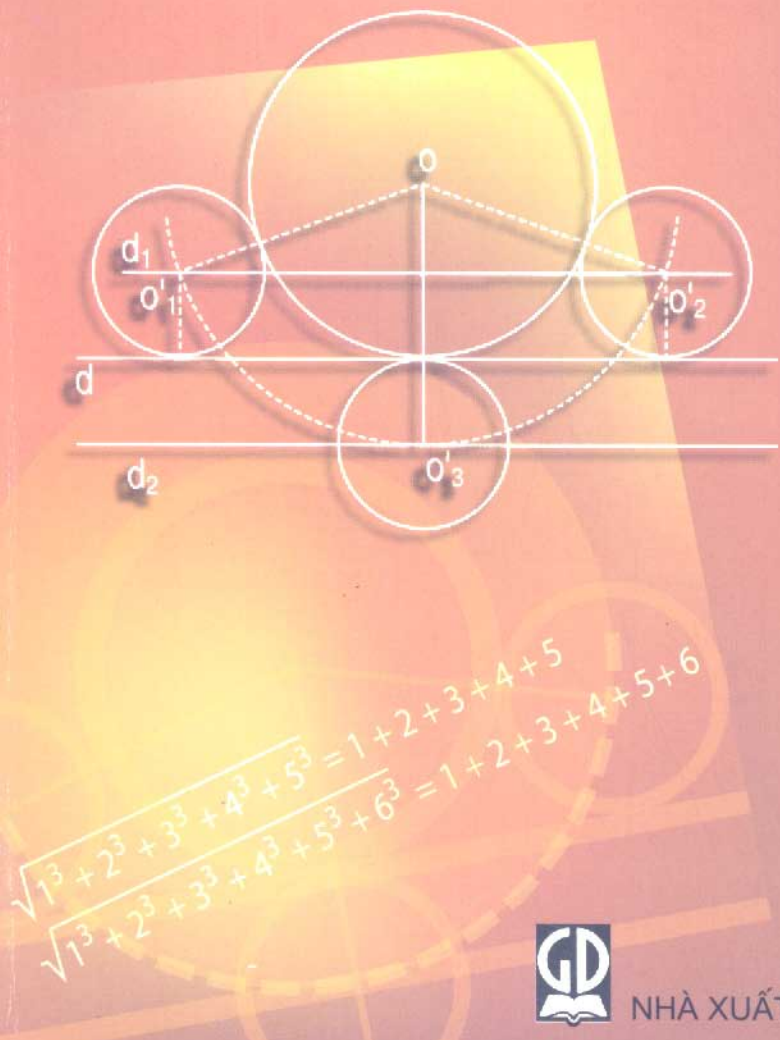
TÔN THÂN (Chủ biên) - VŨ HỮU BÌNH
TRẦN PHƯƠNG DUNG - LÊ VĂN HỒNG - NGUYỄN HỮU THẢO

BÀI TẬP TOÁN 9

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

TÔN THÂN (Chủ biên)
VŨ HỮU BÌNH - TRẦN PHƯƠNG DUNG - LÊ VĂN HỒNG - NGUYỄN HỮU THẢO

Bài tập TOÁN 9

TẬP MỘT

(Tái bản lần thứ sáu)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

01–2011/CXB/776–1235/GD

Mã số : 2B903T1

LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm qua, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 do chính các tác giả sách giáo khoa Toán THCS biên soạn đã được sử dụng kèm theo sách giáo khoa và đã mang lại những hiệu quả thiết thực. Bộ sách đã là một tài liệu bổ ích giúp các thầy, cô giáo có thêm tư liệu trong việc soạn giảng, giúp các em học sinh tự học, tự rèn luyện kĩ năng, qua đó củng cố được kiến thức cơ bản, hình thành phương pháp giải toán, tăng thêm khả năng vận dụng kiến thức và góp phần rèn luyện tư duy toán học.

Để đáp ứng tốt hơn nhu cầu ngày càng cao của các thầy, cô giáo và các em học sinh, chúng tôi tiến hành chỉnh lí và bổ sung bộ sách bài tập hiện có theo hướng tạo nhiều cơ hội hơn nữa để các em học sinh được củng cố kiến thức toán học cơ bản, được rèn luyện kĩ năng theo ***Chuẩn kiến thức, kĩ năng*** trong ***Chương trình Giáo dục phổ thông*** được Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành ngày 5 tháng 5 năm 2006. Nói chung, ở mỗi "xoắn" (§), cuối mỗi chương sẽ có thêm phần ***Bài tập bổ sung***. Trong phần này, có thể có các *câu hỏi trắc nghiệm khách quan* để các em học sinh tự kiểm tra, đánh giá mức độ nắm vững kiến thức của mình. Một số dạng bài tập chưa có trong sách giáo khoa cũng được bổ sung nhằm làm phong phú thêm các thể loại bài tập, giúp các em học sinh tập dượt vận dụng kiến thức trong nhiều tình huống khác nhau. Bộ sách cũng được bổ sung một số bài tập dành cho các em học sinh khá, giỏi. Những bài tập này được đánh dấu "*". Bên cạnh đó, các tác giả cũng chú ý chỉnh sửa cách diễn đạt ở một số chỗ cho thích hợp và dễ hiểu hơn.

Chúng tôi hi vọng rằng với việc chỉnh lí và bổ sung như trên, bộ sách Bài tập Toán từ lớp 6 đến lớp 9 sẽ góp phần tích cực hơn nữa trong việc nâng cao chất lượng dạy và học môn Toán ở các trường THCS trong cả nước, đáp ứng tốt hơn nữa nhu cầu đa dạng của các đối tượng học sinh khác nhau.

Mặc dù đã có nhiều cố gắng song bộ sách khó tránh khỏi những thiếu sót. Chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy, cô giáo và bạn đọc gần xa để trong các lần tái bản sau bộ sách được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn.

Hà Nội, tháng 10 năm 2009

CÁC TÁC GIẢ

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I

CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

A. ĐỀ BÀI

§1. Căn bậc hai

1. Tính căn bậc hai số học của

a) 0,01 ; b) 0,04 ; c) 0,49 ; d) 0,64 ;

e) 0,25 ; f) 0,81 ; g) 0,09 ; h) 0,16.

2. Dùng máy tính bỏ túi (máy tính CASIO *fx-220*, CASIO *fx-500A*, SHARP *EL−500M*,...) tìm x thoả mãn đẳng thức (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

a) $x^2 = 5$; b) $x^2 = 6$;

c) $x^2 = 2,5$; d) $x^2 = \sqrt{5}$.

3. Số nào có căn bậc hai là

a) $\sqrt{5}$; b) 1,5 ;

c) – 0,1 ; d) $-\sqrt{9}$?

4. Tìm x không âm, biết :

a) $\sqrt{x} = 3$; b) $\sqrt{x} = \sqrt{5}$;

c) $\sqrt{x} = 0$; d) $\sqrt{x} = -2$.

5. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

a) 2 và $\sqrt{2}+1$; b) 1 và $\sqrt{3}-1$;

c) $2\sqrt{31}$ và 10 ; d) $-3\sqrt{11}$ và -12.

6. Tìm những khẳng định đúng trong các khẳng định sau

a) Căn bậc hai của 0,36 là 0,6 ;

b) Căn bậc hai của 0,36 là 0,06 ;

c) $\sqrt{0,36} = 0,6$;

d) Căn bậc hai của 0,36 là 0,6 và – 0,6 ;

e) $\sqrt{0,36} = \pm 0,6$.

7. Trong các số $\sqrt{(-5)^2}$; $\sqrt{5^2}$; $-\sqrt{5^2}$; $-\sqrt{(-5)^2}$, số nào là căn bậc hai số học của 25 ?

8. Chứng minh :

$$\sqrt{1^3+2^3} = 1 + 2 ;$$

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3} = 1 + 2 + 3 ;$$

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} = 1 + 2 + 3 + 4.$$

Viết tiếp một số đẳng thức tương tự.

9. Cho hai số a, b không âm. Chứng minh :

a) Nếu $a < b$ thì $\sqrt{a} < \sqrt{b}$;

b) Nếu $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ thì $a < b$.

(Bài tập này chứng minh định lí ở §1, chương I, phần Đại số, sách giáo khoa Toán 9 tập một).

10. Cho số m dương. Chứng minh :

a) Nếu $m > 1$ thì $\sqrt{m} > 1$;

b) Nếu $m < 1$ thì $\sqrt{m} < 1$.

11. Cho số m dương. Chứng minh :

a) Nếu $m > 1$ thì $m > \sqrt{m}$;

b) Nếu $m < 1$ thì $m < \sqrt{m}$.

Bài tập bổ sung

1.1. Giá trị của $\sqrt{0,16}$ là

(A) 0,04 ; (B) 0,4 ;

(C) 0,04 và −0,04 ; (D) 0,4 và −0,4.

Hãy chọn đáp án đúng.

§2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

12. Tìm x để căn thức sau có nghĩa

a) $\sqrt{-2x+3}$; b) $\sqrt{\dfrac{2}{x^2}}$;

c) $\sqrt{\dfrac{4}{x+3}}$; d) $\sqrt{\dfrac{-5}{x^2+6}}$.

13. Rút gọn rồi tính

a) $5\sqrt{(-2)^4}$; b) $-4\sqrt{(-3)^6}$;

c) $\sqrt{\sqrt{(-5)^8}}$; d) $2\sqrt{(-5)^6}+3\sqrt{(-2)^8}$.

14. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sqrt{(4+\sqrt{2})^2}$; b) $\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}$;

c) $\sqrt{(4-\sqrt{17})^2}$; d) $2\sqrt{3}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$.

15. Chứng minh

a) $9+4\sqrt{5}=(\sqrt{5}+2)^2$; b) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}=-2$;

c) $(4-\sqrt{7})^2=23-8\sqrt{7}$; d) $\sqrt{23+8\sqrt{7}}-\sqrt{7}=4$.

16*. Biểu thức sau đây xác định với giá trị nào của x ?

a) $\sqrt{(x-1)(x-3)}$; b) $\sqrt{x^2-4}$;

c) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$; d) $\sqrt{\dfrac{2+x}{5-x}}$.

17*. Tìm x, biết

a) $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$;　　b) $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = 3x - 1$;

c) $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5$;　　d) $\sqrt{x^4} = 7$.

18. Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 - 7$;　　b) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2$;　　c) $x^2 + 2\sqrt{13}x + 13$.

19. Rút gọn các phân thức

a) $\dfrac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$　(với $x \neq -\sqrt{5}$) ;

b) $\dfrac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{x^2 - 2}$ (với $x \neq \pm\sqrt{2}$).

20. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

a) $6 + 2\sqrt{2}$ và 9 ;　　b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ và 3 ;

c) $9 + 4\sqrt{5}$ và 16 ;　　d) $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ và 2.

21. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$;　　b) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - 3 + \sqrt{2}$;

c) $\sqrt{9x^2} - 2x$ với $x < 0$;　　d) $x - 4 + \sqrt{16 - 8x + x^2}$ với $x > 4$.

22. Với n là số tự nhiên, chứng minh đẳng thức

$$\sqrt{(n+1)^2} + \sqrt{n^2} = (n+1)^2 - n^2.$$

Viết đẳng thức trên khi n là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Bài tập bổ sung

2.1. Đẳng thức nào đúng nếu x là số âm

(A) $\sqrt{9x^2} = 9x$;　　(B) $\sqrt{9x^2} = 3x$;

(C) $\sqrt{9x^2} = -9x$;　　(D) $\sqrt{9x^2} = -3x$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

23. Áp dụng quy tắc nhân các căn bậc hai, hãy tính

a) $\sqrt{10}.\sqrt{40}$;   b) $\sqrt{5}.\sqrt{45}$;

c) $\sqrt{52}.\sqrt{13}$;   d) $\sqrt{2}.\sqrt{162}$.

24. Áp dụng quy tắc khai phương một tích, hãy tính

a) $\sqrt{45.80}$;   b) $\sqrt{75.48}$;

c) $\sqrt{90.6,4}$;   d) $\sqrt{2,5.14,4}$.

25. Rút gọn rồi tính

a) $\sqrt{6,8^2-3,2^2}$;   b) $\sqrt{21,8^2-18,2^2}$;

c) $\sqrt{117,5^2-26,5^2-1440}$;   d) $\sqrt{146,5^2-109,5^2+27.256}$.

26. Chứng minh

a) $\sqrt{9-\sqrt{17}}.\sqrt{9+\sqrt{17}}=8$;

b) $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)+(1+2\sqrt{2})^2-2\sqrt{6}=9$.

27. Rút gọn

a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2\sqrt{3}+\sqrt{28}}$;   b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+\sqrt{16}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

28. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ và $\sqrt{10}$;   b) $\sqrt{3}+2$ và $\sqrt{2}+\sqrt{6}$;

c) 16 và $\sqrt{15}.\sqrt{17}$;   d) 8 và $\sqrt{15}+\sqrt{17}$.

29. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

$$\sqrt{2003}+\sqrt{2005} \text{ và } 2\sqrt{2004}.$$

30*. Cho các biểu thức

$$A=\sqrt{x+2}.\sqrt{x-3} \text{ và } B=\sqrt{(x+2)(x-3)}.$$

a) Tìm x để A có nghĩa. Tìm x để B có nghĩa.

b) Với giá trị nào của x thì A = B ?

31. Biểu diễn $\sqrt{ab}$ ở dạng tích các căn bậc hai với a < 0 và b < 0.

Áp dụng tính $\sqrt{(-25).(-64)}$.

32. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{4(a-3)^2}$ với $a \geq 3$; b) $\sqrt{9(b-2)^2}$ với $b < 2$;

c) $\sqrt{a^2(a+1)^2}$ với $a > 0$; d) $\sqrt{b^2(b-1)^2}$ với $b < 0$.

33*. Tìm điều kiện của x để các biểu thức sau có nghĩa và biến đổi chúng về dạng tích

a) $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x-2}$; b) $3\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}$.

34. Tìm x, biết

a) $\sqrt{x-5}=3$; b) $\sqrt{x-10}=-2$;

c) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{5}$; d) $\sqrt{4-5x}=12$.

35. Với n là số tự nhiên, chứng minh

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2=\sqrt{(2n+1)^2}-\sqrt{(2n+1)^2-1}.$$

Viết đẳng thức trên khi n bằng 1, 2, 3, 4.

Bài tập bổ sung

3.1. Giá trị của $\sqrt{1,6}.\sqrt{2,5}$ bằng

(A) 0,20 ; (B) 2,0 ;

(C) 20,0 ; (D) 0,02.

Hãy chọn đáp án đúng.

§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

36. Áp dụng quy tắc khai phương một thương, hãy tính

a) $\sqrt{\dfrac{9}{169}}$; b) $\sqrt{\dfrac{25}{144}}$;

c) $\sqrt{1\dfrac{9}{16}}$; d) $\sqrt{2\dfrac{7}{81}}$.

37. Áp dụng quy tắc chia hai căn bậc hai, hãy tính

a) $\dfrac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}}$; b) $\dfrac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{0,5}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{192}}{\sqrt{12}}$; d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{150}}$.

38*. Cho các biểu thức

$$A = \sqrt{\frac{2x+3}{x-3}} \text{ và } B = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{x-3}}.$$

a) Tìm x để A có nghĩa. Tìm x để B có nghĩa.

b) Với giá trị nào của x thì A = B ?

39. Biểu diễn $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ với $a < 0$ và $b < 0$ ở dạng thương của hai căn thức.

Áp dụng tính $\sqrt{\dfrac{-49}{-81}}$.

40. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{\sqrt{63y^3}}{\sqrt{7y}}$ $(y > 0)$;

b) $\dfrac{\sqrt{48x^3}}{\sqrt{3x^5}}$ $(x > 0)$;

c) $\dfrac{\sqrt{45mn^2}}{\sqrt{20m}}$ $(m > 0$ và $n > 0)$;

d) $\dfrac{\sqrt{16a^4b^6}}{\sqrt{128a^6b^6}}$ $(a < 0$ và $b \neq 0)$.

41. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}}$ $(x \geq 0)$;

b) $\dfrac{x-1}{\sqrt{y}-1}\sqrt{\dfrac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$ $(x \neq 1,\ y \neq 1$ và $y \geq 0)$.

42. Rút gọn biểu thức với điều kiện đã cho của x rồi tính giá trị của nó :

a) $\sqrt{\dfrac{(x-2)^4}{(3-x)^2}}+\dfrac{x^2-1}{x-3}$ $(x < 3)$; tại $x = 0,5$;

b) $4x-\sqrt{8}+\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2}}{\sqrt{x+2}}$ $(x > -2)$; tại $x = -\sqrt{2}$.

43*. Tìm x thoả mãn điều kiện

a) $\sqrt{\dfrac{2x-3}{x-1}}=2$; b) $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}}=2$;

c) $\sqrt{\dfrac{4x+3}{x+1}}=3$; d) $\dfrac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}}=3$.

44. Cho hai số a, b không âm. Chứng minh

$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ *(Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm).*

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

45. Với $a \geq 0$ và $b \geq 0$, chứng minh

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}.$$

46. Với a dương, chứng minh

$$a+\frac{1}{a} \geq 2.$$

Bài tập bổ sung

4.1. Giá trị của $\sqrt{\dfrac{49}{0,09}}$ bằng

(A) $\dfrac{7}{3}$; (B) $\dfrac{70}{3}$; (C) $\dfrac{7}{30}$; (D) $\dfrac{700}{3}$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§5. Bảng căn bậc hai

47. Dùng bảng căn bậc hai tìm x, biết

a) $x^2 = 15$; b) $x^2 = 22,8$;

c) $x^2 = 351$; d) $x^2 = 0,46$.

48. Dùng bảng bình phương tìm x, biết

a) $\sqrt{x} = 1,5$; b) $\sqrt{x} = 2,15$;

c) $\sqrt{x} = 0,52$; d) $\sqrt{x} = 0,038$.

49. Kiểm tra kết quả bài 47 và 48 bằng máy tính bỏ túi.

50. Thử lại kết quả bài 47 bằng bảng bình phương.

51. Thử lại kết quả bài 48 bằng bảng căn bậc hai.

52. Điền vào các chỗ trống (...) trong phép chứng minh sau :

Số $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Thật vậy, giả sử $\sqrt{2}$ không phải là số vô tỉ thì phải tồn tại các số nguyên m và n sao cho $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, trong đó n > 0 còn hai số m và n không có ước số chung nào khác 1 hay −1 (hai số m và n nguyên tố cùng nhau).

Khi đó, ta có... hay $2n^2 = m^2$. (1)

Kết quả (1) chứng tỏ số nguyên m là số chẵn, nghĩa là m = 2p với p là số nguyên.

Thay m = 2p vào (1) ta được..., suy ra $n^2 = 2p^2$. (2)

Kết quả (2) chứng tỏ n phải là số chẵn.

Hai số m và n đều là số chẵn, mâu thuẫn với...

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

53. Chứng minh :

a) Số $\sqrt{3}$ là số vô tỉ ;

b) Các số $5\sqrt{2}$; $3+\sqrt{2}$ đều là số vô tỉ.

54. Tìm tập hợp các số x thoả mãn bất đẳng thức

$$\sqrt{x} > 2$$

và biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

55. Tìm tập hợp các số x thoả mãn bất đẳng thức

$$\sqrt{x} < 3$$

và biểu diễn tập hợp đó trên trục số.

Bài tập bổ sung

5.1. Tra bảng căn bậc hai, tìm $\sqrt{35,92}$ được $\sqrt{35,92} \approx 5,993$. Vậy suy ra $\sqrt{0,3592}$ có giá trị gần đúng là :

(A) 0,5993 ; (B) 5,993 ; (C) 59,93 ; (D) 599,3.

Hãy chọn đáp án đúng.

§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

56. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn

a) $\sqrt{7x^2}$ với $x > 0$; b) $\sqrt{8y^2}$ với $y < 0$;

c) $\sqrt{25x^3}$ với $x > 0$; d) $\sqrt{48y^4}$.

57. Đưa thừa số vào trong dấu căn

a) $x\sqrt{5}$ với $x \geq 0$; b) $x\sqrt{13}$ với $x < 0$;

c) $x\sqrt{\dfrac{11}{x}}$ với $x > 0$; d) $x\sqrt{\dfrac{-29}{x}}$ với $x < 0$.

58. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$; b) $\sqrt{98} - \sqrt{72} + 0,5\sqrt{8}$;

c) $\sqrt{9a} - \sqrt{16a} + \sqrt{49a}$ với $a \geq 0$;

d) $\sqrt{16b} + 2\sqrt{40b} - 3\sqrt{90b}$ với $b \geq 0$.

59. Rút gọn các biểu thức

a) $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})\sqrt{3} - \sqrt{60}$; b) $(5\sqrt{2} + 2\sqrt{5})\sqrt{5} - \sqrt{250}$;

c) $(\sqrt{28} - \sqrt{12} - \sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$; d) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$.

60. Rút gọn các biểu thức

a) $2\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{\sqrt{75}}-3\sqrt{5\sqrt{48}}$; b) $2\sqrt{8\sqrt{3}}-2\sqrt{5\sqrt{3}}-3\sqrt{20\sqrt{3}}$.

61. Khai triển và rút gọn các biểu thức (với x và y không âm)

a) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)$; b) $(\sqrt{x}+2)(x-2\sqrt{x}+4)$;

c) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y+\sqrt{xy})$; d) $(x+\sqrt{y})(x^2+y-x\sqrt{y})$.

62. Khai triển và rút gọn các biểu thức (với x, y không âm)

a) $(4\sqrt{x}-\sqrt{2x})(\sqrt{x}-\sqrt{2x})$; b) $(2\sqrt{x}+\sqrt{y})(3\sqrt{x}-2\sqrt{y})$.

