180^o.

b) $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (vì cùng bằng $\widehat{D_1}$).

c) Ta có MF = MD (MF là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông) suy ra tam giác MFD cân ở M và $\widehat{BMF} = 2\widehat{D_1}$. Ta lại có $\widehat{BCF} = 2\widehat{D_1}$ (từ câu b)), nên $\widehat{BMF} = \widehat{BCF}$ suy ra tứ giác BCMF nội tiếp được.



Hình 133

15. (h.134)

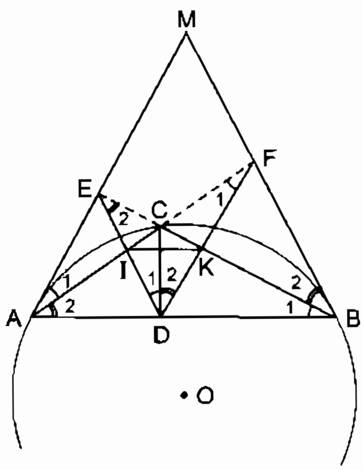
a) *Hướng dẫn*. Chứng minh tổng các góc đối của các tứ giác đó bằng 180^o.

b) Có $\widehat{D_1} = \widehat{A_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CE) ; $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ (góc giữa tia tiếp tuyến với một dây và góc nội tiếp cùng chắn cung CA) ; $\widehat{B_1} = \widehat{F_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CD). Suy ra $\widehat{D_1} = \widehat{F_1}$.

Chứng minh tương tự ta có $\widehat{E_2} = \widehat{D_2}$.

Do đó $\Delta DEC \backsim \Delta FDC$ (g.g), từ đó ta có

$$\frac{CD}{CF} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow CD^2 = CE.CF.$$



Hình 134

c) Tứ giác ICKD có

$$\widehat{ICK} + \widehat{IDK} = \widehat{ICK} + \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \widehat{ICK} + \widehat{B_1} + \widehat{A_2} = 180^o.$$

Suy ra tứ giác ICKD nội tiếp được.

d) Ta có $\widehat{CIK} = \widehat{D_2}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CK).

Suy ra $\widehat{CIK} = \widehat{A_2}$, mà chúng ở vị trí đồng vị do đó IK // AB. Vì CD ⊥ AB (gt) nên CD ⊥ IK.

16. $V = \pi R^2 h$; $h = 2R$ nên $V = 2\pi R^3$.

Ta lại có $V = 128\pi cm^3$ nên $R^3 = 64 \Rightarrow R = 4$ (cm).

$S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.4.8 = 64\pi$ (cm^2).

17. Câu trả lời đúng là (B).

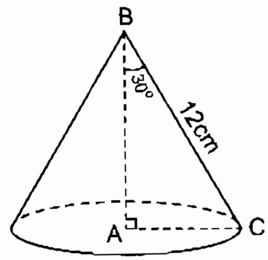
18. (h.135) Tam giác vuông ABC có $\widehat{ABC} = 30^o$ nên

$AC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.12 = 6$ (cm) ;

$AB = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (cm) ;

$V = \frac{1}{3}\pi.AC^2.AB = \frac{1}{3}\pi.6^2.6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi$ (cm^3) ;

$S_{xq} = \pi.AC.BC = \pi.6.12 = 72\pi$ (cm^2).



Hình 135

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập lần đầu : **NGUYỄN TRỌNG THIỆP - LÊ THỊ THANH HẰNG**
Biên tập tái bản : **NGUYỄN THỊ NGUYÊN THUÝ**
Biên tập kĩ thuật : **NGUYỄN NAM THÀNH – TRẦN THANH HẰNG**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **NGUYỄN THỊ NGUYÊN THUÝ - PHAN THỊ MINH NGUYỆT**
Chế bản : **CÔNG TY CP THIẾT KẾ VÀ PHÁT HÀNH SÁCH GIÁO DỤC**

BÀI TẬP TOÁN 9 - TẬP HAI
Mã số : 2B904T1

In 30.000 bản, (QĐ:02BT) khổ 17x24cm.
Tại Nhà in Báo Hà Nam.
Số 29 - Đ. Lê Hoàn - TP. Phủ Lý - Hà Nam
Số in: 119. Số XB: 01-2011/CXB/777-1235/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 03 năm 2011.

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG
CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH BÀI TẬP LỚP 9

1. Bài tập Ngữ văn 9 (tập một, tập hai)
2. Bài tập Toán 9 (tập một, tập hai)
3. Bài tập Vật lí 9
4. Bài tập Hoá học 9
5. Bài tập Tiếng Anh 9
6. Bài tập Tiếng Pháp 9
7. Bài tập Tiếng Nga 9

8 934994 023122

Giá: **13.300đ**