63. Chứng minh

a) $\dfrac{(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}=x-y$ với $x>0$ và $y>0$;

b) $\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x}-1}=x+\sqrt{x}+1$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

64. a) Chứng minh

$$x+2\sqrt{2x-4}=(\sqrt{2}+\sqrt{x-2})^2 \text{ với } x \geq 2 ;$$

b) Rút gọn biểu thức

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} \text{ với } x \geq 2.$$

65. Tìm x, biết

a) $\sqrt{25x}=35$; b) $\sqrt{4x} \leq 162$;

c) $3\sqrt{x}=\sqrt{12}$; d) $2\sqrt{x} \geq \sqrt{10}$.

66*. Tìm x, biết

a) $\sqrt{x^2-9}-3\sqrt{x-3}=0$; b) $\sqrt{x^2-4}-2\sqrt{x+2}=0$.

67*. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, chứng minh :

a) Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất ;

b) Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi bé nhất.

Bài tập bổ sung

6.1. Rút gọn biểu thức $3\sqrt{x^2y} + x\sqrt{y}$ với $x < 0$, $y \ge 0$ ta được

(A) $4x\sqrt{y}$; (B) $-4x\sqrt{y}$; (C) $-2x\sqrt{y}$; (D) $4\sqrt{x^2y}$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§7. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai (tiếp theo)

68. Khử mẫu của mỗi biểu thức lấy căn và rút gọn (nếu được)

a) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; b) $\sqrt{\frac{x^2}{5}}$ với $x \ge 0$;

c) $\sqrt{\frac{3}{x}}$ với $x > 0$; d) $\sqrt{x^2 - \frac{x^2}{7}}$ với $x < 0$.

69. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn (nếu được)

a) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{26}{5-2\sqrt{3}}$;

c) $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; d) $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$.

70. Rút gọn các biểu thức

a) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1}$; b) $\frac{5}{12(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})} - \frac{5}{12(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})}$;

c) $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$.

71. Chứng minh đẳng thức

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$ với n là số tự nhiên.

72. Xác định giá trị biểu thức sau theo cách thích hợp

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}.$$

73. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

$$\sqrt{2005}-\sqrt{2004} \text{ với } \sqrt{2004}-\sqrt{2003}.$$

74. Rút gọn

$$\frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{8}}-\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{9}}.$$

75. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ với $x \geq 0$, $y \geq 0$ và $x \neq y$;

b) $\dfrac{x-\sqrt{3x}+3}{x\sqrt{x}+3\sqrt{3}}$ với $x \geq 0$.

76. Trục căn thức ở mẫu

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$.

77. Tìm x, biết

a) $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{2}$; b) $\sqrt{10+\sqrt{3}x}=2+\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{3x-2}=2-\sqrt{3}$; d) $\sqrt{x+1}=\sqrt{5}-3$.

78. Tìm tập hợp các giá trị x thoả mãn điều kiện sau và biểu diễn tập hợp đó trên trục số

a) $\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3}$; b) $\sqrt{3-2x} \leq \sqrt{5}$.

79. Cho các số x và y có dạng

$$x = a_1\sqrt{2}+b_1 \text{ và } y = a_2\sqrt{2}+b_2,$$

trong đó a_1, a_2, b_1, b_2 là các số hữu tỉ. Chứng minh

a) $x + y$ và $x.y$ cũng có dạng $a\sqrt{2}+b$ với a và b là số hữu tỉ ;

b) $\dfrac{x}{y}$ với $y \neq 0$ cũng có dạng $a\sqrt{2}+b$ với a và b là số hữu tỉ.

Bài tập bổ sung

7.1. Với $x < 0$; $y < 0$, biểu thức $x\sqrt{\dfrac{x}{y^3}}$ được biến đổi thành

(A) $\dfrac{x}{y^2}\sqrt{xy}$; (B) $\dfrac{x}{y}\sqrt{xy}$; (C) $-\dfrac{x}{y^2}\sqrt{xy}$; (D) $-\dfrac{x}{y}\sqrt{xy}$.

Hãy chọn đáp án đúng.

7.2. Giá trị của $\dfrac{6}{\sqrt{7}-1}$ bằng

(A) $\sqrt{7}-1$; (B) $1-\sqrt{7}$; (C) $-\sqrt{7}-1$; (D) $\sqrt{7}+1$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

80. Rút gọn các biểu thức

a) $(2-\sqrt{2})(-5\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-5)^2$;

b) $2\sqrt{3a}-\sqrt{75a}+a\sqrt{\dfrac{13,5}{2a}}-\dfrac{2}{5}\sqrt{300a^3}$ với $a > 0$.

81. Rút gọn các biểu thức

a) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ với $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $a \neq b$;

b) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}$ với $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $a \neq b$.

82. a) Chứng minh

$$x^2+x\sqrt{3}+1=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$x^2 + x\sqrt{3} + 1.$$

Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu ?

83. Chứng tỏ giá trị các biểu thức sau là số hữu tỉ

a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-5} - \dfrac{2}{\sqrt{7}+5}$; b) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

84. Tìm x, biết

a) $\sqrt{4x+20} - 3\sqrt{5+x} + \dfrac{4}{3}\sqrt{9x+45} = 6$;

b) $\sqrt{25x-25} - \dfrac{15}{2}\sqrt{\dfrac{x-1}{9}} = 6 + \sqrt{x-1}$.

85. Cho biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}.$$

a) Rút gọn P nếu $x \geq 0$; $x \neq 4$;

b) Tìm x để P = 2.

86. Cho biểu thức

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1}\right).$$

a) Rút gọn Q với $a > 0$, $a \neq 4$ và $a \neq 1$.

b) Tìm giá trị của a để Q dương.

87. Với ba số a, b, c không âm, chứng minh bất đẳng thức

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Hãy mở rộng kết quả cho trường hợp bốn số, năm số không âm.

Bài tập bổ sung

8.1. Bất phương trình

$$\sqrt{32}x - (\sqrt{8} + \sqrt{2})x > \sqrt{2}$$

tương đương với bất phương trình

(A) $\sqrt{20}x > \sqrt{2}$; (B) $2\sqrt{5}x > \sqrt{2}$;

(C) $15\sqrt{2}x > \sqrt{2}$; (D) $\sqrt{2}x > \sqrt{2}$.

Hãy chọn đáp án đúng.

§9. Căn bậc ba

88. Tính (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

$$\sqrt[3]{-343} \ ; \ \sqrt[3]{0,027} \ ; \ \sqrt[3]{1,331} \ ; \ \sqrt[3]{-0,512}\,.$$

89. Tìm x, biết

a) $\sqrt[3]{x} = -1,5$; b) $\sqrt[3]{x-5} = 0,9$.

90. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$; b) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}} = \dfrac{1}{b}\sqrt[3]{ab}$ $(b \neq 0)$.

91. Tìm giá trị gần đúng của căn bậc ba mỗi số sau bằng bảng lập phương và kiểm tra bằng máy tính bỏ túi (làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

a) 12 ; b) 25,3 ;

c) –37,91 ; d) –0,08.

92. So sánh (không dùng bảng số hay máy tính bỏ túi)

a) $2\sqrt[3]{3}$ và $\sqrt[3]{23}$; b) 33 và $3\sqrt[3]{1333}$.

93. Tìm tập hợp các giá trị x thoả mãn điều kiện sau và biểu diễn tập hợp đó trên trục số

a) $\sqrt[3]{x} \geq 2$; b) $\sqrt[3]{x} \leq -1,5$.

94. Chứng minh

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right].$$

Từ đó, chứng tỏ :

a) Với ba số x, y, z không âm thì

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz \text{ ;}$$

b) Với ba số a, b, c không âm thì

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$ *(Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm).*

Dấu đẳng thức xảy ra khi ba số a, b, c bằng nhau.

95*. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm, chứng minh

a) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng tổng ba kích thước thì hình lập phương có thể tích lớn nhất ;

b) Trong các hình hộp chữ nhật có cùng thể tích thì hình lập phương có tổng ba kích thước bé nhất.

Ôn tập chương I

96. Nếu x thoả mãn điều kiện

$$\sqrt{3+\sqrt{x}} = 3$$

thì x nhận giá trị là

(A) 0 ; (B) 6 ; (C) 9 ; (D) 36.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

97. Biểu thức

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$$

có giá trị là

(A) 3 ; (B) 6 ; (C) $\sqrt{5}$; (D) $-\sqrt{5}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

98. Chứng minh các đẳng thức

a) $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{6}$;

b) $\sqrt{\dfrac{4}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\dfrac{4}{(2+\sqrt{5})^2}}=8$.

99. Cho $A=\dfrac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{4x-2}$.

Chứng minh $|A| = 0{,}5$ với $x \neq 0{,}5$.

100. Rút gọn các biểu thức

a) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

b) $\sqrt{15-6\sqrt{6}}+\sqrt{33-12\sqrt{6}}$;

c) $(15\sqrt{200}-3\sqrt{450}+2\sqrt{50}):\sqrt{10}$.

101. a) Chứng minh

$$x-4\sqrt{x-4}=(\sqrt{x-4}-2)^2 ;$$

b) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức

$$A=\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}.$$

102. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau :

$$A=\sqrt{x}+\sqrt{x+1} ; \qquad B=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}.$$

a) Chứng minh rằng $A \geq 1$ và $B \geq \sqrt{5}$;

b) Tìm x, biết

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1 ; \qquad \sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=2.$$

103. Chứng minh

$$x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \text{ với } x>0.$$

Từ đó, cho biết biểu thức $\dfrac{1}{x-\sqrt{x}+1}$ có giá trị lớn nhất là bao nhiêu ?

Giá trị đó đạt được khi x bằng bao nhiêu ?

104. Tìm số x nguyên để biểu thức $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên.

105. Chứng minh các đẳng thức (với a, b không âm và a ≠ b)

a) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}-2\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}}-\dfrac{2b}{b-a}=\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

b) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2=1$.

106. Cho biểu thức

$$A=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}.$$

a) Tìm điều kiện để A có nghĩa.

b) Khi A có nghĩa, chứng tỏ giá trị của A không phụ thuộc vào a.

107. Cho biểu thức

$$B=\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) \quad \text{với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1.$$

a) Rút gọn B ;

b) Tìm x để B = 3.

108. Cho biểu thức

$$C=\left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}+\frac{x+9}{9-x}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{với } x > 0 \text{ và } x \neq 9.$$

a) Rút gọn C ;

b) Tìm x sao cho C < −1.

Bài tập bổ sung

I.1. Không dùng bảng số hoặc máy tính, hãy so sánh $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ với $\sqrt{5}+1$.

B. LỜI GIẢI – CHỈ DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Căn bậc hai

1. a) 0,1 ; b) 0,2 ; c) 0,7 ; d) 0,8 ;

e) 0,5 ; f) 0,9 ; g) 0,3 ; h) 0,4.

2. a) $x_1 = \sqrt{5}$ và $x_2 = -\sqrt{5}$.

Ta có : $x_1 \approx 2,236$ và $x_2 \approx -2,236$;

Câu b) và c) tương tự ;

d) $x_1 = \sqrt{\sqrt{5}}$ và $x_2 = -\sqrt{\sqrt{5}}$.

Ta có : $x_1 \approx 1,495$ và $x_2 \approx -1,495$.

3. a) 5 ; b) 2,25 ; c) 0,01 ; d) 9.

4. a) *Giải* : $x = 3^2$, vậy $x = 9$;

b) *Đáp số* : $x = 5$;

c) *Đáp số* : $x = 0$;

d) *Giải* : Căn bậc hai số học thì không âm nên không tồn tại x thoả mãn $\sqrt{x} = -2$.

5. a) *Giải* : Ta có $1 < 2$ nên $1 < \sqrt{2}$. Từ đó

$$1 + 1 < 1 + \sqrt{2}$$

hay

$$2 < 1 + \sqrt{2}.$$

b) *Hướng dẫn* : Chứng tỏ $2 > \sqrt{3}$, từ đó suy ra

$$1 > \sqrt{3} - 1.$$

c) *Đáp số* : $2\sqrt{31} > 10$.

d) *Giải* : Vì $11 < 16$ nên $\sqrt{11} < \sqrt{16}$, tức là $\sqrt{11} < 4$.

Nhân hai vế của bất đẳng thức $\sqrt{11} < 4$ với -3, ta được $-3\sqrt{11} > -12$.

6. Câu c) và d) đúng.

7. $\sqrt{(-5)^2}$ và $\sqrt{5^2}$.

8. Kiểm tra để thấy mỗi đẳng thức đều có vế trái bằng vế phải. Chẳng hạn, với đẳng thức thứ ba, ta có

Vế trái : $\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3} = \sqrt{1+8+27+64} = \sqrt{100} = 10$.

Vế phải : $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Vậy đẳng thức xảy ra.

Ta có thể viết tiếp hai đẳng thức tương tự như :

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3} = 1+2+3+4+5 \ ;$$

$$\sqrt{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3} = 1+2+3+4+5+6 .$$

9. a) *Giải :* Do a, b không âm và a < b nên b > 0, suy ra

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}). \qquad (2)$$

Vì a < b nên a – b < 0, từ (2) suy ra

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) < 0. \qquad (3)$$

Từ (1) và (3), ta có :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < 0 \text{ hay } \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

b) *Hướng dẫn :* Chứng minh tương tự câu a) hoặc dùng phương pháp phản chứng.

10. a) Chú ý $\sqrt{1} = 1$, từ đó vận dụng kết quả câu a) bài 9 khi thay a bởi 1 và thay b bởi m ta có kết quả.

b) Tương tự câu a) nhưng thay a = m, b = 1.

11. a) Theo bài 10, câu a) ta có $\sqrt{m} > 1$.

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đó với số dương $\sqrt{m}$ (m dương nên $\sqrt{m}$ xác định và dương), ta được $m > \sqrt{m}$;

b) Tương tự câu a).

Bài tập bổ sung

1.1. Chọn (B).

§2. Căn thức bậc hai và hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

12. a) $\sqrt{-2x+3}$ có nghĩa khi và chỉ khi

$$-2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 1,5.$$

b) $\sqrt{\dfrac{2}{x^2}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\dfrac{2}{x^2} \geq 0.$

Do $x^2 \geq 0$, nên $\dfrac{2}{x^2} \geq 0$ khi và chỉ khi $x \neq 0$ (để cho $\dfrac{2}{x^2}$ có nghĩa).

c) $\sqrt{\dfrac{4}{x+3}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\dfrac{4}{x+3} \geq 0.$

Do $4 > 0$ nên $\dfrac{4}{x+3} \geq 0$ khi và chỉ khi $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3.$

d) $x^2 \geq 0$ nên $x^2 + 6 > 0$. Suy ra $\dfrac{-5}{x^2+6} < 0$ với mọi x.

Vậy không tồn tại x để $\sqrt{\dfrac{-5}{x^2+6}}$ có nghĩa.

13. a) 20 ; b) −108 ; c) 25 ; d) 298.

14. a) $4+\sqrt{2}$; b) $3-\sqrt{3}$; c) $\sqrt{17}-4$; d) $\sqrt{3}+2$.

15. a) Biến đổi vế phải

$$(\sqrt{5}+2)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2.\sqrt{5}.2 + 2^2 = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}.$$

Ta có vế phải bằng vế trái.

b) Biến đổi

$$9 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 + 2^2 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5}-2)^2.$$

Vậy $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} - \sqrt{5} = \left|\sqrt{5}-2\right| - \sqrt{5}$

$$= \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2.$$

Câu c) và d) tương tự hai câu trên.

16. a) *Giải :* Ta biết tích hai số ab không âm khi và chỉ khi : hoặc $a \geq 0$ và $b \geq 0$ hoặc $a \leq 0$ và $b \leq 0$.

Theo nhận xét trên thì $\sqrt{(x-1)(x-3)}$ xác định nếu $(x-1)(x-3) \geq 0$, nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : $x - 1 \geq 0$ và $x - 3 \geq 0$. Nghĩa là x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq 1$ và $x \geq 3$. Vậy $x \geq 3$.

Trường hợp 2 : $x - 1 \leq 0$ và $x - 3 \leq 0$. Nghĩa là x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \leq 1$ và $x \leq 3$. Vậy $x \leq 1$.

Như vậy với $x \leq 1$ hoặc $x \geq 3$ thì biểu thức đã cho xác định.

Tập hợp những giá trị x đó được kí hiệu là :

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 3\}.$$

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 1.

Hình 1

b) *Hướng dẫn :* $\sqrt{x^2 - 4}$ hay $\sqrt{(x-2)(x+2)}$ xác định khi $(x-2)(x+2) \geq 0$, nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau ;

Trường hợp 1 : $x - 2 \geq 0$ và $x + 2 \geq 0$, ta sẽ tìm được $x \geq 2$.

Trường hợp 2 : $x - 2 \leq 0$ và $x + 2 \leq 0$, ta sẽ tìm được $x \leq -2$.

Đáp số : $x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 2.

Hình 2

c) *Hướng dẫn :* Ta biết thương $\dfrac{a}{b}$ không âm khi và chỉ khi : hoặc $a \geq 0$ và $b > 0$ hoặc $a \leq 0$ và $b < 0$.

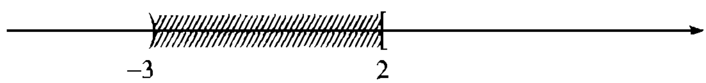
Theo nhận xét trên thì $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$ xác định nếu $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$, nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : $x - 2 \geq 0$ và $x + 3 > 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq 2$ và $x > -3$. Vậy $x \geq 2$.

Trường hợp 2 : $x - 2 \leq 0$ và $x + 3 < 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \leq 2$ và $x < -3$. Vậy $x < -3$.

Như vậy với $x \geq 2$ hoặc $x < -3$ thì biểu thức đã cho xác định.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 3.



Hình 3

d) *Hướng dẫn :*

$\sqrt{\dfrac{2+x}{5-x}}$ xác định nếu $\dfrac{2+x}{5-x} \geq 0$, nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

Trường hợp 1 : $2 + x \geq 0$ và $5 - x > 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq -2$ và $x < 5$.

Vậy $-2 \leq x < 5$.

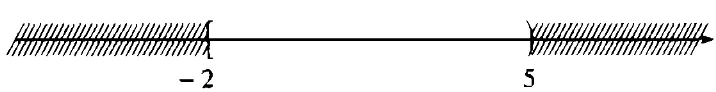
Trường hợp 2 : $2 + x \leq 0$ và $5 - x < 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \leq -2$ và $x > 5$.

Trong trường hợp này ta thấy không tồn tại x thoả mãn đồng thời

$$x \leq -2 \text{ và } x > 5.$$

Như vậy với $-2 \leq x < 5$ thì biểu thức đã cho xác định.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 4.



Hình 4

17. a) *Giải* : Vì $\sqrt{9x^2} = |3x|$ nên để tìm x thoả mãn $\sqrt{9x^2} = 2x + 1$ ta đưa về tìm x thoả mãn $|3x| = 2x + 1$ tức là tìm nghiệm của phương trình

$$|3x| = 2x + 1. \quad (1)$$

Ta xét hai trường hợp :

– Khi $3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$, ta giải phương trình

$$3x = 2x + 1.$$

Ta có $3x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Giá trị $x = 1$ thoả mãn $x \geq 0$, nên $x = 1$ là một nghiệm của phương trình (1).

– Khi $3x < 0 \Leftrightarrow x < 0$, ta giải phương trình

$$-3x = 2x + 1.$$

Ta có $-3x = 2x + 1 \Leftrightarrow -5x = 1 \Leftrightarrow x = -0,2$.

Giá trị $x = -0,2$ thoả mãn $x < 0$, nên $x = -0,2$ là một nghiệm của phương trình (1).

Tổng hợp hai trường hợp trên, ta thấy hai giá trị $x_1 = 1$ và $x_2 = -0,2$ là các nghiệm của phương trình (1).

Vậy các giá trị cần tìm là $x_1 = 1$ và $x_2 = -0,2$.

b) *Hướng dẫn* : Tương tự câu a).

Vì $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x + 3|$ nên đưa về tìm nghiệm của phương trình

$$|x + 3| = 3x - 1. \quad (2)$$

Xét hai trường hợp :

– Khi $x + 3 \geq 0$, giải $x + 3 = 3x - 1$ được $x = 2$ thoả mãn $x + 3 \geq 0$, nên $x = 2$ là một nghiệm của (2).

– Khi $x + 3 < 0$, giải $-x - 3 = 3x - 1$ được $x = -0,5$. Vì $x = -0,5$ không thoả mãn $x + 3 < 0$ nên giá trị $x = -0,5$ không phải là nghiệm của (2).

Tổng hợp hai trường hợp trên ta thấy chỉ có duy nhất một giá trị $x = 2$ là nghiệm của (2).

Vậy giá trị cần tìm là $x = 2$.

c) *Hướng dẫn :* Tương tự câu a).

Vì $\sqrt{1-4x+4x^2} = \sqrt{(1-2x)^2} = |1-2x|$ nên đưa về tìm nghiệm của phương trình

$$|1-2x| = 5. \qquad (3)$$

Có thể giải phương trình (3) bằng một trong hai cách sau.

Cách 1 :

Ta giải phương trình $1-2x=5$ (được $x=-2$) và giải phương trình $1-2x=-5$ (được $x=3$).

Tổng hợp ta được hai nghiệm của (3) là $x_1=-2$; $x_2=3$.

Cách 2 :

Ta xét hai trường hợp :

– Khi $1-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0{,}5$, ta giải phương trình

$$1-2x=5,$$

được $x=-2$ là một nghiệm của (3) (vì thoả mãn $x \leq 0{,}5$).

– Khi $1-2x < 0 \Leftrightarrow x > 0{,}5$, ta giải phương trình

$$2x-1=5,$$

được $x=3$ là một nghiệm của (3) (vì thoả mãn $x > 0{,}5$).

Tổng hợp hai trường hợp, ta có hai nghiệm của (3) là $x_1=-2$ và $x_2=3$.

d) Vì $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2|$ nên đưa về tìm x thoả mãn

$$|x^2| = 7 \text{ hay } x^2 = 7.$$

Suy ra các giá trị cần tìm là $x_1 = -\sqrt{7}$ và $x_2 = \sqrt{7}$.

18. a) $x^2-7=(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})$.

b) $x^2-2\sqrt{2}x+2 = x^2-2\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2 = (x-\sqrt{2})^2$.

c) $x^2+2\sqrt{13}x+13=(x+\sqrt{13})^2$.

19. a) $\dfrac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}=\dfrac{(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{x+\sqrt{5}}=x-\sqrt{5}$.

b) $\dfrac{x^2+2\sqrt{2}\,x+2}{x^2-2}=\dfrac{(x+\sqrt{2})^2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}=\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}$.

20. a) *Cách 1* : Ta viết 9 = 6 + 3, rồi quy về so sánh $2\sqrt{2}$ và 3.

Ta có $\quad 2\sqrt{2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{2^2.(\sqrt{2})^2}=\sqrt{8}$

$\quad 3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9}$.

Do $\sqrt{8}<\sqrt{9}$, tức là $2\sqrt{2}<3$

nên suy ra $\quad 6+2\sqrt{2}<6+3$,

nghĩa là $\quad 6+2\sqrt{2}<9$.

Cách 2 : Từ 9 = 6 + 2.1,5 quy về so sánh $\sqrt{2}$ với 1,5 để từ đó suy ra $6+2\sqrt{2}<9$.

b) Để so sánh : $\quad \sqrt{2}+\sqrt{3}\quad$ với 3,

ta đưa về so sánh $\quad (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2\quad$ với 3^2

hay so sánh $\quad 5+2\sqrt{2}.\sqrt{3}\quad$ với 9.

Vì 9 = 5 + 2.2 nên ta chỉ việc so sánh $\sqrt{2}.\sqrt{3}$ với 2.

Ta có $(\sqrt{2}.\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2(\sqrt{3})^2=2.3=6$ và $2^2=4$ nên $\sqrt{2}.\sqrt{3}>2$.

Từ $\sqrt{2}.\sqrt{3}>2$, ta suy ra $5+2\sqrt{2}.\sqrt{3}>9$.

Vậy ta có $\sqrt{2}+\sqrt{3}>3$.

c) Từ 16 = 9 + 7, để so sánh $9+4\sqrt{5}$ và 16 ta quy về so sánh $4\sqrt{5}$ và 7.

Ta có $(4\sqrt{5})^2=4^2.(\sqrt{5})^2=16.5=80$

và $\quad 7^2=49$ nên $(4\sqrt{5})^2>7^2$.

Từ $(4\sqrt{5})^2>7^2$, suy ra $4\sqrt{5}>7$.

Vậy $9+4\sqrt{5}>16$.

d) Nhận xét vì $\sqrt{11} > \sqrt{3}$ nên $\sqrt{11} - \sqrt{3} > 0$.

Để so sánh $\sqrt{11} - \sqrt{3}$ và 2 ta quy về so sánh :

$(\sqrt{11} - \sqrt{3})^2$ với 2^2

hay $14 - 2\sqrt{11}.\sqrt{3}$ với 4

hay $14 - 2\sqrt{11}.\sqrt{3}$ với $14 - 2.5$.

Vì $(\sqrt{11}.\sqrt{3})^2 = (\sqrt{11})^2(\sqrt{3})^2 = 33$ và $5^2 = 25$ nên $\sqrt{11}.\sqrt{3} > 5$ suy ra $-2\sqrt{11}.\sqrt{3} < -2.5$.

Vậy $14 - 2\sqrt{11}.\sqrt{3} < 14 - 2.5$. Từ đó ta có $\sqrt{11} - \sqrt{3} < 2$.

21. a) Biến đổi : $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$.

Rút gọn được kết quả là -1.

b) Biến đổi $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$;

Rút gọn được kết quả là $2\sqrt{2}$.

c) $\sqrt{9x^2} - 2x = \sqrt{(3x)^2} - 2x = |3x| - 2x$.

Với $x < 0$, rút gọn được kết quả là $-5x$.

d) Với $x > 4$ ta có $\sqrt{16 - 8x + x^2} = \sqrt{(4 - x)^2} = |4 - x| = x - 4$.

Rút gọn được kết quả là $2x - 8$.

22. Biến đổi vế trái ta được $2n + 1$.

Biến đổi vế phải ta được $2n + 1$.

Từ đó ta có vế trái bằng vế phải, vậy đẳng thức đúng.

(Thực ra, đẳng thức đúng với n là số thực không âm).

Với $n = 1$ có $\sqrt{4} + \sqrt{1} = 4 - 1$;

Với $n = 2$ có $\sqrt{9} + \sqrt{4} = 9 - 4$;

Với $n = 3$ có $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 16 - 9$;

Với n = 4 có $\sqrt{25}+\sqrt{16} = 25 - 16$;

Với n = 5 có $\sqrt{36}+\sqrt{25} = 36 - 25$;

Với n = 6 có $\sqrt{49}+\sqrt{36} = 49 - 36$;

Với n = 7 có $\sqrt{64}+\sqrt{49} = 64 - 49$.

Bài tập bổ sung

2.1. Chọn (D).

§3. Liên hệ giữa phép nhân và phép khai phương

23. a) *Giải* : $\sqrt{10}.\sqrt{40} = \sqrt{10.40} = \sqrt{400} = 20$;

b) *Đáp số* : 15 ; c) *Đáp số* : 26 ; d) *Đáp số* : 18.

24. a) *Giải* : $\sqrt{45.80} = \sqrt{9.5.5.16} = \sqrt{9}.\sqrt{25}.\sqrt{16} = 3.5.4 = 60$;

b) *Đáp số* : 60 ; c) *Đáp số* : 24 ; d) *Đáp số* : 6.

25. a) *Giải* : $\sqrt{(6{,}8+3{,}2)(6{,}8-3{,}2)} = \sqrt{10.3{,}6} = \sqrt{36} = 6$;

b) *Đáp số* : 12 ; c) *Đáp số* : 108 ; d) *Đáp số* : 128.

26. a) Biến đổi vế trái

$$\sqrt{9-\sqrt{17}}.\sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})}$$
$$= \sqrt{9^2-(\sqrt{17})^2} = \sqrt{81-17}$$
$$= \sqrt{64} = 8.$$

b) Biến đổi vế trái được $2\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 1 + 4\sqrt{2} + 8 - 2\sqrt{6} = 9$.

27. a)Viết mẫu ở dạng

$$\sqrt{2.2}.\sqrt{3} + \sqrt{2.14} = \sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{3} + \sqrt{2}.\sqrt{14} = \sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{14}).$$

b) Biến đổi tử theo cách :

Tách $\sqrt{16} = 4 = 2 + 2 = \sqrt{4} + \sqrt{4}$.

Sau đó nhóm các số với nhau và biến đổi :

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}) =$$

$$= (\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{2}.\sqrt{2}+\sqrt{2}.\sqrt{3}+\sqrt{2}.\sqrt{4})$$

$$= (1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}).$$

Từ đó, rút gọn được kết quả là $1+\sqrt{2}$.

28. a) Đưa về so sánh $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ với $(\sqrt{10})^2$ hay so sánh $5+2\sqrt{2}.\sqrt{3}$ với 10.

Kết quả được $\sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{10}$.

b) Tương tự câu a) :

So sánh $(\sqrt{3}+2)^2$ với $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2$

hay so sánh $7+4\sqrt{3}$ với $8+2\sqrt{12}$.

Do $8+2\sqrt{12} = 8+4\sqrt{3}$ nên $7+4\sqrt{3} < 8+2\sqrt{12}$.

Từ đó suy ra $\sqrt{3}+2 < \sqrt{2}+\sqrt{6}$.

c) Biến đổi $\sqrt{15}.\sqrt{17} = \sqrt{16-1}.\sqrt{16+1} = \sqrt{16^2-1}$.

Do $16^2-1 < 16^2$ nên $\sqrt{16^2-1} < \sqrt{16^2}$.

Vậy $\sqrt{15}.\sqrt{17} < 16$.

d) So sánh hai bình phương là 8^2 và $(\sqrt{15}+\sqrt{17})^2$, từ đó quy về so sánh $32 = 2.16$ với $2\sqrt{15}.\sqrt{17} = 2\sqrt{16^2-1}$.

Kết quả được $\sqrt{15}+\sqrt{17} < 8$.

29. Có thể dùng cách tương tự câu d) bài 28.

Kết quả $\sqrt{2003}+\sqrt{2005} < 2\sqrt{2004}$.

30. a) • A có nghĩa khi $x+2 \geq 0$ và $x-3 \geq 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq -2$ và $x \geq 3$.

Như vậy, A có nghĩa với $x \geq 3$.

• B có nghĩa khi $(x + 2)(x - 3) \geq 0$. Nghĩa là, x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1* : $x + 2 \geq 0$ và $x - 3 \geq 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq -2$ và $x \geq 3$. Vậy $x \geq 3$.

– *Trường hợp 2* : $x + 2 \leq 0$ và $x - 3 \leq 0$. Nghĩa là, x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \leq -2$ và $x \leq 3$. Vậy $x \leq -2$.

Như vậy, B có nghĩa khi $x \leq -2$ hoặc $x \geq 3$.

b) Để A và B đồng thời có nghĩa thì $x \geq 3$.

Khi đó, ta có A = B (theo tính chất khai phương một tích).

31. Do a và b âm nên –a và –b dương.

Khi đó, ta có $\sqrt{a.b} = \sqrt{(-a).(-b)} = \sqrt{-a}.\sqrt{-b}$.

Áp dụng, ta có $\sqrt{(-25).(-64)} = \sqrt{25}.\sqrt{64} = 5.8 = 40$.

32. a) $2(a - 3)$; b) $3(2 - b)$; c) $a(a + 1)$; d) $b(b - 1)$.

33. a) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $\sqrt{x^2 - 4}$ và $\sqrt{x - 2}$ đồng thời có nghĩa.

• $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{(x-2)(x+2)}$ có nghĩa khi $x \leq -2$ hoặc $x \geq 2$ (câu b) bài tập 16).

• $\sqrt{x - 2}$ có nghĩa khi $x \geq 2$.

Vậy điều kiện để biểu thức đã cho có nghĩa là $x \geq 2$.

Với điều kiện trên ta có

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{(x-2)(x+2)} = \sqrt{x-2}.\sqrt{x+2}.$$

Từ đó ta có :

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4} + 2\sqrt{x - 2} &= \sqrt{x-2}.\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x-2}\\ &= (\sqrt{x+2} + 2)\sqrt{x-2}.\end{aligned}$$

b) Biểu thức đã cho có nghĩa khi $\sqrt{x + 3}$ và $\sqrt{x^2 - 9}$ đồng thời có nghĩa. Vậy điều kiện để biểu thức đã cho có nghĩa là x phải đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x + 3 \geq 0$ và $x^2 - 9 \geq 0$.

• $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.

• $x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0$. (1)

Giải (1) (tương tự câu a) bài 16) ta có : $x \leq -3$ hoặc $x \geq 3$.

Vậy với $x \geq 3$ hoặc $x = -3$ thì x thoả mãn đồng thời hai bất đẳng thức $x + 3 \geq 0$ và $x^2 - 9 \geq 0$.

Với $x \geq 3$ ta biến đổi được kết quả là $(3+\sqrt{x-3})\sqrt{x+3}$.

34. a) *Hướng dẫn :* Quy về giải $x - 5 = 3^2$.

Đáp số : $x = 14$;

b) *Đáp số :* Vô nghiệm ; c) *Đáp số :* $x = 3$; d) *Đáp số :* $x = -28$.

35. Khai triển vế trái ta được

$$(\sqrt{n+1})^2 - 2\sqrt{n+1}.\sqrt{n} + (\sqrt{n})^2 = n + 1 + n - 2\sqrt{n(n+1)}$$
$$= 2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)}.$$

Biến đổi vế phải

$$(2n+1) - \sqrt{4n^2 + 4n + 1 - 1} = 2n + 1 - \sqrt{4n(n+1)} = 2n + 1 - \sqrt{4}.\sqrt{n(n+1)}.$$

Từ đó, suy ra hai vế bằng nhau. Vậy đẳng thức đúng.

(Thực ra đẳng thức đúng với n là số thực không âm).

Với $n = 1$ có $(\sqrt{2} - \sqrt{1})^2 = \sqrt{9} - \sqrt{8}$;

Với $n = 2$ có $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \sqrt{25} - \sqrt{24}$;

Với $n = 3$ có $(\sqrt{4} - \sqrt{3})^2 = \sqrt{49} - \sqrt{48}$;

Với $n = 4$ có $(\sqrt{5} - \sqrt{4})^2 = \sqrt{81} - \sqrt{80}$.

Bài tập bổ sung

3.1. Chọn (B).

§4. Liên hệ giữa phép chia và phép khai phương

36. a) $\sqrt{\dfrac{9}{169}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{169}} = \dfrac{3}{13}$; b) $\dfrac{5}{12}$; c) $\dfrac{5}{4}$; d) $\dfrac{13}{9}$.

37. a) $\dfrac{\sqrt{2300}}{\sqrt{23}} = \sqrt{\dfrac{2300}{23}} = \sqrt{100} = 10$; b) 5 ; c) 4 ; d) 0,2.

38. a) Biểu thức A có nghĩa khi $\dfrac{2x+3}{x-3} \geq 0$, ta sẽ tìm được $x \leq -1{,}5$ hoặc $x > 3$.

Biểu thức B có nghĩa khi $\sqrt{2x+3}$ và $\sqrt{x-3}$ có nghĩa và $\sqrt{x-3}$ khác 0. Nghĩa là B có nghĩa khi x thoả mãn đồng thời hai bất đẳng thức $2x + 3 \geq 0$ và $x - 3 > 0$ hay x thoả mãn $x > 3$.

b) Để A và B đồng thời có nghĩa thì $x > 3$.

Khi đó, ta có A = B (theo tính chất khai phương một thương).

39. Với $a < 0$ và $b < 0$, ta có :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}.$$

Áp dụng tính $\sqrt{\dfrac{-49}{-81}}$ được kết quả là $\dfrac{7}{9}$.

40. a) $3y$; b) $\dfrac{4}{x}$; c) $\dfrac{3n}{2}$; d) $\dfrac{-1}{2a\sqrt{2}}$.

41. a) Vì $x \geq 0$ nên có $x = (\sqrt{x})^2$, từ đó có

$$x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \text{ và } x + 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 1)^2.$$

Khai phương được kết quả là $\dfrac{\left|\sqrt{x} - 1\right|}{\sqrt{x} + 1}$.

Có thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối tuỳ theo $0 \leq x < 1$ hay $x \geq 1$.

b) Với $y > 0$, ta có $y - 2\sqrt{y} + 1 = (\sqrt{y} - 1)^2$. Rút gọn được kết quả là

$$\frac{\left|\sqrt{y} - 1\right|}{(\sqrt{y} - 1)(x - 1)}.$$

Nếu có thêm điều kiện $y < 1$ thì kết quả là $\dfrac{1}{1 - x}$.

Nếu có thêm điều kiện y > 1 thì kết quả là $\frac{1}{x-1}$.

42. a) • Rút gọn :

Với điều kiện x < 3 khi đó $|3-x| = 3 - x$, rút gọn ta được kết quả $\frac{5-4x}{3-x}$.

• Giá trị biểu thức khi x = 0,5 là 1,2.

b) • Rút gọn :

+ Với điều kiện x > 0, được kết quả là $5x-\sqrt{8}$;

+ Với điều kiện x < 0 (nhưng vẫn thoả mãn điều kiện x > −2), được kết quả là $3x-\sqrt{8}$.

• Thay giá trị $x = -\sqrt{2}$ vào biểu thức $3x - \sqrt{8}$ và rút gọn ta được giá trị của biểu thức là $-5\sqrt{2}$.

Nếu làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba thì được kết quả là −7,071.

43. a) Điều kiện xác định của $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}}$ là $\frac{2x-3}{x-1} \geq 0$.

Ta có $\frac{2x-3}{x-1} \geq 0$ nghĩa là x thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1* : $2x - 3 \geq 0$ và $x - 1 > 0$, ta sẽ tìm được $x \geq 1{,}5$.

– *Trường hợp 2* : $2x - 3 \leq 0$ và $x - 1 < 0$, ta sẽ tìm được $x < 1$.

Như vậy, với điều kiện x < 1 hoặc x ≥ 1,5, ta có $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}}$ xác định.

Từ $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$, theo định nghĩa căn bậc hai số học, ta có $\frac{2x-3}{x-1} = 2^2$.

Giải phương trình $\frac{2x-3}{x-1} = 4$, ta được x = 0,5, thoả mãn điều kiện.

Vậy x = 0,5 là giá trị phải tìm.

b) Điều kiện xác định của $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}}$ là

$$2x - 3 \geq 0 \text{ và } x - 1 > 0.$$

Nghĩa là x đồng thời thoả mãn hai bất đẳng thức $x \geq 1{,}5$ và $x > 1$ hay x thoả mãn $x \geq 1{,}5$.

Như vậy, ta có $x \geq 1{,}5$ là điều kiện để $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}}$ có nghĩa.

Với điều kiện $x \geq 1{,}5$, theo quy tắc chia hai căn bậc hai, ta có :

$$\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{2x-3}{x-1}}.$$

Do vậy, với $x \geq 1{,}5$, ta quy về giải bài toán tìm x, biết

$$\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2,$$

và tìm được $x = 0{,}5$.

Tuy nhiên giá trị này không thoả mãn điều kiện $x \geq 1{,}5$.

Vậy không tồn tại giá trị nào của x để $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$.

Chú ý : Có thể chứng tỏ không tồn tại x thoả mãn $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ như sau :

$$2x - 3 = 2(x - 1) - 1, \text{ nên } \sqrt{2x-3} < \sqrt{2(x-1)}.$$

Do đó $$\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} < \frac{\sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x-1}}.$$

Mặt khác, $$\frac{\sqrt{2(x-1)}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{2(x-1)}{x-1}} = \sqrt{2},$$

suy ra $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} < \sqrt{2} < 2$.

Do $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}}$ luôn nhỏ hơn 2 nên không tồn tại x để $\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$.

c) Tương tự câu a) tìm được x = – 1,2 thoả mãn

$$\sqrt{\frac{4x+3}{x+1}} = 3.$$

d) *Hướng dẫn* : Tương tự câu b) chứng tỏ không tồn tại x thoả mãn

$$\frac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+1}} = 3.$$

44. Do a và b không âm nên $\sqrt{a}$ và $\sqrt{b}$ xác định. Ta có

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Khai triển vế trái, ta có

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0.$$

Từ đó, suy ra

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Chia hai vế của bất đẳng thức trên cho 2 ta được bất đẳng thức phải chứng minh.

Rõ ràng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b.

45. Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số a, b không âm, ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}. \quad (1)$$

Cộng a + b vào cả hai vế của bất đẳng thức (1) và biến đổi được

$$2(a+b) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2. \quad (2)$$

Chia hai vế của bất đẳng thức (2) cho 4 rồi khai phương sẽ được điều phải chứng minh.

46. Biến đổi biểu thức được $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$ hoặc áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số a và $\frac{1}{a}$.

Bài tập bổ sung

4.1. Chọn (B).

§5. Bảng căn bậc hai

47. Tra bảng ta được

a) $x_1 \approx 3{,}8730$ suy ra $x_2 \approx -3{,}8730$;

b) $x_1 \approx 4{,}7749$ suy ra $x_2 \approx -4{,}7749$;

c) $x_1 \approx 18{,}7350$ suy ra $x_2 \approx -18{,}7350$;

d) $x_1 \approx 0{,}6782$ suy ra $x_2 \approx -0{,}6782$.

48. Tra bảng ta được

a) $x \approx 2{,}25$ (thực ra 2,25 là giá trị đúng) ;

b) $x \approx 4{,}623$; c) $x \approx 0{,}2704$; d) $x \approx 0{,}001444$.

49. Có thể kiểm tra theo hai cách

– Tìm giá trị nghiệm bằng máy tính bỏ túi.

Ví dụ, tính giá trị $x_1 = \sqrt{15}$ bằng máy tính bỏ túi được kết quả 3,872983346 (máy hiện kết quả gần đúng với 10 chữ số).

– Thử lại giá trị tìm được bằng máy tính bỏ túi.

Ví dụ, thay giá trị $x_1 \approx 3{,}873$ vào phương trình

$$x^2 = 15$$

ta có $(3{,}873)^2 = 15{,}000129 \approx 15$.

50. Ví dụ thử lại câu a) bài 47. Ta tìm các ô có giá trị gần với 15 ở trong bảng bình phương được ô 14,98 và ô 15,05. Với ô 14,98 tra bảng được 3,87, đây là kết quả gần đúng thiếu. Nếu chọn ô 15,05 tra bảng sẽ được số 3,88, đây là kết quả gần đúng thừa.

51. Ví dụ thử lại câu b) bài 48. Tra bảng căn bậc hai cho số 4,623 : Trước hết ta tìm căn bậc hai của 4,62 được 2,149. Tìm thêm chữ số ở cột số 3 phần hiệu chính ứng với dòng 4,6 được số 1, vậy cộng thêm 1 vào chữ số 9 ở số 2,149 ta được số 2,150.

52. Cần bổ sung

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{m^2}{n^2} ;$$

$2n^2 = (2p)^2$;

giả thiết m và n nguyên tố cùng nhau.

53. a) Lập luận tương tự bài tập 52, thay đặc điểm số chẵn bởi số chia hết cho 3.

b) Lập luận bằng phản chứng.

Ví dụ, giả sử $5\sqrt{2}$ là số hữu tỉ a, nghĩa là có số a hữu tỉ mà

$$5\sqrt{2} = a.$$

Khi đó $$\sqrt{2} = \frac{a}{5}$$

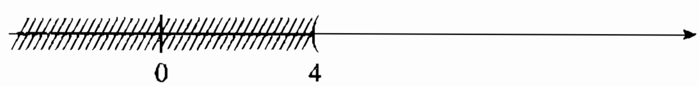
nên $\sqrt{2}$ cũng là số hữu tỉ.

Điều này vô lí, vì ta đã biết $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

54. Điều kiện $x \geq 0$.

Đưa bất đẳng thức đã cho về $\sqrt{x} > \sqrt{4}$ suy ra $x > 4$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số ta có hình 5.



Hình 5

55. Kết quả : $0 \leq x < 9$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số ta có hình 6.

Hình 6

Bài tập bổ sung

5.1. Chọn (A).

§6. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai

56. a) $x\sqrt{7}$; b) $-2y\sqrt{2}$; c) $5x\sqrt{x}$; d) $4y^2\sqrt{3}$.

57. a) $\sqrt{5x^2}$; b) $-\sqrt{13x^2}$; c) $\sqrt{11x}$; d) $-\sqrt{-29x}$.

58. a) $-\sqrt{3}$; b) $2\sqrt{2}$; c) $6\sqrt{a}$; d) $4\sqrt{b}-5\sqrt{10b}$.

59. a) $6-\sqrt{15}$; b) 10 ; c) 7 ; d) 22.

60. a) 0 ; b) $4\sqrt{2\sqrt{3}}-8\sqrt{5\sqrt{3}}$.

61. a) $1-x\sqrt{x}$; b) $x\sqrt{x}+8$; c) $x\sqrt{x}-y\sqrt{y}$; d) $x^3+y\sqrt{y}$.

62. a) $(6-5\sqrt{2})x$; b) $6x-2y-\sqrt{xy}$.

63. a) Biến đổi vế trái ta có

$$\frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}}=(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2 \; = x-y.$$

b) Đặt $\sqrt{x}=a$ ta có $\sqrt{x^3}=a^3$. Áp dụng hằng đẳng thức

$$a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$$

và rút gọn vế trái.

64. a) Biến đổi

$$\begin{aligned}x+2\sqrt{2x-4}&=2+2\sqrt{2}\sqrt{x-2}+x-2\\&=(\sqrt{2}+\sqrt{x-2})^2.\end{aligned}$$

b) Tương tự câu a), ta có $x-2\sqrt{2x-4}=(\sqrt{2}-\sqrt{x-2})^2$.

Do đó, $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}=$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{x-2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{x-2})^2}$$

$$=\sqrt{2}+\sqrt{x-2}+\left|\sqrt{2}-\sqrt{x-2}\right| \text{ (vì } \sqrt{2}+\sqrt{x-2}>0\text{)}.$$

Ta thấy :

- Nếu $x<4$ (nhưng $x\ge 2$) thì $x-2<2$; khi đó $\sqrt{2}-\sqrt{x-2}>0$ và kết quả rút gọn là $2\sqrt{2}$.
- Nếu $x\ge 4$ thì $x-2\ge 2$; khi đó $\sqrt{2}-\sqrt{x-2}\le 0$ và kết quả rút gọn là $2\sqrt{x-2}$.

65. a) *Cách 1 :* Ta có $25x = 35.35$, suy ra $x = 49$.

Cách 2 : Biến đổi vế trái được $5\sqrt{x}$ rồi quy về tìm x, biết

$$\sqrt{x} = 7.$$

Từ đó tìm được $x = 49$.

b) $0 \le x \le 6561$; c) $x = \frac{4}{3}$; d) $x \ge 2,5$.

66. a) Trước hết, điều kiện để các căn thức xác định là x phải thoả mãn đồng thời hai bất đẳng thức

$$x^2 - 9 \ge 0 \text{ và } x - 3 \ge 0.$$

Ta sẽ tìm được $x \ge 3$ là điều kiện để đồng thời có

$$x^2 - 9 \ge 0 \text{ và } x - 3 \ge 0.$$

Với điều kiện $x \ge 3$, ta có

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{(x-3)(x+3)} = \sqrt{x-3}\sqrt{x+3}.$$

Vậy để tìm x thoả mãn

$$\sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x-3} = 0,$$

ta đưa về tìm x thoả mãn

$$\sqrt{x-3}\sqrt{x+3} - 3\sqrt{x-3} = 0 \text{ hay } \sqrt{x-3}(\sqrt{x+3} - 3) = 0.$$

• Giải $\sqrt{x-3} = 0$ ta được $x = 3$, thoả mãn điều kiện $x \ge 3$.

• Giải $\sqrt{x+3} - 3 = 0$, ta có $\sqrt{x+3} = 3$ hay $x + 3 = 9$,

suy ra $x = 6$, thoả mãn điều kiện $x \ge 3$.

Vậy tìm được hai giá trị là $x_1 = 3$; $x_2 = 6$.

b) Điều kiện để các căn thức xác định là x phải thoả mãn đồng thời hai bất đẳng thức

$$x^2 - 4 \ge 0 \quad \text{và} \quad x + 2 \ge 0.$$

* Xét $x^2 - 4 \ge 0$, vì $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ nên $x^2 - 4 \ge 0$ khi và chỉ khi $(x-2)(x+2) \ge 0$. Ta tìm được $x \ge 2$ hoặc $x \le -2$.

* Xét $x + 2 \geq 0$ ta có $x \geq -2$.

Như vậy, x phải thoả mãn một trong hai trường hợp sau :

– *Trường hợp 1 :* $x \geq 2$ và $x \geq -2$. Ta có $x \geq 2$.

– *Trường hợp 2 :* $x \leq -2$ và $x \geq -2$. Ta có $x = -2$.

Vậy điều kiện để các căn thức xác định là $x \geq 2$ hoặc $x = -2$.

• Với $x = -2$ thì $\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{x+2} = 0$. Vậy $x = -2$ là một giá trị phải tìm.

• Với $x \geq 2$ thì $x + 2 > 0$ và $x - 2 \geq 0$ nên $\sqrt{x+2}$ và $\sqrt{x-2}$ xác định. Do đó

$$\sqrt{x^2-4} - 2\sqrt{x+2} = \sqrt{(x-2)(x+2)} - 2\sqrt{x+2} = 0$$

hay $$\sqrt{x+2}(\sqrt{x-2} - 2) = 0.$$

Với nhận xét $\sqrt{x+2} > 0$ ta tìm được $x = 6$.

• Vậy tìm được hai giá trị là $x_1 = -2$ và $x_2 = 6$.

67. Kí hiệu a và b là kích thước của hình chữ nhật, ta có a và b dương.

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số a, b không âm, ta có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

a) Với các hình chữ nhật có cùng chu vi thì

$\frac{a+b}{2}$ không đổi (bằng một phần tư chu vi).

Từ bất đẳng thức $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ và $\frac{a+b}{2}$ không đổi suy ra $\sqrt{ab}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{a+b}{2}$ khi $a = b$.

Điều đó có nghĩa là trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

b) Với các hình chữ nhật có cùng diện tích thì tích ab không đổi nên từ $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ suy ra $\frac{a+b}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{ab}$ khi a = b. Điều đó có nghĩa là trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi bé nhất.

Bài tập bổ sung

6.1. Chọn (C).

§7. Biến đổi đơn giản biểu thức chứa căn thức bậc hai (tiếp theo)

68. a) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; b) $\frac{x}{5}\sqrt{5}$; c) $\frac{\sqrt{3x}}{x}$; d) $\frac{-x}{7}\sqrt{42}$.

69. a) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$; b) $10+4\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

70. a) 2 ; b) $-\frac{5\sqrt{2}}{4}$; c) 3 ; d) 2.

71. Biến đổi vế phải bằng cách nhân cả tử và mẫu với $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ hoặc xuất phát từ kết quả $\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=1$.

(Thực chất, đẳng thức đúng với n là số thực không âm).

72. Dùng kết quả bài tập 71, quy về tính

$$(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3}).$$

Rút gọn được $\sqrt{4}-\sqrt{1} = 1$.

Đáp số : 1.

73. Theo bài tập 71 ta có

$$\sqrt{2005}-\sqrt{2004}=\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}}$$

và $$\sqrt{2004}-\sqrt{2003}=\frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}.$$

Quy về so sánh

$$\frac{1}{\sqrt{2005}+\sqrt{2004}} \text{ với } \frac{1}{\sqrt{2004}+\sqrt{2003}}.$$

Khi đó, thấy ngay mẫu ở biểu thức thứ nhất lớn hơn mẫu ở biểu thức thứ hai, các số này đều dương nên suy ra

$$\sqrt{2005}-\sqrt{2004}<\sqrt{2004}-\sqrt{2003}.$$

74. Trục căn thức ở mẫu và rút gọn, được kết quả là 2.

75. a) *Hướng dẫn :* Biến đổi tử :

$$(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y).$$

Sau đó rút gọn ta được kết quả

$$x+\sqrt{xy}+y.$$

b) *Đáp số :* $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$.

76. a) *Hướng dẫn :* $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1} = \dfrac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1+\sqrt{2})(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})}$

$$=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+1)^2-2}=\frac{(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}.$$

Khai triển tử và mẫu, sau đó rút gọn ta được kết quả là :

$$\frac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

b) *Đáp số :* $\dfrac{4+\sqrt{5}-3\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{22}$.

77. a) Ta biết nếu $\sqrt{x}=a$ với $a\ge 0$ thì $x=a^2$, nên ta đưa về tìm x thoả mãn

$$2x+3=(1+\sqrt{2})^2.$$

Giải phương trình này ta có $x=\sqrt{2}$.

b) Lập luận tương tự câu a), ta đưa về tìm x thoả mãn

$$10 + \sqrt{3}x = (2 + \sqrt{6})^2 \text{ hay } 10 + \sqrt{3}x = 10 + 4\sqrt{6}.$$

Từ đó, tìm được $x = 4\sqrt{2}$.

c) Trước hết, nhận xét $2 - \sqrt{3} > 0$, nên đưa về tìm x thoả mãn

$$3x - 2 = (2 - \sqrt{3})^2.$$

Từ đó, tìm được $x = 3 - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

d) Trước hết, nhận xét $\sqrt{5} - 3 < 0$ (vì $\sqrt{5} < 3$), do đó không có giá trị nào của x thoả mãn $\sqrt{x+1} = \sqrt{5} - 3$ (vế trái không âm, vế phải âm).

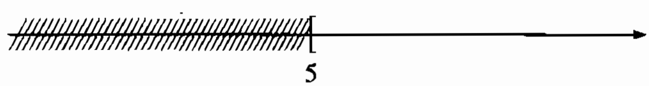
78. a) Với điều kiện $x - 2 \geq 0$ (tức $x \geq 2$), theo định lí so sánh các căn bậc hai số học, ta có

$$\sqrt{x-2} \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow x - 2 \geq 3.$$

Giải bất phương trình $x - 2 \geq 3$ ta có $x \geq 5$.

Kết hợp điều kiện $x \geq 2$, ta có tập các giá trị x cần tìm là $x \geq 5$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 7.



Hình 7

b) Trước hết, điều kiện để căn thức xác định là $3 - 2x \geq 0$, tức là $x \leq 1,5$.

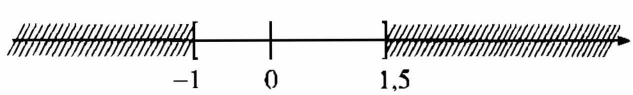
Với điều kiện $x \leq 1,5$, theo định lí so sánh các căn bậc hai số học, ta có

$$\sqrt{3-2x} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 3 - 2x \leq 5.$$

Giải bất phương trình $3 - 2x \leq 5$ ta có $x \geq -1$.

Kết hợp điều kiện $x \leq 1,5$, ta có tập các giá trị x cần tìm là $-1 \leq x \leq 1,5$.

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta có hình 8.



Hình 8

79. a) Ta có

$$x + y = (a_1 + a_2)\sqrt{2} + (b_1 + b_2)$$

trong đó $a_1 + a_2$ và $b_1 + b_2$ là các số hữu tỉ (tổng hai số hữu tỉ là số hữu tỉ).

Khi đó, $x.y = (a_1\sqrt{2} + b_1)(a_2\sqrt{2} + b_2)$.

Khai triển tích trên và nhóm gộp thích hợp, ta được

$$xy = (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2} + (2a_1a_2 + b_1b_2).$$

Ta thấy $a_1b_2 + a_2b_1$ và $2a_1a_2 + b_1b_2$ đều là các số hữu tỉ.

b) Ta cần chỉ ra rằng nếu $y \neq 0$, thì $\frac{1}{y}$ cũng có dạng $a\sqrt{2} + b$ với a và b là các số hữu tỉ rồi áp dụng kết quả câu a).

Ta có $\dfrac{1}{a_2\sqrt{2} + b_2} = \dfrac{a_2\sqrt{2} - b_2}{(a_2\sqrt{2} + b_2)(a_2\sqrt{2} - b_2)}$

$$= \frac{a_2}{2a_2^2 - b_2^2}\sqrt{2} - \frac{b_2}{2a_2^2 - b_2^2}.$$

Vì $y \neq 0$ nên a_2 và b_2 không đồng thời bằng 0. Từ đó suy ra mẫu $2a_2^2 - b_2^2 \neq 0$ (do a_2 và b_2 không đồng thời bằng 0, nếu $2a_2^2 - b_2^2 = 0$ thì suy ra $\sqrt{2} = \frac{b_2}{a_2}$, mâu thuẫn với $\sqrt{2}$ là số vô tỉ).

Vậy $\frac{1}{y}$ có dạng $a\sqrt{2} + b$ với a và b là số hữu tỉ.

Bài tập bổ sung

7.1. Chọn (A).

7.2. Chọn (D).

§8. Rút gọn biểu thức chứa căn thức bậc hai

80. a) $(2-\sqrt{2})(-5\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-5)^2 = -10\sqrt{2}+5.2-(18-30\sqrt{2}+25)$.

Đáp số : $-33+20\sqrt{2}$.

b) $2\sqrt{3a}-\sqrt{75a}+a\sqrt{\dfrac{13,5}{2a}}-\dfrac{2}{5}\sqrt{300a^3} =$

$= 2\sqrt{3a}-5\sqrt{3a}+\dfrac{a}{2a}\sqrt{27a}-\dfrac{2}{5}.10a\sqrt{3a}$.

Đáp số : $-(1,5+4a)\sqrt{3a}$.

81. a) *Giải* : $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$$= \frac{a+2\sqrt{ab}+b+a-2\sqrt{ab}+b}{a-b} = \frac{2(a+b)}{a-b};$$

b) *Hướng dẫn.*

Cách 1 : Quy đồng mẫu rồi rút gọn.

Cách 2 : Trục căn thức của phân thức thứ nhất và sau đó trừ phân thức thứ hai.

Đáp số : $\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$, có thể để kết quả ở dạng $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

82. a) Khai triển vế phải được $x^2+\sqrt{3}\,x+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}$. Rút gọn sẽ được vế trái.

b) Giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{1}{4}$ đạt được khi

$$\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0, \text{ tức là khi } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

83. a) Rút gọn biểu thức, ta được $\dfrac{-10}{9}$ là số hữu tỉ ;

b) Rút gọn biểu thức, ta được 12 là số hữu tỉ.

84. a) *Hướng dẫn* : Đưa về tìm x thoả mãn

$$2\sqrt{x+5}-3\sqrt{x+5}+4\sqrt{x+5}=6.$$

Điều kiện : $x \geq -5$.

Rút gọn, ta có $3\sqrt{x+5} = 6$ và tìm được $x = -1$.

b) *Đáp số* : $x = 17$.

85. a) *Giải* : Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, ta có

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{x-4}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$$

b) *Hướng dẫn* : $P = 2$ khi và chỉ khi

$$\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \text{ hay } 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 4.$$

Từ đó tính được $x = 16$.

86. a) $Q = \dfrac{\sqrt{a}-(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)\sqrt{a}} : \dfrac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)-(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a}-1)\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}-1)}{a-1-(a-4)} = \frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}.3}.$$

b) Với $a > 0$, ta có $\sqrt{a} > 0$. Vậy

$$Q = \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}$$

dương khi và chỉ khi $\sqrt{a} - 2 > 0$.

Giải $\sqrt{a} - 2 > 0$ ta có $\sqrt{a} > 2 \Leftrightarrow a > 4$.

Vậy Q dương khi $a > 4$.

87. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm ta có :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (1)$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \qquad (2)$$

$$\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}. \qquad (3)$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức (1), (2), (3) ta được :

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Mở rộng cho bốn số a, b, c, d không âm, ta có bất đẳng thức

$$a + b + c + d \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}.$$

Mở rộng cho năm số a, b, c, d, e không âm, ta có bất đẳng thức

$$a + b + c + d + e \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{de} + \sqrt{ea}.$$

Bài tập bổ sung

8.1. Chọn (D).

§9. Căn bậc ba

88. Ta có kết quả lần lượt là : –7 ; 0,3 ; 1,1 ; –0,8.

89. a) *Giải :* Từ định nghĩa căn bậc ba, biết $\sqrt[3]{x} = -1{,}5$, ta có $x = (-1{,}5)^3$.

Suy ra $x = -3{,}375$.

b) *Hướng dẫn :* Tương tự, từ $\sqrt[3]{x-5} = 0{,}9$, ta có

$$x - 5 = (0{,}9)^3.$$

Suy ra $x = 5 + (0{,}9)^3$.

Tính được $x = 5{,}729$.

90. a) $\sqrt[3]{a^3b} = \sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b} = a\sqrt[3]{b}$.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{ab}{b^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{b^3}} = \dfrac{1}{b}\sqrt[3]{ab}$.

91. a) 2,289 ; b) 2,936 ; c) −3,359 ; d) – 0,431.

92. a) *Giải :* $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3.3} = \sqrt[3]{24}$.

Ta có 24 > 23, nên $\sqrt[3]{24} > \sqrt[3]{23}$.

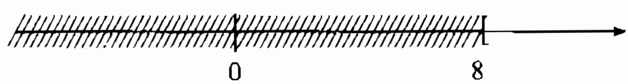
Vậy $2\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{23}$.

b) *Hướng dẫn :* Ta có $11 = \sqrt[3]{11^3} = \sqrt[3]{1331}$. Từ đó suy ra $33 < 3\sqrt[3]{1333}$.

93. a) *Giải :* Theo tính chất căn bậc ba, ta có

$$\sqrt[3]{x} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \geq \sqrt[3]{2^3} \Leftrightarrow x \geq 2^3 \Leftrightarrow x \geq 8.$$

Biểu diễn tập hợp đó trên trục số, ta được hình 9.



Hình 9

b) *Hướng dẫn :* Tương tự câu a), ta có $x \leq -3,375$.

94. Khai triển vế phải và rút gọn, ta được kết quả vế phải bằng vế trái.

a) Nếu x, y, z không âm thì x + y + z không âm. Suy ra

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$$

Từ đó, ta có $\dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz.$

b) Đặt $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$.

Ta thấy a, b, c không âm, nên x, y và z không âm. Dựa vào kết quả câu a) ta có

$$\frac{(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 + (\sqrt[3]{c})^3}{3} \geq \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c}.$$

Suy ra $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$

95. Lập luận tương tự bài 67.

Ôn tập chương I

96. Chọn (D).

(Có thể nhẩm và loại các trường hợp (A) ; (B) và (C)).

97. Chọn (A).

98. a) Ta thấy $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ xác định và không âm, nên theo định nghĩa căn bậc hai số học, ta sẽ chứng tỏ bình phương của nó bằng 6.

Ta có $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3}+2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}+2-\sqrt{3}$

$$= 4 + 2\sqrt{2^2-3} = 4+2 = 6.$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

b) Ta biến đổi vế trái.

$$\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = \frac{2}{\left|2-\sqrt{5}\right|}-\frac{2}{\left|2+\sqrt{5}\right|}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}-2}-\frac{2}{\sqrt{5}+2} = \frac{2(\sqrt{5}+2)-2(\sqrt{5}-2)}{5-4} = 8.$$

Vậy đẳng thức đúng.

99. Rút gọn $A = \dfrac{|2x-1|}{2(2x-1)}$. Xét hai trường hợp

– Nếu $x > 0,5$ ta có $A = 0,5$;

– Nếu $x < 0,5$ ta có $A = -0,5$.

Suy ra điều phải chứng minh.

100. a) *Chú ý* : $4-2\sqrt{3} = 3+1-2\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3}-1)^2$.

Đáp số : 1.

b) *Chú ý* : $15-6\sqrt{6} = (3-\sqrt{6})^2$ và $33-12\sqrt{6} = (3-2\sqrt{6})^2$.

Đáp số : $\sqrt{6}$.

c) Thực hiện phép chia cho $\sqrt{10}$.

Đáp số : $23\sqrt{5}$.

101. a) Khai triển vế phải, so sánh với vế trái, suy ra đẳng thức đúng.

b) Áp dụng câu a) ta có

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}.$$

Từ đó, nhận thấy $x \geq 4$ là điều kiện xác định của A.

Rút gọn được $\quad A = \sqrt{x-4} + 2 + \left|\sqrt{x-4} - 2\right|$.

Ta thấy $\sqrt{x-4} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} \geq 2 \Leftrightarrow x - 4 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 8$.

Do đó :

- Với $x \geq 8$, ta có

$$A = \sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2 = 2\sqrt{x-4}.$$

- Với $x < 8$ (và $x \geq 4$), ta có

$$A = \sqrt{x-4} + 2 + 2 - \sqrt{x-4} = 4.$$

102. Điều kiện xác định của A là $x \geq 0$.

Điều kiện xác định của B là $x \geq 1$.

a) Với điều kiện $x \geq 0$, ta có $x + 1 \geq 1$ nên $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{1}$.

Từ đó suy ra $\quad \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 1$ hay $A \geq 1$.

Với điều kiện $x \geq 1$ ta có $x + 4 \geq 1 + 4$ hay $x + 4 \geq 5$ nên $\sqrt{x+4} \geq \sqrt{5}$.

Từ đó suy ra $\quad \sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5}$ hay $B \geq \sqrt{5}$.

b) Áp dụng kết quả câu a) ta có

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+1} \geq 1.$$

Do đó, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{x} = 0 \text{ và } \sqrt{x+1} = 1.$$

Ta tìm được $x = 0$.

Theo kết quả câu a), ta có

$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{5},$$

mà $\sqrt{5} > 2$ nên $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} > 2$.

Vậy, không tồn tại x thoả mãn $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 2$.

103. Khai triển $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, ta được $x - \sqrt{x} + 1$.

Vậy ta có đẳng thức

$$x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Ta thấy $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ và dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{1}{4}$.

Do vậy, $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ và dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{4}$.

Vậy $x - \sqrt{x} + 1$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{4}$ và giá trị này đạt được khi $x = \frac{1}{4}$.

Suy ra $\frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$ có giá trị lớn nhất là $\frac{4}{3}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

104. Ta biến đổi $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$.

Để $1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$ nhận giá trị nguyên thì $\frac{4}{\sqrt{x}-3}$ phải có giá trị nguyên.

Do x nguyên nên $\sqrt{x}$ là số vô tỉ hoặc là số nguyên.

- Với $\sqrt{x}$ là số vô tỉ thì $\sqrt{x} - 3$ là số vô tỉ nên $\frac{4}{\sqrt{x}-3}$ không thể là số nguyên. Vậy trong trường hợp này không có giá trị nào của x để biểu thức đã cho nhận giá trị nguyên.

- Với $\sqrt{x}$ là số nguyên thì $\sqrt{x} - 3$ là nguyên. Vậy để $\frac{4}{\sqrt{x}-3}$ nguyên ta phải có $\sqrt{x} - 3$ phải là ước của 4.

Mặt khác, theo định nghĩa căn bậc hai thì $x \geq 0$ và $\sqrt{x} \geq 0$.

Vậy giá trị x nguyên cần tìm phải không âm và phải thoả mãn điều kiện $\sqrt{x} \geq 0$ và $\sqrt{x} - 3$ là ước của 4.

Ta thấy 4 có các ước số là ± 4 ; ± 2 và ± 1.

Với ước là 4, ta có $\sqrt{x} - 3 = 4$, suy ra x = 49 ;

Với ước là –4, ta có $\sqrt{x} - 3 = -4$, không tồn tại x ;

Với ước là 2, ta có $\sqrt{x} - 3 = 2$, suy ra x = 25 ;

Với ước là –2, ta có $\sqrt{x} - 3 = -2$; suy ra x = 1 ;

Với ước là 1, ta có $\sqrt{x} - 3 = 1$; suy ra x = 16 ;

Với ước là –1, ta có $\sqrt{x} - 3 = -1$, suy ra x = 4.

105. a) Chọn mẫu chung của vế trái là 2(a – b), biến đổi vế trái ta có :

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2(a-b)} - \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2(a-b)} + \frac{4b}{2(a-b)} =$$

$$= \frac{a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b - (a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) + 4b}{2(a-b)} = \frac{4\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2(a-b)}.$$

Rút gọn, ta suy ra vế trái bằng vế phải.

b) Ta biến đổi vế trái

$$\left(\frac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$$

$$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$$

$$= \frac{[(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})]^2}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2} = 1.$$

Vậy đẳng thức đúng.

106. a) Để các căn thức bậc hai xác định thì điều kiện là a và b không âm.

Để cho các mẫu khác 0 thì điều kiện là $a \neq 0$, $b \neq 0$ và $a \neq b$.

Vậy điều kiện để A có nghĩa là $a > 0$, $b > 0$ và $a \neq b$.

b) Ta biến đổi A như sau :

$$A = \frac{a + 2\sqrt{ab} + b - 4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{ab}}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1}.$$

Rút gọn tiếp, ta được $A = -2\sqrt{b}$.

Vậy giá trị của A không phụ thuộc vào a mà chỉ phụ thuộc vào b.

107. a) *Chú ý :* $\sqrt{x^3} - 1 = (\sqrt{x})^3 - 1 = (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)$

$$1 + \sqrt{x^3} = 1 + (\sqrt{x})^3 = (1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x).$$

Từ đó biến đổi được :

$$B = \frac{2x + 1 - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x^3} - 1}.(1 - 2\sqrt{x} + x)$$

$$= \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^3} - 1}.(\sqrt{x} - 1)^2 = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x} - 1.$$

b) $B = 3$ khi và chỉ khi $\sqrt{x} - 1 = 3$.

Ta có $\sqrt{x} - 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$.

108. a) *Chú ý :* Với $x > 0$ thì

$$9 - x = (3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x}).$$

Vậy $(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})$ là mẫu chung của biểu thức trong ngoặc thứ nhất.

Cũng từ $x > 0$, có

$$x - 3\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 3).$$

Vậy $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)$ là mẫu chung của biểu thức trong ngoặc thứ hai.

Thực hiện biến đổi trong mỗi ngoặc và rút gọn được

$$C = \frac{3(\sqrt{x}+3)}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{2(\sqrt{x}+2)}.$$

Đáp số : $C = \dfrac{-3\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)}.$

b) $C < -1$ khi $\dfrac{-3\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)} + 1 = \dfrac{4-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)}$ có giá trị âm.

Do $2(\sqrt{x}+2)$ dương nên $4-\sqrt{x}$ phải âm. Ta tìm được $x > 16$.

Bài tập bổ sung

I.1. *Hướng dẫn*

– Nhận xét $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$.

– Đặt $a = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ và $b = \sqrt{5}+1$.

– Đưa về so sánh a^2 với b^2 hay $5+2\sqrt{6}$ với $6+2\sqrt{5}$.

– Đưa về so sánh a^2-5 với b^2-5 hay so sánh $2\sqrt{6}$ với $1+2\sqrt{5}$.

– Đưa về so sánh $(a^2-5)^2$ với $(b^2-5)^2$ hay so sánh 24 với $21+4\sqrt{5}$.

– Có thể chứng tỏ được $24 < 21+4\sqrt{5}$ (vì $3 < 4\sqrt{5} \Leftrightarrow 3 < \sqrt{80}$).

– Từ kết quả $3 < \sqrt{80}$ suy luận ngược lại, suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < \sqrt{5}+1$.

Chương II

HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. ĐỀ BÀI

§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

1. Trong các bảng sau ghi các giá trị tương ứng của x và y. Bảng nào xác định y là hàm số của x ? Vì sao ?

x	1	2	4	5	7	8
y	3	5	9	11	15	17

a)

x	3	4	3	5	8
y	6	8	4	8	16

b)

2. Cho hàm số $y = f(x) = 1,2x$. Tính các giá trị tương ứng của y khi cho x các giá trị sau đây, rồi lập bảng giá trị tương ứng giữa x và y :

$-2,50$; $-2,25$; $-2,00$; $-1,75$; $-1,50$; $-1,25$; -1 ;

$-0,75$; $-0,50$; $-0,25$; 0 ; $0,25$; $0,50$; $0,75$;

1 ; $1,25$; $1,50$; $1,75$; $2,00$; $2,25$; $2,50$.

3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3}{4}x$. Tính

$f(-5)$; $f(-4)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

$f(1)$; $f(2)$; $f(4)$; $f(a)$; $f(a+1)$.

4. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 5$ với $x \in \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng hàm số đồng biến trên **R**.

5. Biểu diễn các điểm sau đây trên cùng hệ trục toạ độ. Nối theo thứ tự các điểm đã cho bằng các đoạn thẳng để được một đường gấp khúc với điểm đầu là A, điểm cuối là M.

A(1 ; 6) ; B(6 ; 11) ; C(14 ; 12) ; D(12 ; 9) ;

E(15 ; 8) ; F(13 ; 4) ; G(9 ; 7) ; H(12 ; 1) ;

I(16 ; 4) ; K(20 ; 1) ; L(19 ; 9) ; M(22 ; 6).

Bài tập bổ sung

1.1. Cho 4 bảng ghi các giá trị tương ứng của x và y (h. bs. 1)

Bảng 1

x	0,5	1	1,5	0,5	2	2,5
y	2,5	3	4,5	3,5	5	6,5

Bảng 2

x	−1	−2	1	1,5	1,5	2
y	3	5	3	2	1	5

Bảng 3

x	0	1	1,5	2	2,5	3
y	0	2	3	4	5	6

Bảng 4

x	−1	2	−1	3	4	5
y	−2	3	2	5,5	6,5	8,5

Hình bs. 1

Trong các bảng trên đây, bảng xác định y là hàm số của x là :

(A) Bảng 1 ; (B) Bảng 2 ; (C) Bảng 3 ; (D) Bảng 4.

1.2. Cho hàm số $y = f(x) = 4 - \frac{2}{5}x$ với $x \in \mathbf{R}$.

Chứng minh rằng hàm số đã cho nghịch biến trên **R**.

§2. Hàm số bậc nhất

6. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất ? Hãy xác định các hệ số a, b và xét xem hàm số nào đồng biến ? Hàm số nào nghịch biến ?

a) $y = 3 - 0,5x$; b) $y = -1,5x$; c) $y = 5 - 2x^2$;

d) $y = (\sqrt{2} - 1)x + 1$; e) $y = \sqrt{3}(x - \sqrt{2})$; f) $y + \sqrt{2} = x - \sqrt{3}$.

7. Cho hàm số bậc nhất $y = (m + 1)x + 5$.

a) Tìm giá trị của m để hàm số y là hàm số đồng biến ;

b) Tìm giá trị của m để hàm số y là hàm số nghịch biến.

8. Cho hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x + 1$.

a) Hàm số là đồng biến hay nghịch biến trên **R** ? Vì sao ?

b) Tính các giá trị tương ứng của y khi x nhận các giá trị sau :

0 ; 1 ; $\sqrt{2}$; $3 + \sqrt{2}$; $3 - \sqrt{2}$.

c) Tính các giá trị tương ứng của x khi y nhận các giá trị sau :

0 ; 1 ; 8 ; $2 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{2}$.

9. Một hình chữ nhật có kích thước là 25cm và 40cm. Người ta tăng mỗi kích thước của hình chữ nhật thêm x cm. Gọi S và P thứ tự là diện tích và chu vi của hình chữ nhật mới tính theo x.

a) Hỏi rằng các đại lượng S và P có phải là hàm số bậc nhất của x không ? Vì sao ?

b) Tính các giá trị tương ứng của P khi x nhận các giá trị (tính theo đơn vị cm) sau :

0 ; 1 ; 1,5 ; 2,5 ; 3,5.

10. Chứng minh rằng hàm số bậc nhất $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$.

11. Với những giá trị nào của m thì các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất ?

a) $y = \sqrt{m - 3}\,x + \dfrac{2}{3}$;

b) $S = \dfrac{1}{m + 2}t - \dfrac{3}{4}$ (t là biến số).

12. Tìm trên mặt phẳng toạ độ tất cả các điểm :

a) Có tung độ bằng 5 ;

b) Có hoành độ bằng 2 ;

c) Có tung độ bằng 0 ;

d) Có hoành độ bằng 0 ;

e) Có hoành độ và tung độ bằng nhau ;

f) Có hoành độ và tung độ đối nhau.

13. Tìm khoảng cách giữa hai điểm trên mặt phẳng toạ độ, biết rằng :

a) A(1 ; 1), B(5 ; 4) ;

b) M(−2 ; 2), N(3 ; 5) ;

c) $P(x_1 ; y_1)$, $Q(x_2 ; y_2)$.

Bài tập bổ sung

2.1. Trong các hàm số dưới đây, hàm số bậc nhất là :

(A) $y = 3 - 2x + x^2$; (B) $y = \dfrac{4}{x+3} - \dfrac{2}{5}$;

(C) $y = \dfrac{3}{2}(\sqrt{x} + 5)$; (D) $y = \dfrac{2x+5}{3}$.

2.2. Trong các hàm số bậc nhất dưới đây, hàm số đồng biến là :

(A) $y = \dfrac{5 - 3x}{2} + 7$; (B) $y = \dfrac{7 + 2x}{3} - 5$;

(C) $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3 + x}{5}$; (D) $y = 13 - \dfrac{3x + 1}{5}$.

2.3. Trong các hàm số bậc nhất dưới đây, hàm số nghịch biến là :

(A) $y = 5 - \dfrac{7 - x}{3}$; (B) $y = 15 - \dfrac{3x - 1}{2}$;

(C) $y = \dfrac{4x + 5}{3} - 1$; (D) $y = \dfrac{4x + 1}{3} - \dfrac{2}{5}$.

2.4. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{m} + \sqrt{5}}{\sqrt{m} - \sqrt{5}}.x + 2010$.

a) Với điều kiện nào của m thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất ?

b) Tìm các giá trị của m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên **R**.

§3. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

14. a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$$y = x + \sqrt{3} ; \qquad (1)$$

$$y = 2x + \sqrt{3}. \qquad (2)$$

b) Gọi giao điểm của đường thẳng $y = x + \sqrt{3}$ với các trục Oy, Ox theo thứ tự là A, B và giao điểm của đường thẳng $y = 2x + \sqrt{3}$ với các trục Oy, Ox theo thứ tự là A, C. Tính các góc của tam giác ABC (dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx-220* hoặc CASIO *fx-500A*).

15. Cho hàm số $y = (m - 3)x$.

a) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến ? Nghịch biến ?

b) Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm A(1 ; 2).

c) Xác định giá trị của m để đồ thị của hàm số đi qua điểm B(1 ; –2).

d) Vẽ đồ thị của hai hàm số ứng với giá trị của m tìm được ở các câu b), c).

16. Cho hàm số $y = (a - 1)x + a$.

a) Xác định giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

b) Xác định giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng –3.

c) Vẽ đồ thị của hai hàm số ứng với giá trị của a tìm được ở các câu a), b) trên cùng hệ trục toạ độ Oxy và tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng vừa vẽ được.

17. a) Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ Oxy đồ thị các hàm số sau :

$$y = x \ (d_1) ; \qquad y = 2x \ (d_2) ; \qquad y = -x + 3 \ (d_3).$$

b) Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1), (d_2) theo thứ tự tại A, B. Tìm toạ độ của các điểm A, B và tính diện tích tam giác OAB.

Bài tập bổ sung

3.1. Cho hàm số bậc nhất $y = (m - 1{,}5)x + 5$ (1)

a) Khi m = 3, đồ thị của hàm số (1) đi qua điểm :

(A) (2 ; 7) ; (B) (2,5 ; 8) ; (C) (2 ; 8) ; (D) (–2 ; 3).

b) Khi m = 2, đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại điểm :

(A) (1 ; 0) ; (B) (2 ; 0) ; (C) (–1 ; 0) ; (D) (–10 ; 0).

3.2. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 xác định bởi các hàm số bậc nhất sau :

$y = 0{,}5x - 3$ (d_1) ; $y = -1{,}5x + 5$ (d_2).

Đường thẳng (d_1) và đường thẳng (d_2) cắt nhau tại điểm :

(A) (2 ; –2) ; (B) (4 ; –1) ; (C) (–2 ; –4) ; (D) (8 ; 1).

3.3. Cho ba đường thẳng sau :

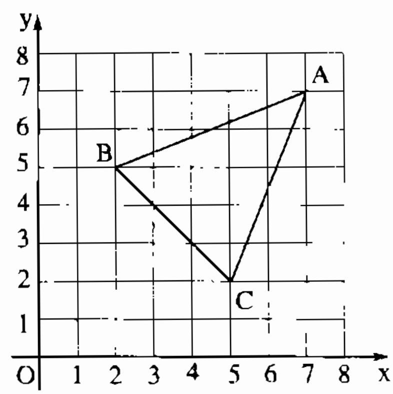
$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$ (d_1) ; $y = \frac{3}{5}x - \frac{5}{2}$ (d_2) ; $y = kx + 3{,}5$ (d_3).

Hãy tìm giá trị của k để sao cho ba đường thẳng đồng quy tại một điểm.

3.4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm A, B, C có toạ độ như sau : A(7 ; 7), B(2 ; 5), C(5 ; 2).

a) Hãy viết phương trình của các đường thẳng AB, BC và CA.

b) Coi độ dài mỗi đơn vị trên các trục Ox, Oy là 1cm, hãy tính chu vi, diện tích của tam giác ABC (lấy chính xác đến hai chữ số thập phân).



Hình bs. 2

§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

18. Cho hàm số $y = ax + 3$. Hãy xác định hệ số a trong mỗi trường hợp sau :

a) Đồ thị của hàm số song song với đường thẳng $y = -2x$;

b) Khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = 2 + \sqrt{2}$.

19. Biết rằng với x = 4 thì hàm số $y = 2x + b$ có giá trị 5.

a) Tìm b ;

b) Vẽ đồ thị của hàm số ứng với giá trị của b tìm được ở câu a).

20. Tìm hệ số a của hàm số $y = ax + 1$, (1)

biết rằng khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = 3 + \sqrt{2}$.

21. Xác định hàm số $y = ax + b$ biết đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.

22. Xác định hàm số trong mỗi trường hợp sau, biết đồ thị của hàm số là đường thẳng đi qua gốc toạ độ :

a) Đi qua điểm A(3 ; 2) ;

b) Có hệ số a bằng $\sqrt{3}$;

c) Song song với đường thẳng $y = 3x + 1$.

23. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm A(1 ; 2), B(3 ; 4).

a) Tìm hệ số a của đường thẳng đi qua A và B ;

b) Xác định hàm số biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua A và B.

24. Cho đường thẳng $y = (k + 1)x + k$. (1)

a) Tìm giá trị của k để đường thẳng (1) đi qua gốc toạ độ ;

b) Tìm giá trị của k để đường thẳng (1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$;

c) Tìm giá trị của k để đường thẳng (1) song song với đường thẳng $y = \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 3$.

Bài tập bổ sung

4.1. Đường thẳng $y = kx + \frac{1}{2}$ song song với đường thẳng $y = \frac{2}{3} - \frac{5x}{7}$ khi k có giá trị là :

(A) $\frac{2}{3}$; (B) 5 ; (C) $\frac{5}{7}$; (D) $-\frac{5}{7}$.

4.2. Đường thẳng $y = \frac{2m+3}{5}x + \frac{4}{7}$ và đường thẳng $y = \frac{5m+2}{3}x - \frac{1}{2}$ song song với nhau khi m có giá trị là :

(A) 1 ; (B) $\frac{19}{31}$; (C) $-\frac{1}{19}$; (D) $\frac{1}{3}$.

4.3. Hai đường thẳng $y = (2m + 1)x - \frac{2}{3}$ và $y = (5m - 3)x + \frac{3}{5}$ cắt nhau khi m có giá trị khác với giá trị sau :

(A) $\frac{4}{7}$; (B) $\frac{4}{3}$; (C) $-\frac{2}{7}$; (D) $-\frac{4}{3}$.

4.4. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{3} - 1}.x + \sqrt{k} + \sqrt{3}$. (d)

a) Tìm giá trị của k để đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $2\sqrt{3}$.

b) Tìm giá trị của k để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

c) Chứng minh rằng, với mọi giá trị $k \geq 0$, các đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định. Hãy xác định toạ độ của điểm cố định đó.

§5. Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b

25. a) Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và đi qua điểm A(2 ; 1) ;

b) Tìm hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và đi qua điểm B(1 ; –2) ;

c) Vẽ đồ thị của các hàm số với hệ số góc tìm được ở các câu a), b) trên cùng một mặt phẳng toạ độ và chứng tỏ rằng hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.

26. Cho hai đường thẳng

$y = ax + b$; (d)

$y = a'x + b'$. (d')

Chứng minh rằng :

Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, hai đường thẳng (d) *và* (d') *vuông góc với nhau khi và chỉ khi* $a.a' = -1$.

27. a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của các hàm số sau :

$$y = x \; ; \qquad (1)$$

$$y = 0{,}5x. \qquad (2)$$

b) Đường thẳng (d) song song với trục Ox và cắt trục tung Oy tại điểm C có tung độ bằng 2, theo thứ tự cắt các đường thẳng (1) và (2) tại D và E. Tìm toạ độ của các điểm D, E. Tính chu vi và diện tích của tam giác ODE.

28. a) Vẽ trên cùng một mặt phẳng toạ độ đồ thị của các hàm số

$$y = -2x \; ; \qquad (1)$$

$$y = 0{,}5x. \qquad (2)$$

b) Qua điểm K(0 ; 2) vẽ đường thẳng (d) song song với trục Ox. Đường thẳng (d) cắt các đường thẳng (1) và (2) lần lượt tại A và B. Tìm toạ độ của các điểm A, B.

c) Hãy chứng tỏ rằng $\widehat{AOB} = 90^\circ$ (hai đường thẳng $y = -2x$ và $y = 0{,}5x$ vuông góc với nhau).

29. Cho hàm số $y = mx + (2m + 1)$. (1)

Với mỗi giá trị của $m \in \mathbf{R}$, ta có một đường thẳng xác định bởi (1). Như vậy, ta có một *họ đường thẳng* xác định bởi (1). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, họ đường thẳng xác định bởi (1) luôn đi qua một điểm cố định. Hãy xác định toạ độ của điểm đó.

Bài tập bổ sung

5.1. a) Hệ số góc của đường thẳng $y = \dfrac{3x - 5}{2}$ là :

(A) 3 ; (B) (–5) ; (C) $\dfrac{3}{2}$; (D) $-\dfrac{5}{2}$.

b) Hệ số góc của đường thẳng $y = \dfrac{3 - \sqrt{3}x}{5}$ là :

(A) 3 ; (B) $\dfrac{3}{5}$; (C) $-\sqrt{3}$; (D) $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

5.2. a) Hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và điểm $M\left(\sqrt{3}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ là :

(A) $\sqrt{3}$; (B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) $\dfrac{3}{2}$.

b) Hệ số góc của đường thẳng đi qua hai điểm $P(1\,;\sqrt{3}+\sqrt{2})$ và $Q(\sqrt{3}\,;3+\sqrt{2})$ là :

(A) $-\sqrt{3}$; (B) $(\sqrt{3}-1)$; (C) $(1-\sqrt{3})$; (D) $\sqrt{3}$.

5.3. a) Góc hợp bởi đường thẳng $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{5}$ và trục Ox là :

(A) $26^\circ34'$; (B) 30° ; (C) 60° ; (D) $30^\circ58'$.

b) Góc hợp bởi đường thẳng $y = \dfrac{7+2x}{5}$ và trục Ox là :

(A) $54^\circ28'$; (B) $81^\circ52'$; (C) $21^\circ48'$; (D) $63^\circ26'$.

(Chú ý : Dùng máy tính bỏ túi tính góc chính xác đến phút).

5.4. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy cho bốn điểm A, B, C, D có toạ độ nguyên như sau :

A(4 ; 5), B(1 ; –1), C(4 ; –4), D(7 ; –1).

a) Viết phương trình của các đường thẳng AB, BC, CD và DA.

b) Tính (theo độ, phút) các góc của tứ giác ABCD bằng máy tính bỏ túi.

Ôn tập chương II

30. a) Với những giá trị nào của m thì hàm số $y = (m+6)x - 7$ đồng biến ?

b) Với những giá trị nào của k thì hàm số $y = (-k+9)x + 100$ nghịch biến ?

31. Với những giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số $y = 12x + (5-m)$ và $y = 3x + (3+m)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung ?

32. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng $y = (a - 1)x + 2$ và $y = (3 - a)x + 1$ song song với nhau.

33. Với điều kiện nào của k và m thì hai đường thẳng sau sẽ trùng nhau ?

$$y = kx + (m - 2) \,;$$

$$y = (5 - k)x + (4 - m).$$

34. Cho đường thẳng $y = (1 - 4m)x + m - 2.$ (d)

a) Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) đi qua gốc toạ độ ?

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) tạo với trục Ox một góc nhọn ? Góc tù ?

c) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục tung tại một điểm có tung độ bằng $\frac{3}{2}$.

d) Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

35. Cho đường thẳng $y = (m - 2)x + n$ $(m \neq 2)$. (d)

Tìm các giá trị của m và n trong mỗi trường hợp sau :

a) Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(-1\,;\,2)$, $B(3\,;\,-4)$;

b) Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $2 + \sqrt{2}$;

c) Đường thẳng (d) cắt đường thẳng $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$;

d) Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$;

e) Đường thẳng (d) trùng với đường thẳng $y = 2x - 3$.

36. a) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng toạ độ :

$y = 3x + 6$;	(1)	$y = 2x + 4$;	(2)
$y = x + 2$;	(3)	$y = \frac{1}{2}x + 1$.	(4)

b) Gọi giao điểm của các đường thẳng (1), (2), (3), (4) với trục hoành là A và với trục tung lần lượt là B_1, B_2, B_3, B_4, ta có $\widehat{B_1Ax} = \alpha_1$; $\widehat{B_2Ax} = \alpha_2$; $\widehat{B_3Ax} = \alpha_3$; $\widehat{B_4Ax} = \alpha_4$. Tính các góc α_1, α_2, α_3, α_4.

(*Hướng dẫn :* Dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx-220* hoặc CASIO *fx-500A* hoặc CASIO *fx-500MS*... tính $tg\alpha_1$, $tg\alpha_2$, $tg\alpha_3$, $tg\alpha_4$ rồi tính ra các góc tương ứng).

c) Có nhận xét gì về độ dốc của các đường thẳng (1), (2), (3), (4) ?

37. a) Cho các điểm M(–1 ; –2), N(–2 ; –4), P(2 ; –3), Q(3 ; –4,5). Tìm toạ độ của các điểm M', N', P', Q' lần lượt đối xứng với các điểm M, N, P, Q qua trục Ox.

b) Vẽ đồ thị của các hàm số sau trên cùng hệ trục toạ độ :

$$y = |x| ;$$

$$y = |x + 1|.$$

c) Tìm toạ độ giao điểm của đồ thị của các hàm số $y = |x|$ và $y = |x + 1|$. Từ đó, suy ra phương trình $|x| = |x + 1|$ có một nghiệm duy nhất.

38. Cho các hàm số :

$$y = 2x - 2 ; \qquad (d_1)$$

$$y = -\frac{4}{3}x - 2 ; \qquad (d_2)$$

$$y = \frac{1}{3}x + 3 . \qquad (d_3)$$

a) Vẽ đồ thị của các hàm số đã cho trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Gọi giao điểm của đường thẳng (d_3) với (d_1) và (d_2) theo thứ tự là A, B, tìm toạ độ của A, B.

c) Tính khoảng cách AB.

B. LỜI GIẢI – CHỈ DẪN – ĐÁP SỐ

§1. Nhắc lại và bổ sung các khái niệm về hàm số

1. Bảng a) xác định y là hàm số của biến số x vì với mỗi giá trị của x ta xác định được một giá trị tương ứng duy nhất của y.

Bảng b) không xác định y là hàm số của x vì với mỗi giá trị xác định của x không phải khi nào cũng xác định duy nhất một giá trị tương ứng của y. Cụ thể, khi $x = 3$, y lấy giá trị là 6 và 4.

2. Với hàm số $y = f(x) = 1,2x$, dùng máy tính CASIO *fx-220* tính các giá trị của y theo x (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai) ta được kết quả thể hiện ở bảng sau :

x	–2,50	–2,25	–2,00	–1,75	–1,50	–1,25	–1
y = 1,2x	–3,00	–2,70	–2,40	–2,10	–1,80	–1,50	–1,20

x	–0,75	–0,50	–0,25	0	0,25	0,50	0,75
y = 1,2x	–0,90	–0,60	–0,30	0	0,30	0,60	0,90

x	1	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
y = 1, 2x	1,20	1,50	1,80	2,10	2,40	2,70	3,00

Hướng dẫn cách ấn phím :

– Ấn $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{2}$ (thực hiện phép tính cho kết quả có hai chữ số ở phần thập phân).

– Ấn $\boxed{1}$ $\boxed{.}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$ (để lưu hằng số 1,2 và phép tính nhân).

– Muốn tính giá trị của y, chỉ cần nhập giá trị của x vào máy rồi ấn phím $\boxed{=}$.

* *Ghi chú :* Chỉ cần tính giá trị của y tương ứng với những giá trị của x dương ($x > 0$) ; Từ đó suy ra các giá trị của y ứng với những giá trị âm của x có cùng giá trị tuyệt đối.

3. Với $y = f(x) = \frac{3}{4}x$, ta có :

$$f(-5) = -\frac{15}{4};\ \ f(-4) = -3\ ;\ \ f(-1) = -\frac{3}{4};\ \ f(0) = 0\ ;\ \ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}\ ;$$

$$f(1) = \frac{3}{4};\quad f(2) = \frac{3}{2}\ ;\quad f(4) = 3;\quad f(a) = \frac{3a}{4}\ ;\quad f(a+1) = \frac{3}{4}(a+1).$$

4. Xét hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 5$.

Chứng minh hàm số đồng biến trên **R** :

Với x_1, x_2 bất kì thuộc **R**, ta có :

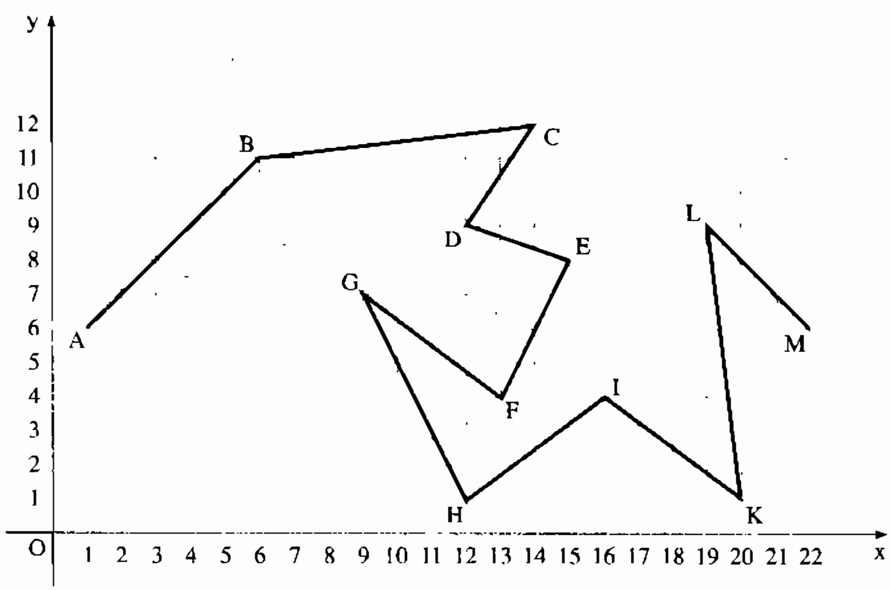
$$y_1 = f(x_1) = \frac{2}{3}x_1 + 5;\qquad y_2 = f(x_2) = \frac{2}{3}x_2 + 5.$$

Nếu $x_1 < x_2$ thì $x_1 - x_2 < 0$ và do đó

$$y_1 - y_2 = \left(\frac{2}{3}x_1 + 5\right) - \left(\frac{2}{3}x_2 + 5\right) = \frac{2}{3}(x_1 - x_2) < 0.$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên **R**.

5. Dựng hệ trục toạ độ Oxy, rồi dựng các điểm theo toạ độ của chúng, nối theo thứ tự các điểm, ta được một đường gấp khúc (h.10).



Hình 10

Bài tập bổ sung

1.1. (C).

1.2. Với x_1, x_2 là hai giá trị bất kì của x thuộc **R**, ta có :

$$y_1 = f(x_1) = 4 - \frac{2}{5}x_1 \; ; \; y_2 = f(x_2) = 4 - \frac{2}{5}x_2.$$

Nếu $x_1 < x_2$ thì $x_1 - x_2 < 0$. Khi đó ta có :

$$y_1 - y_2 = \left(4 - \frac{2}{5}x_1\right) - \left(4 - \frac{2}{5}x_2\right)$$

$$= -\frac{2}{5}(x_1 - x_2) > 0. \text{ Suy ra } y_1 > y_2.$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số nghịch biến trên **R**.

§2. Hàm số bậc nhất

6. a) $y = 3 - 0{,}5x$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = -0{,}5$, $b = 3$.

Đây là hàm số nghịch biến vì $a = -0{,}5 < 0$.

b) $y = -1{,}5x$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = -1{,}5$, $b = 0$.

Đây là hàm số nghịch biến vì $a = -1{,}5 < 0$.

c) $y = 5 - 2x^2$ không phải là hàm số bậc nhất.

d) $y = (\sqrt{2} - 1)x + 1$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = \sqrt{2} - 1$, $b = 1$.

Đây là hàm số đồng biến vì $a = \sqrt{2} - 1 > 0$.

e) $y = \sqrt{3}(x - \sqrt{2}) = \sqrt{3}x - \sqrt{3}.\sqrt{2} = \sqrt{3}x - \sqrt{6}$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = \sqrt{3}$; $b = -\sqrt{6}$.

Đây là hàm số đồng biến vì $a = \sqrt{3} > 0$.

f) Từ $y + \sqrt{2} = x - \sqrt{3}$ suy ra $y = x - \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$, do đó y là hàm số bậc nhất đối với x, có hệ số $a = 1$, $b = -(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Đây là hàm số đồng biến vì $a = 1 > 0$.

7. Hàm số $y = (m+1)x + 5$ là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = m + 1$.

a) Hàm số đồng biến khi $a = m + 1 > 0$ hay $m > -1$.

b) Hàm số nghịch biến khi $a = m + 1 < 0$ hay $m < -1$.

Chú ý : Khi $m = -1$ thì $y = 0x + 5$. Giá trị của y không thay đổi với mọi giá trị của x và luôn luôn có giá trị bằng 5. Trong trường hợp này, ta nói y là một hàm hằng.

8. Xét hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x + 1$.

Đây là hàm số bậc nhất, có hệ số $a = 3 - \sqrt{2}$, $b = 1$.

a) Hàm số đã cho là hàm số đồng biến trên **R**, vì có hệ số $a = 3 - \sqrt{2} > 0$.

b) $x = 0$, $y = 1$.

$x = 1$, $y = (3 - \sqrt{2}).1 + 1 = 4 - \sqrt{2}$.

$x = \sqrt{2}$, $y = (3 - \sqrt{2}).\sqrt{2} + 1 = 3\sqrt{2} - 1$.

$x = 3 + \sqrt{2}$, $y = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) + 1 = 8$.

$x = 3 - \sqrt{2}$, $y = (3 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) + 1 = 12 - 6\sqrt{2}$.

c) • Với $y = 0$, ta có :

$$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 0 \Rightarrow (3 - \sqrt{2})x = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{-1(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{-(3 + \sqrt{2})}{7}.$$

• Với $y = 1$, ta có :

$$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 1 \Rightarrow (3 - \sqrt{2})x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (vì } 3 - \sqrt{2} \neq 0\text{)}.$$

• Với $y = 8$, ta có :

$$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 8 \Rightarrow x = \frac{7}{3 - \sqrt{2}} = \frac{7(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = 3 + \sqrt{2}.$$

• Với $y = 2 + \sqrt{2}$, ta có :

$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 2 + \sqrt{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{5 + 4\sqrt{2}}{7}.$$

• Với $y = 2 - \sqrt{2}$, ta có :

$(3 - \sqrt{2})x + 1 = 2 - \sqrt{2}$

$$\Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}.$$

9. Hình chữ nhật ban đầu ABCD có kích thước là AB = 40cm, AD = 25cm. Sau khi tăng mỗi kích thước của hình chữ nhật thêm x cm, ta được hình chữ nhật mới có các kích thước là

$$AB' = (40 + x)\text{cm và } AD' = (25 + x)\text{cm (h.11)}.$$

a) Ta có :

$S = (40 + x)(25 + x)$

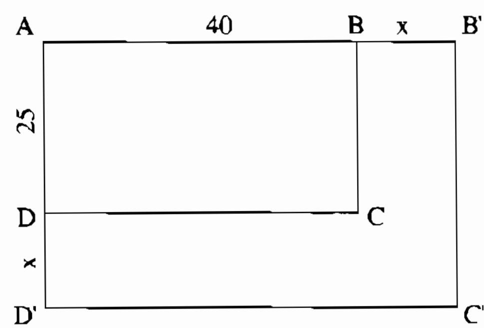
$= 1000 + 65x + x^2$; (1)

$P = 2(40 + x) + 2(25 + x)$

$= 4x + 130.$ (2)

S không phải là hàm số bậc nhất đối với x vì không có dạng ax + b.

P là hàm số bậc nhất đối với x với hệ số a = 4, b = 130.



Hình 11

b) Tính giá trị tương ứng của P theo giá trị của x, ta có bảng sau :

x	0	1	1,5	2,5	3,5
P = 4x + 130	130	134	136	140	144

10. Xét hàm số bậc nhất y = ax + b ($a \neq 0$) trên tập hợp số thực **R**.

• *Xét trường hợp* a > 0

Giả sử x_1, x_2 là hai giá trị bất kì của x thuộc **R** và $x_1 < x_2$. Khi đó ta có :

$$y_1 - y_2 = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2).$$

Từ giả thiết $x_1 < x_2$, suy ra $x_1 - x_2 < 0$. Từ đó suy ra $y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) < 0$.

Vậy, với $a > 0$, hàm số $y = ax + b$ là hàm số đồng biến.

• *Xét trường hợp* $a < 0$

Với hai giá trị x_1, x_2 bất kì thuộc **R** và giả sử $x_1 < x_2$, lập luận tương tự như trên ta có :

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2) > 0 \text{ hay } y_1 > y_2.$$

Vậy, với $a < 0$, hàm số $y = ax + b$ là hàm số nghịch biến.

11. Ta có

a) Hàm số $y = \sqrt{m-3}\,x + \frac{2}{3}$ là hàm số bậc nhất khi hệ số của x là $\sqrt{m-3} \neq 0$.

$$\sqrt{m-3} \neq 0 \text{ khi } m - 3 > 0 \text{ hay } m > 3.$$

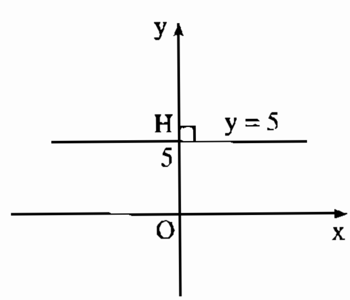
Vậy, khi $m > 3$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b) $S = \frac{1}{m+2}t - \frac{3}{4}$ là hàm số bậc nhất đối với biến số t chỉ khi hệ số $\frac{1}{m+2} \neq 0$.

$\frac{1}{m+2} \neq 0$ khi $m + 2 \neq 0$ hay $m \neq -2$.

Vậy, khi $m \neq -2$ thì S là hàm số bậc nhất của t.

12. a) Các điểm trên mặt phẳng toạ độ có tung độ bằng 5 là các điểm M(x ; 5). Vì hình chiếu vuông góc của các điểm M(x ; 5) trên trục Oy là điểm H có tung độ bằng 5 nên tập hợp các điểm M(x ; 5) là đường thẳng vuông góc với trục Oy tại điểm H có tung độ bằng 5. Nói cách khác, tập hợp các điểm M(x ; 5) là đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục tung tại điểm H có tung độ bằng 5 (h.12).



Hình 12

Phương trình của đường thẳng là y = 5 (hay y = 0.x + 5).

b) Tương tự như trên, ta có :

Tập hợp các điểm có hoành độ bằng 2, tung độ tuỳ ý là đường thẳng song song với trục Oy và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

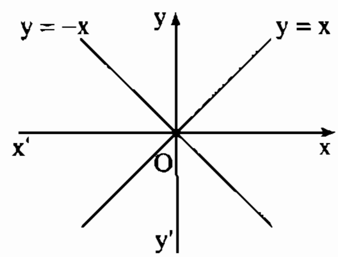
Phương trình của đường thẳng là x = 2.

c) Tập hợp các điểm có tung độ bằng 0 là trục hoành Ox, có phương trình là y = 0.

d) Tập hợp các điểm có hoành độ bằng 0 là trục tung Oy, có phương trình là x = 0.

e) Tập hợp các điểm trên mặt phẳng toạ độ có hoành độ bằng tung độ chính là tập hợp các điểm M(x ; y) trong đó x = y. Vì x, y cùng dấu nên M(x ; y) thuộc góc phần tư thứ I và thứ III. Mặt khác |x| = |y| nên M(x ; y) cách đều Ox và Oy.

Vậy tập hợp các điểm có hoành độ bằng tung độ là đường thẳng y = x chứa tia phân giác của góc xOy (h.13).



Hình 13

f) Tương tự như câu e), tập hợp các điểm có hoành độ và tung độ đối nhau là đường thẳng y = −x chứa tia phân giác của góc yOx' (góc phần tư thứ II và thứ IV) (h.13).

13. (h.14)

a) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$

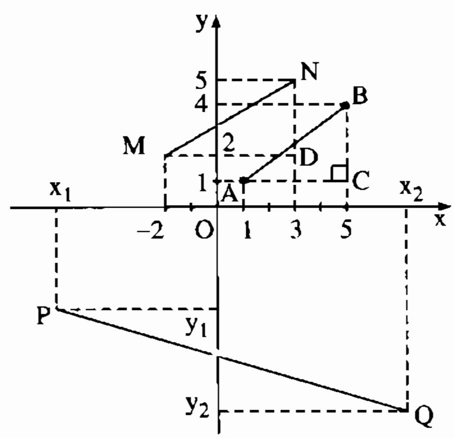
$= \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5.$

b) $MN = \sqrt{MD^2 + ND^2}$

$= \sqrt{(3+2)^2 + (5-2)^2} \approx 5{,}83.$

c) Tổng quát ta có :

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Hình 14

Bài tập bổ sung

2.1. (D). **2.2.** (B). **2.3.** (B).

2.4. a) $\sqrt{m}$ xác định khi $m \geq 0$ (1)

$\sqrt{m} - \sqrt{5} \neq 0$ khi $m \geq 0$ và $m \neq 5$ (2).

Vậy điều kiện để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất là $m \geq 0$ và $m \neq 5$.

b) Với điều kiện $m \geq 0$ và $m \neq 5$ thì $\sqrt{m} + \sqrt{5} > 0$. Do đó, điều kiện để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến trên **R** là : $\sqrt{m} - \sqrt{5} > 0$, suy ra $\sqrt{m} > \sqrt{5} \Leftrightarrow m > 5$.

§3. Đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0)

14. (h.15)

a) • Vẽ đường thẳng $y = x + \sqrt{3}$.

Trước hết tìm điểm trên Oy có tung độ bằng $\sqrt{3}$ và điểm trên Ox có hoành độ bằng $-\sqrt{3}$.

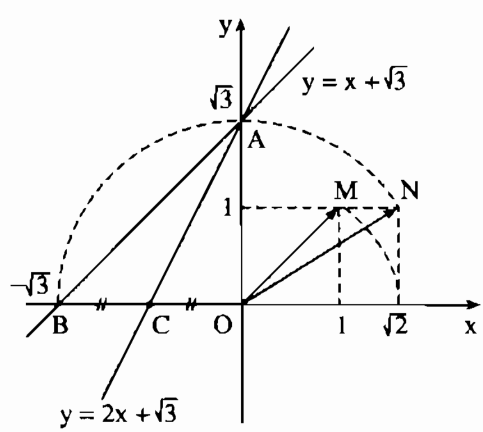
– Dựng điểm M(1 ; 1) được

$OM = \sqrt{2}$.

– Quay một cung tâm O, bán kính OM cắt tia Ox tại điểm trên trục Ox có hoành độ $\sqrt{2}$.

– Dựng điểm N($\sqrt{2}$; 1), được $ON = \sqrt{3}$.

– Vẽ cung tâm O bán kính $ON = \sqrt{3}$ để xác định hai điểm $A(0 ; \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3} ; 0)$. Đó là



Hình 15

hai điểm có toạ độ thoả mãn phương trình $y = x + \sqrt{3}$.

Vẽ đường thẳng qua A, B ta được đồ thị của hàm số

$$y = x + \sqrt{3}.$$

• Vẽ đường thẳng $y = 2x + \sqrt{3}$.

– Cho x = 0, tính được $y = \sqrt{3}$, ta có điểm $A(0 ; \sqrt{3})$.

– Cho y = 0, tính được $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có điểm $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; 0\right)$.

Đường thẳng qua A, C là đồ thị của hàm số $y = 2x + \sqrt{3}$.

b) Tính các góc của tam giác ABC.

$$\text{tg}(\widehat{ABC}) = 1 \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^{\circ};$$

$$\text{tg}(\widehat{ACO}) = 2 \Rightarrow \widehat{ACO} \approx 63^{\circ}26'.$$

Hướng dẫn : Tính góc ACO trên máy tính bỏ túi CASIO *fx-220* (hoặc CASIO *fx-500A*) như sau :

$\boxed{2}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan^{-1}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\leftarrow}$

được $\widehat{ACO} \approx 63^{\circ}26'5{,}82'' \approx 63^{\circ}26'$.

Tính góc ACB :

$$\widehat{ACB} = 180^{\circ} - \widehat{ACO} \quad \text{(hai góc bù nhau)},$$

$$\widehat{ACB} \approx 116^{\circ}34'.$$

Tính góc BAC :

$$\widehat{BAC} = \widehat{ACO} - \widehat{ABC} \quad \text{(góc ngoài bằng tổng hai góc trong không kề với nó)},$$

$$\widehat{BAC} \approx 63^{\circ}26' - 45^{\circ},$$

$$\widehat{BAC} \approx 18^{\circ}26'.$$

Đáp số : $\widehat{ABC} = 45^{\circ}$; $\widehat{ACB} \approx 116^{\circ}34'$; $\widehat{BAC} \approx 18^{\circ}26'$.

15. a) Hàm số $y = (m - 3)x$ đồng biến khi $m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Hàm số $y = (m - 3)x$ nghịch biến khi $m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

b) Đồ thị của hàm số $y = (m - 3)x$ đi qua điểm $(1\ ;\ 2)$, nên ta có :

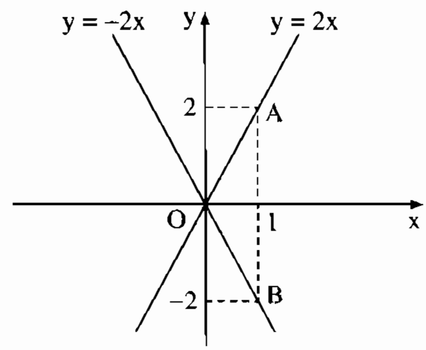
$$2 = (m - 3).1 \Rightarrow m = 5.$$

Trả lời : Khi $m = 5$, đồ thị của hàm số đã cho đi qua điểm $(1\ ;\ 2)$.

c) Tương tự câu b), ta có :

$$-2 = (m - 3).1 \Rightarrow m = 1.$$

Trả lời : Khi $m = 1$, đồ thị của hàm số là đường thẳng đi qua điểm $(1\ ;\ -2)$.



Hình 16

d) (h.16)

– Vẽ hệ trục toạ độ Oxy.

– Dựng các điểm $A(1\ ;\ 2)$, $B(1\ ;\ -2)$ trên mặt phẳng toạ độ.

– Vẽ đường thẳng qua O, A.

– Vẽ đường thẳng qua O, B.

16. a) Hàm số $y = (a - 1)x + a$ có tung độ gốc là a.

Đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Vậy $a = 2$.

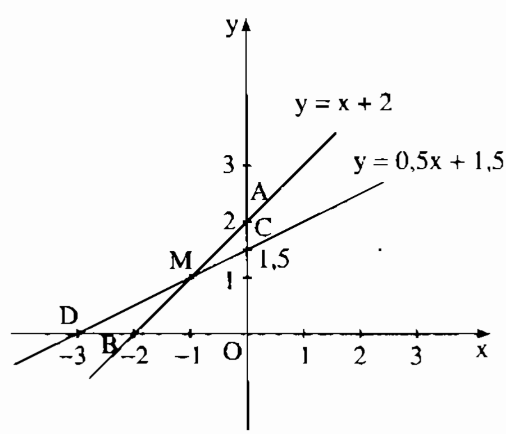
Hàm số trong trường hợp này là $y = x + 2$.

b) Hàm số $y = (a - 1)x + a$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3, do đó tung độ của điểm này bằng 0. Ta có :

$$0 = (a - 1)(-3) + a$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Hàm số trong trường hợp này có dạng : $y = 0{,}5x + 1{,}5$.



Hình 17

c) (h.17)

• Vẽ đồ thị $y = x + 2$. (1)

– Cho $x = 0$, được $y = 2$, ta có $A(0\ ;\ 2)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = x + 2$.

– Cho $y = 0$, được $x = -2$, ta có $B(-2 ; 0)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = x + 2$.

Vẽ đường thẳng qua hai điểm $A(0 ; 2)$, $B(-2 ; 0)$ được đồ thị của hàm số (1).

• Vẽ đồ thị $y = 0{,}5x + 1{,}5$. (2)

– Cho $x = 0$, được $y = 1{,}5$, ta có $C(0;1{,}5)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

– Cho $y = 0$, được $x = -3$, ta có $D(-3 ; 0)$ là điểm nằm trên đường thẳng $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

Vẽ đường thẳng qua hai điểm $C(0 ; 1{,}5)$, $D(-3 ; 0)$ được đồ thị của hàm số (2).

• Tìm toạ độ giao điểm của hai đường thẳng vừa vẽ :

Gọi toạ độ của giao điểm M là $(x_1 ; y_1)$, ta có $M(x_1 ; y_1)$.

– Vì $M(x_1 ; y_1)$ thuộc đường thẳng (1) nên $y_1 = x_1 + 2$. (3)

– Vì $M(x_1 ; y_1)$ thuộc đường thẳng (2) nên $y_1 = 0{,}5x_1 + 1{,}5$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra :

$$x_1 + 2 = 0{,}5x_1 + 1{,}5 \Rightarrow x_1 = -1.$$

Với $x_1 = -1$, tính được $y_1 = 1$.

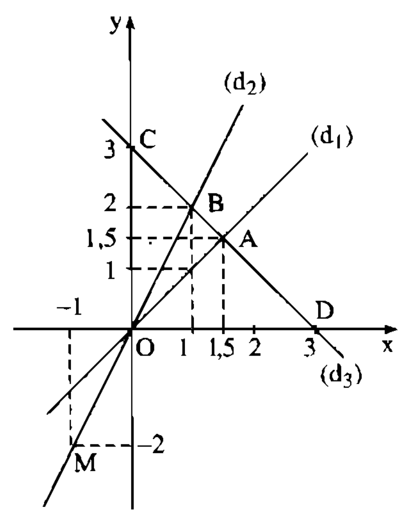
Vậy, toạ độ giao điểm M của hai đường thẳng là $M(-1 ; 1)$.

17. (h.18) a) Vẽ trên cùng hệ trục toạ độ Oxy các hàm số :

$y = x$ (d_1) ;

$y = 2x$ (d_2) ;

$y = -x + 3$ (d_3) .



Hình 18

• Đồ thị của hàm số $y = x$ là đường thẳng (d_1), đó chính là đường phân giác của góc xOy.

• Đồ thị của hàm số $y = 2x$ là đường thẳng (d_2) qua $O(0 ; 0)$ và điểm $M(-1 ; -2)$.

• Đồ thị của hàm số $y = -x + 3$ là đường thẳng (d_3) đi qua hai điểm $C(0 ; 3)$ và $D(3 ; 0)$.

b) Tìm toạ độ của các điểm A, B và tính diện tích tam giác OAB.

• Vì điểm $A(x ; y)$ thuộc (d_1) và (d_3) nên ta có : $x = -x + 3 \Rightarrow x = 1{,}5$. Thay $x = 1{,}5$ vào một trong hai hàm số $y = x$, $y = -x + 3$, tính được $y = 1{,}5$.

Vậy điểm A có toạ độ là $(1{,}5 ; 1{,}5)$.

• Vì điểm $B(x ; y)$ thuộc (d_2) và (d_3) nên ta có : $2x = -x + 3 \Rightarrow x = 1$. Thay $x = 1$ vào một trong hai hàm số $y = 2x$, $y = -x + 3$, tính được $y = 2$.

Vậy điểm B có toạ độ là $(1 ; 2)$.

• Gọi diện tích của các tam giác OAB, OBD, OAD thứ tự là S_{OAB}, S_{OBD}, S_{OAD}, và áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}a.h$, ta có :

$$S_{OAB} = S_{OBD} - S_{OAD} = \frac{1}{2}.3.2 - \frac{1}{2}.3.1{,}5 = \frac{1}{2}.3(2 - 1{,}5) = 0{,}75.$$

Vậy số đo diện tích tam giác OAB bằng 0,75 (đơn vị diện tích).

Chú ý : Nếu đơn vị đo trên các trục Ox, Oy là cm thì diện tích tam giác OAB bằng $0{,}75\ cm^2$.

Bài tập bổ sung

3.1. a) (C) ; b) (D).

3.2. (B).

3.3. • Trước hết tìm giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

– Tìm hoành độ của giao điểm :

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 15.$$

– Tìm tung độ của giao điểm :

$$y = \frac{2}{5}.15 + \frac{1}{2} = 6{,}5.$$

• Tìm k (bằng cách thay toạ độ của giao điểm vào phương trình (d_3)) :

$$6{,}5 = k.15 + 3{,}5 \Leftrightarrow 15k = 3 \Leftrightarrow k = 0{,}2.$$

Trả lời : Khi k = 0,2 thì ba đường thẳng đồng quy tại điểm (15 ; 6,5).

3.4. a) • Gọi phương trình đường thẳng AB là y = ax + b.

Toạ độ các điểm A, B phải thoả mãn phương trình y = ax + b nên ta có :

$$\begin{cases} 7 = a.7 + b \\ 5 = a.2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{2}{5} \\ b = \dfrac{21}{5}. \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng AB là $y = \frac{2}{5}x + \frac{21}{5}$.

• Gọi phương trình của đường thẳng BC là y = a'x + b'.

Tương tự như trên ta có :

$$\begin{cases} 5 = a'.2 + b' \\ 2 = a'.5 + b' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a' = -1 \\ b' = 7. \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng BC là y = −x + 7.

• Gọi phương trình của đường thẳng AC là y = a"x + b".

Tương tự như trên ta có :

$$\begin{cases} 7 = a''.7 + b'' \\ 2 = a''.5 + b'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'' = \dfrac{5}{2} \\ b'' = -\dfrac{21}{2}. \end{cases}$$

Vậy phương trình của đường thẳng AC là $y = \frac{5}{2}x - \frac{21}{2}$.

b) • Áp dụng định lí Py-ta-go vào các tam giác vuông lần lượt có các cạnh huyền là AB, AC, BC và sử dụng máy tính bỏ túi, tính được AB ≈ 5,39cm ; AC ≈ 5,39cm ; BC ≈ 4,24cm.

Do đó chu vi của tam giác ABC là AB + BC + CA ≈ 15,02cm.

• Diện tích tam giác ABC bằng diện tích hình vuông cạnh dài 5cm trừ đi tổng diện tích ba tam giác vuông xung quanh (có các cạnh huyền lần lượt là AB, BC, CA). Tính được : $S_{ABC} = 10,5(cm^2)$.

§4. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

18. a) Đường thẳng $y = ax + 3$ song song với đường thẳng $y = -2x$ suy ra $a = -2$.

b) Khi $x = 1 + \sqrt{2}$ thì hàm số $y = ax + 3$ có giá trị tương ứng là $2 + \sqrt{2}$ vậy ta phải có :

$$2 + \sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2}) + 3 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

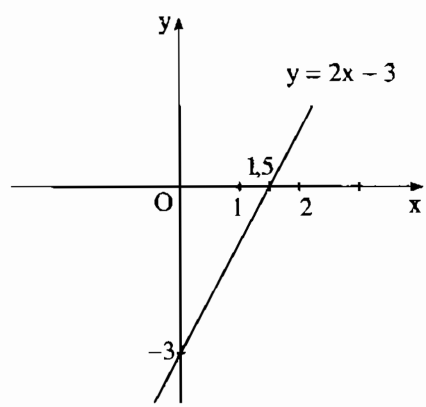
19. (h.19)

a) Với $x = 4$, hàm số $y = 2x + b$ có giá trị là 5. Do đó, ta có :

$$5 = 2.4 + b \Rightarrow b = -3.$$

b) Theo trên, ta có $y = 2x - 3$.

Đồ thị của hàm số $y = 2x - 3$ là đường thẳng cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 ; cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 1,5$.



Hình 19

20. Thay các giá trị của x, y vào (1), ta có :

$$3 + \sqrt{2} = a(1 + \sqrt{2}) + 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} = \frac{(\sqrt{2} + 2)(\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{2}.$$

21. Xác định hàm số $y = ax + b$ thực chất là xác định các hệ số a và b.

• Vì đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 nên $b = 3$.

• Vì đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2 nên tung độ y của giao điểm bằng 0, ta có :

$$0 = a(-2) + 3 \Rightarrow a = 1{,}5.$$

Vậy, ta có hàm số $y = 1{,}5x + 3$.

22. a) Đường thẳng qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Vì đường thẳng qua điểm $A(3\,;\,2)$ nên toạ độ của điểm A phải thoả mãn $y = ax$, có nghĩa là :

$$2 = a.3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}.$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{2}{3}x$.

b) Đường thẳng qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Vì đường thẳng có hệ số a bằng $\sqrt{3}$ nên ta có : $a = \sqrt{3}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \sqrt{3}x$.

c) Đường thẳng qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Đường thẳng $y = ax$ song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên ta có : $a = 3$.

Vậy hàm số cần tìm là : $y = 3x$.

23. Giả sử đường thẳng đi qua A và B có dạng : $y = ax + b$. Khi đó :

– Điểm $A(1\,;\,2)$ thuộc đường thẳng $y = ax + b$ khi và chỉ khi

$$2 = a.1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 2 - a. \qquad (1)$$

– Điểm $B(3\,;\,4)$ thuộc đường thẳng $y = ax + b$ khi và chỉ khi

$$4 = a\,.\,3 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 4 - 3a. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$2 - a = 4 - 3a \quad \Leftrightarrow \quad a = 1.$$

Thay $a = 1$ vào (1 ta có $b = 1$.

Vậy :

a) Hệ số a của đường thẳng đi qua A và B là 1 ;

b) Hàm số $y = x + 1$ có đồ thị là đường thẳng đi qua A và B.

24. a) Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua gốc toạ độ khi $b = 0$, nên đường thẳng $y = (k + 1)x + k$ qua gốc toạ độ khi $k = 0$, khi đó hàm số là $y = x$.

b) Đường thẳng $y = ax + b$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b. Do đó, đường thẳng

$$y = (k + 1)x + k$$

cắt trục tung tại điểm có tung độ là $1 - \sqrt{2}$ khi

$$k = 1 - \sqrt{2}.$$

Hàm số trong trường hợp này là

$$y = (2 - \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2}).$$

c) Đường thẳng

$$y = (k + 1)x + k$$

song song với đường thẳng

$$y = \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 3$$

khi và chỉ khi $k + 1 = \sqrt{3} + 1$ và $k \neq 3$.

Suy ra $k = \sqrt{3}$ và hàm số là $y = (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$.

Bài tập bổ sung

4.1. (D).

4.2. (C).

4.3. (B).

4.4. a) Để biểu thức ở vế phải xác định thì $k \geq 0$.

Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $2\sqrt{3}$ khi :

$$\sqrt{k} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{k} = \sqrt{3} \Rightarrow k = 3.$$

b) Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 khi :

$$\frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{3} - 1}.1 + \sqrt{k} + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k} + 1 + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{k} + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{k} + 1 + \sqrt{3}\sqrt{k} + \sqrt{3}.\sqrt{3} - \sqrt{k} - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{k} + 4 - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{k} = \frac{\sqrt{3} - 4}{\sqrt{3}} < 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy đường thẳng (d) không cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 với mọi giá trị của $k \geq 0$.

Nói cách khác, họ đường thẳng $y = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{3} - 1}x + \sqrt{k} + \sqrt{3}$ không bao giờ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

c) Gọi điểm cố định mà các đường thẳng (d) đều đi qua là $P(x_o, y_o)$.

Ta có :

$$y_o = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{3} - 1}.x_o + \sqrt{k} + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow y_o(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{k} + 1)x_o + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{k} + \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow y_o(\sqrt{3} - 1) = (x_o + \sqrt{3} - 1)\sqrt{k} + x_o + 3 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (x_o + \sqrt{3} - 1)\sqrt{k} + x_o + 3 - \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})y_o = 0. \ (*)$$

Phương trình (*) nghiệm đúng với mọi giá trị không âm của $\sqrt{k}$, do đó ta có :

$$\begin{cases} x_o + \sqrt{3} - 1 = 0 \\ x_o + 3 - \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})\, y_o = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_o = 1 - \sqrt{3} \\ y_o = \sqrt{3} - 1. \end{cases}$$

Vậy, với $k \geq 0$, các đường thẳng (d) đều đi qua điểm cố định $P(1 - \sqrt{3}\,; \sqrt{3} - 1)$.

§5. Hệ số góc của đường thẳng y = ax + b

25. a) Đường thẳng đi qua gốc toạ độ có dạng y = ax.

Vì đường thẳng y = ax qua điểm A(2 ; 1) nên ta có :

$$1 = a.2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Vậy hệ số góc của đường thẳng đi qua gốc toạ độ và điểm $A(2 ; 1)$ là $\frac{1}{2}$.

b) Đường thẳng qua gốc toạ độ có dạng $y = ax$. Vì đường thẳng qua điểm $B(1 ; -2)$ nên toạ độ của điểm B phải thoả mãn :

$$-2 = a.1 \Rightarrow a = -2.$$

Vậy hệ số góc cần tìm là -2.

c) (h.20)

Vẽ đồ thị của hai hàm số

$$y = \frac{1}{2}x \text{ và } y = -2x$$

trên cùng hệ trục toạ độ Oxy.

– Dựng điểm $A(2 ; 1)$ và $B(1 ; -2)$.

– Kẻ đường thẳng qua O, A ta được đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x$.

– Kẻ đường thẳng qua O, B ta được đồ thị của hàm số $y = -2x$.

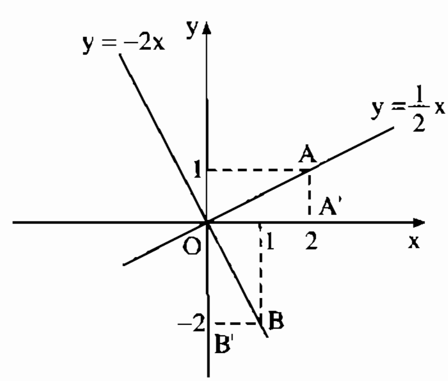
• Gọi A' là hình chiếu của A trên Ox, B' là hình chiếu của B trên Oy. Hai tam giác OBB' và OAA' bằng nhau (vì có hai cặp cạnh góc vuông bằng nhau), nên ta có các góc tương ứng bằng nhau :

$$\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'}$$

mà $\widehat{BOB'} + \widehat{BOA'} = 90^{\circ}$ (vì $Ox \perp Oy$)

nên $\widehat{BOA'} + \widehat{A'OA} = 90^{\circ}$.

Vậy hai đường thẳng đó vuông góc với nhau.



Hình 20

26. (h.21)

Cho hai đường thẳng :

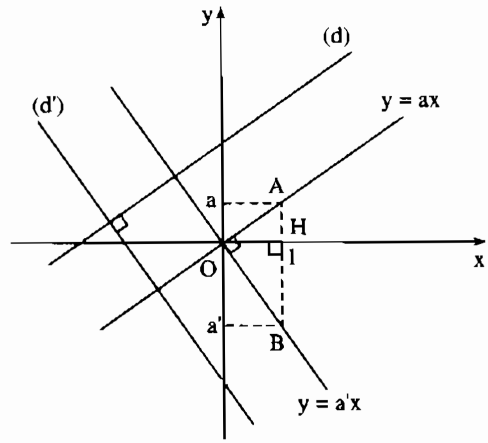
$y = ax + b$; (d)

$y = a'x + b'$. (d')

Ta phải chứng minh

$(d) \perp (d') \Leftrightarrow a.a' = -1$.

Qua O kẻ các đường thẳng song song với (d) và (d'). Các đường thẳng này tương ứng sẽ là $y = ax$ và $y = a'x$.



Hình 21

• Trước hết, ta chứng minh rằng nếu $(d) \perp (d')$ thì $a.a' = -1$. Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a > 0$, suy ra $a' < 0$ (vì các góc tạo bởi đường thẳng $y = ax$ và $y = a'x$ với tia Ox hơn kém nhau 90^o).

Đường thẳng $y = ax$ đi qua điểm $A(1 ; a)$.

Đường thẳng $y = a'x$ đi qua điểm $B(1 ; a')$.

Dễ thấy $AB \perp Ox$ tại điểm H có hoành độ bằng 1.

Vì $(d) \perp (d')$ (theo giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^o \Rightarrow HA.HB = OH^2$ hay $a.|a'| = 1 \Rightarrow -a.a' = 1 \Rightarrow a.a' = -1$ (đpcm).

• Ta chứng minh điều ngược lại : Nếu $a.a' = -1$ thì $(d) \perp (d')$.

Thật vậy, từ $a.a' = -1 \Rightarrow a.|a'| = 1 \Rightarrow HA.HB = OH^2 \Rightarrow \dfrac{HA}{OH} = \dfrac{OH}{HB}$

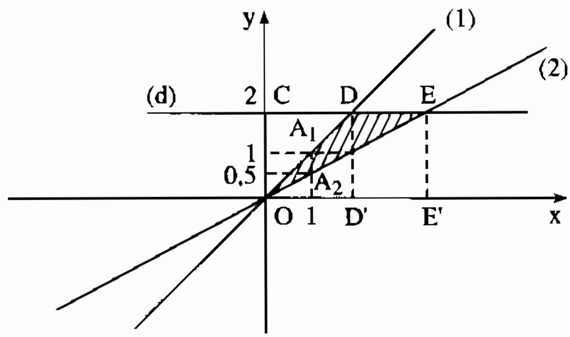
$\Rightarrow \Delta HOA \backsim \Delta HBO \Rightarrow \widehat{AOH} = \widehat{OBH}$

mà $\widehat{OBH} + \widehat{HOB} = 90^o \Rightarrow \widehat{AOH} + \widehat{HOB} = \widehat{AOB} = 90^o$, từ đó suy ra $(d) \perp (d')$.

Vậy ta có đpcm.

27. (h.22)

a) Dựng các điểm $A_1(1\ ;\ 1)$ và $A_2(1\ ;\ 0{,}5)$, lần lượt vẽ đường thẳng qua O và A_1, đường thẳng qua O và A_2 được hai đường thẳng (1) và (2) là đồ thị của các hàm số



Hình 22

$y = x\ ;$ (1)

$y = 0{,}5x.$ (2)

b) Qua điểm C trên trục tung Oy có tung độ bằng 2, vẽ đường thẳng (d) song song với trục Ox. Đường thẳng (d) theo thứ tự cắt các đường thẳng (1) và (2) tại D và E.

– Tính toạ độ của D : Điểm D thuộc đường thẳng (d) nên có tung độ y = 2. Thay giá trị y = 2 vào phương trình (1), tính được x = 2.

Vậy ta có : D(2 ; 2).

– Tính toạ độ của E : Tương tự, điểm E có tung độ y = 2.

Thay giá trị y = 2 vào (2) tính được x = 4.

Ta có điểm E(4 ; 2).

Gọi hình chiếu của D trên Ox là D', của E trên Ox là E'. Ta có :

$$OD' = 2\ ;\ OE' = 4$$

$$OD^2 = OD'^2 + DD'^2 \Rightarrow OD = \sqrt{OD'^2 + DD'^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$OE^2 = OE'^2 + EE'^2 \Rightarrow OE = \sqrt{OE'^2 + EE'^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$$

$$DE = OE' - OD' \Rightarrow DE = 4 - 2 = 2.$$

Chu vi của tam giác ODE bằng $(\sqrt{8} + \sqrt{20} + 2)$ (đơn vị dài).

Diện tích tam giác ODE bằng $\frac{1}{2}DE.OC = \frac{1}{2}.2.2 = 2$ (đơn vị diện tích).

28. (h.23)

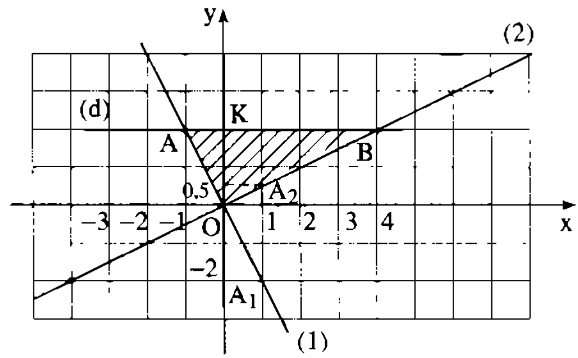
a) – Vẽ đồ thị

$$y = -2x. \qquad (1)$$

Cho $x = 1$, $y = -2.1 = -2$ đường thẳng $y = -2x$ qua gốc toạ độ $O(0\ ;\ 0)$ và điểm $A_1(1\ ;-2)$.

– Vẽ đồ thị

$$y = 0{,}5x. \qquad (2)$$



Hình 23

Cho $x = 1$, $y = 0{,}5.1 = 0{,}5$.

Đường thẳng $y = 0{,}5x$ qua gốc toạ độ $O(0\ ;\ 0)$ và điểm $A_2(1\ ;\ 0{,}5)$.

b) Gọi $A(x\ ;\ 2)$ là giao điểm của đường thẳng (1) và đường thẳng (d), ta có :

$$-2.x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{-2} = -1.$$

Vậy ta có $A(-1\ ;\ 2)$.

Gọi $B(x\ ;\ 2)$ là giao điểm của đường thẳng (2) và đường thẳng (d), ta có :

$$0{,}5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{0{,}5} = 4.$$

Vậy ta có $B(4\ ;\ 2)$.

c) *Ta đã biết : Nếu* $a.a' = -1$ *thì hai đường thẳng* $y = ax$ *và* $y = a'x$ *vuông góc với nhau (Bài tập 26).*

Xét hai đường thẳng $y = -2x$ và $y = 0{,}5x$:

Vì $(-2) . (0{,}5) = -1$ nên hai đường thẳng này vuông góc với nhau.

Bằng phương pháp minh hoạ hình học, xét hai tam giác vuông ở K (OAK và BOK), ta có :

$$\frac{AK}{OK} = \frac{OK}{BK} \left(\text{vì } \frac{1}{2} = \frac{2}{4}\right),$$

suy ra $\Delta OAK \backsim \Delta BOK$.

Từ đó, ta có :

$$\widehat{AOK} = \widehat{OBK}$$

mà $\widehat{OBK} + \widehat{KOB} = 90^o$ nên $\widehat{AOK} + \widehat{KOB} = 90^o$.

29. Ta phải chứng minh họ đường thẳng

$$y = mx + (2m + 1) \qquad (1)$$

luôn đi qua một điểm cố định nào đó.

Giả sử điểm $M(x_0 ; y_0)$ là điểm mà họ đường thẳng (1) luôn luôn đi qua với mọi m, thế thì toạ độ (x_0, y_0) của điểm M phải thoả mãn (1) với mọi m. Nghĩa là với mọi số thực m, ta có :

$$y_0 = mx_0 + (2m + 1) \Leftrightarrow (x_0 + 2)m + (1 - y_0) = 0. \qquad (2)$$

Phương trình (2) nghiệm đúng với mọi giá trị của ẩn m, do đó phải có các hệ số đều bằng 0, nghĩa là :

$$x_0 + 2 = 0 \text{ và } 1 - y_0 = 0.$$

Suy ra $x_0 = -2$ và $y_0 = 1$.

Vậy ta có điểm $M(-2 ; 1)$ là điểm cố định mà họ đường thẳng (1) luôn luôn đi qua với mọi số thực m.

Bài tập bổ sung

5.1. a) (C) ;

b) (D).

5.2. a) (C) ;

b) (D).

5.3. a) (A) ;

b) (C).

5.4. a) Phương trình của đường thẳng AB có dạng

$$y = ax + b.$$

Do đường thẳng đi qua A(4 ; 5) và B(1 ; –1) nên ta có :

$$5 = a.4 + b \qquad (1)$$

$$-1 = a.1 + b \qquad (2)$$

Trừ từng vế của (1) và (2), ta có :

$$6 = 3a \Rightarrow a = 2.$$

Thay a = 2 vào (1) để tìm b, ta có :

$$5 = 2.4 + b \Rightarrow b = -3.$$

Vậy phương trình của đường thẳng AB là

$$y = 2x - 3.$$

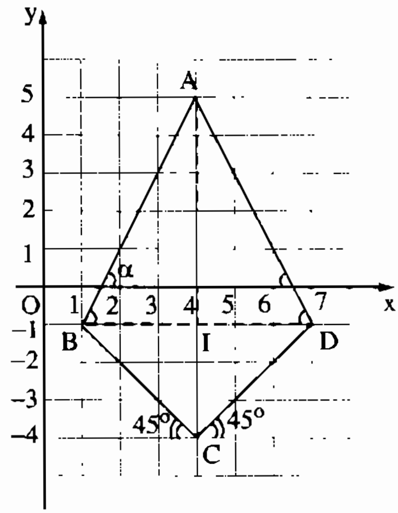
Làm tương tự như trên, ta có :

Phương trình của đường thẳng BC là

$$y = -x.$$

Phương trình của đường thẳng CD là

$$y = x - 8.$$



Hình bs. 3

Phương trình của đường thẳng DA là $y = -2x + 13$.

b) (h.bs. 3) Hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại I.

– Đường thẳng AB có hệ số góc bằng 2, do đó ta có

$tg\alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63^o26'$ (tính trên máy tính bỏ túi).

Suy ra $\widehat{ABD} \approx 63^o26'$.

Tam giác ABD cân, nên cũng có $\widehat{ADB} \approx 63^o26'$.

Từ đó suy ra $\widehat{BAD} = 180^o - 2.\widehat{ABD} \approx 53^o8'$.

Đường thẳng BC có hệ số góc bằng –1 nên BC là phân giác của góc vuông phần tư thứ tư của mặt phẳng toạ độ Oxy.

Đường thẳng CD có hệ số góc bằng 1, do đó CD song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Từ đó suy ra : $\widehat{BCD} = 180^o - 45^o - 45^o = 90^o$.

Và do đó : $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = (360^o - \widehat{BCD} - \widehat{BAD}) : 2 \approx 108^o26'$.

Ôn tập chương II

30. a) Hàm số $y = (m + 6)x - 7$ đồng biến khi hệ số của x dương, nghĩa là :

$$m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -6.$$

Trả lời : Với $m > -6$ thì hàm số $y = (m + 6)x - 7$ đồng biến.

b) Hàm số $y = (-k + 9)x + 100$ nghịch biến khi hệ số của x âm, nghĩa là :

$$9 - k < 0 \Leftrightarrow k > 9.$$

Trả lời : Với $k > 9$ thì hàm số $y = (-k + 9)x + 100$ nghịch biến.

31. Hai đường thẳng $y = 12x + (5 - m)$ và $y = 3x + (3 + m)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung, nghĩa là chúng có cùng tung độ gốc vì thế phải có :

$$3 + m = 5 - m$$

$$\Leftrightarrow 2m = 2 \Leftrightarrow m = 1.$$

Trả lời : Khi $m = 1$, hai hàm số đã cho là $y = 12x + 4$ và $y = 3x + 4$ và đồ thị của chúng cắt nhau tại một điểm trên trục tung có tung độ bằng 4.

32. Hai đường thẳng

$$y = (a - 1)x + 2 \text{ và } y = (3 - a)x + 1$$

có tung độ gốc khác nhau (vì $b = 2$ và $b' = 1$ nên $b \neq b'$).

Do đó, chúng song song với nhau khi và chỉ khi $a - 1 = 3 - a$. Suy ra $a = 2$.

Trả lời : Khi $a = 2$ thì hai đường thẳng đã cho song song với nhau.

33. Hai đường thẳng $y = kx + (m - 2)$ và $y = (5 - k)x + (4 - m)$ trùng nhau khi và chỉ khi :

$$k = 5 - k \quad \text{và} \quad m - 2 = 4 - m.$$

Suy ra $k = 2{,}5$ và $m = 3$.

Trả lời : Khi $k = 2{,}5$ và $m = 3$ thì hai đường thẳng đã cho trùng nhau.

34. a) $y = (1 - 4m)x + m - 2$ (d)

là hàm số bậc nhất và có đồ thị là đường thẳng đi qua gốc toạ độ khi :

$$1 - 4m \neq 0 \qquad (1)$$

và

$$m - 2 = 0. \qquad (2)$$

Từ (1) suy ra $m \neq \frac{1}{4}$; từ (2) suy ra m = 2.

Trả lời : Với m = 2 thì đường thẳng (d) đi qua gốc toạ độ.

b) Nếu $1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$ thì (d) tạo với trục Ox một góc nhọn.

Nếu $1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$ thì (d) tạo với trục Ox một góc tù.

Trả lời : Với $m < \frac{1}{4}$ thì đường thẳng (d) tạo với trục Ox một góc nhọn.

Với $m > \frac{1}{4}$ thì đường thẳng (d) tạo với trục Ox một góc tù..

c) Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{3}{2}$ khi :

$$m - 2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Trả lời : Với $m = 3\frac{1}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{3}{2}$.

d) Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$ khi :

$$0 = (1 - 4m)\frac{1}{2} + m - 2$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} - 2m + m - 2 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Trả lời : $m = -\frac{3}{2}$ thì (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\frac{1}{2}$.

35. a) Đường thẳng $y = (m - 2)x + n$ (d) đi qua hai điểm $A(-1 ; 2)$ và $B(3 ; -4)$. Khi đó toạ độ của các điểm A, B thoả mãn (d), nghĩa là :

$$2 = (m - 2)(-1) + n \qquad (1)$$

và
$$-4 = (m - 2).3 + n. \qquad (2)$$

Rút gọn hai phương trình (1) và (2), ta được

$$-m + n = 0\ ; \qquad (1')$$

$$3m + n = 2. \qquad (2')$$

Từ (1') suy ra n = m. Thay vào (2'), ta có 3m + m = 2 suy ra $m = \frac{1}{2}$.

Trả lời : Khi $m = n = \frac{1}{2}$ thì (d) đi qua hai điểm A và B đã cho.

b) Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$ nên ta có $n = 1 - \sqrt{2}$.

Đường thẳng (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $2 + \sqrt{2}$, nên ta có :

$$0 = (m-2)(2+\sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow m - 2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}} + 2 = \frac{3+3\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{3(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Trả lời : Khi $n = 1 - \sqrt{2}$ và $m = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ thì đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $2 + \sqrt{2}$.

c) Ta có :

$$y = 0{,}5x - 1{,}5. \qquad (d_1)$$

Đường thẳng (d) cắt (d_1) khi $m - 2 \neq 0{,}5$, còn n lấy giá trị tuỳ ý. Suy ra (d) cắt (d_1) khi $m \neq 2{,}5$ còn n tuỳ ý.

Trả lời : (d) cắt (d_1) khi $m \neq 2{,}5$ và n tuỳ ý.

d) Ta có

$$y = -1{,}5x + 0{,}5\ . \qquad (d_2)$$

Đường thẳng

$$y = (m-2)x + n \qquad (d)$$

song song với (d_2) khi :

$$m - 2 = -1,5 \text{ và } n \neq 0,5$$

hay $m = 0,5$ và $n \neq 0,5$.

Trả lời : (d) song song với (d_2) khi $m = 0,5$ và $n \neq 0,5$.

e) Ta có : $y = 2x - 3$. (d_3)

Đường thẳng (d) trùng với (d_3) khi : $m - 2 = 2$ và $n = -3$

hay $m = 4$ và $n = -3$.

Trả lời : Khi $m = 4$ và $n = -3$ thì hai đường thẳng (d) và (d_3) trùng nhau.

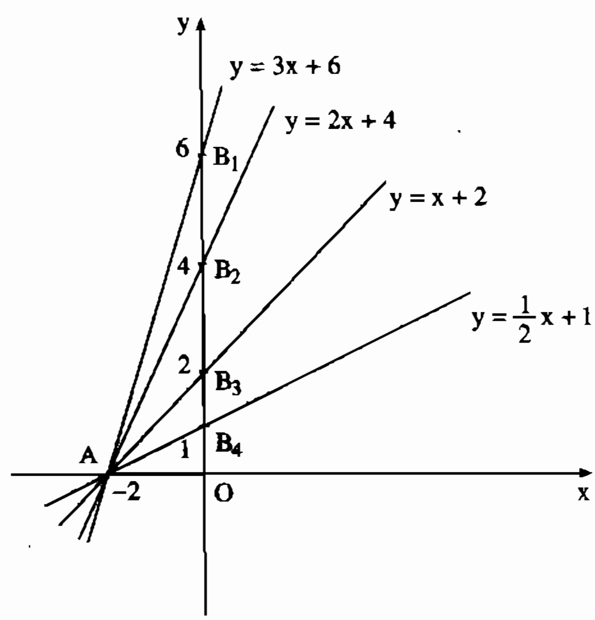
36. (h.24)

a) – Đồ thị của hàm số $y = 3x + 6$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B_1(0 ; 6)$.

– Đồ thị của hàm số $y = 2x + 4$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B_2(0 ; 4)$.

– Đồ thị của hàm số $y = x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B_3(0 ; 2)$.

– Đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x + 1$ là đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2 ; 0)$ và $B_4(0 ; 1)$.



Hình 24

b) Gọi $\widehat{B_1Ax} = \alpha_1$, $\widehat{B_2Ax} = \alpha_2$, $\widehat{B_3Ax} = \alpha_3$, $\widehat{B_4Ax} = \alpha_4$. Dùng máy tính bỏ túi CASIO *fx*-220 tính $tg\alpha_1, tg\alpha_2, tg\alpha_3, tg\alpha_4$ và suy ra các góc tương ứng. Ta có :

$$tg\alpha_1 = 3 \Rightarrow \alpha_1 \approx 71^o33'54,18''.$$

$$tg\alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_2 \approx 63^o26'5,82''.$$

$\mathrm{tg}\alpha_3 = 1 \Rightarrow \alpha_3 \approx 45^o$.

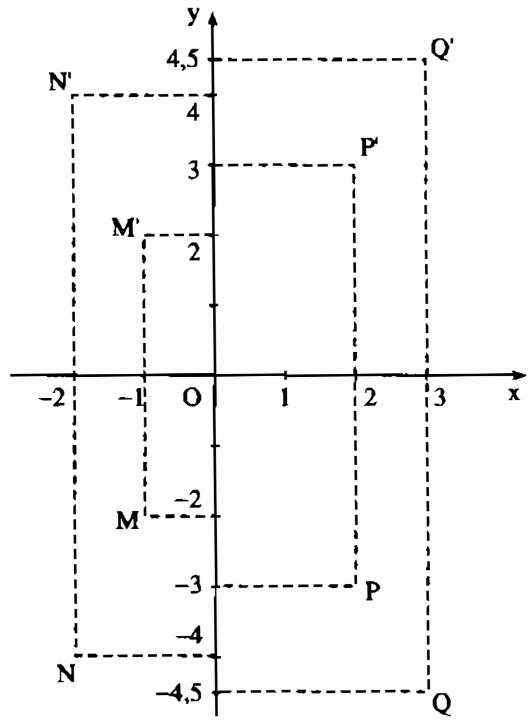
$\mathrm{tg}\alpha_4 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_4 \approx 26^o33'54{,}18''$.

c) Từ sự tăng dần của các hệ số góc : $\frac{1}{2} < 1 < 2 < 3$ và sự tăng dần của các góc α :

$26^o33' < 45^o < 63^o26' < 71^o33'$,

rút ra nhận xét :

Với $a > 0$, khi a càng lớn thì góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và tia Ox càng lớn, và do đó độ dốc của đường thẳng (so với trục nằm ngang Ox) càng lớn.



Hình 25

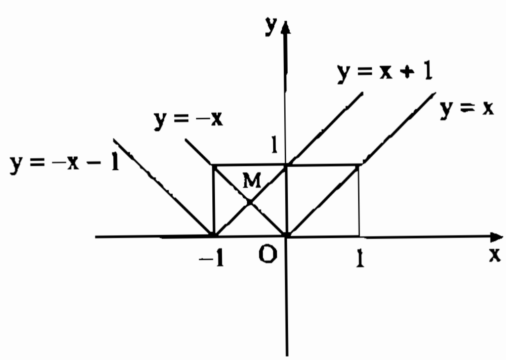
37. a) (h.25) Gọi M', N', P', Q' là các điểm lần lượt đối xứng với các điểm M, N, P, Q qua trục Ox, ta thấy rằng hoành độ của các điểm đối xứng nhau qua trục hoành bằng nhau, còn tung độ của các điểm đó thì đối nhau : M'(–1 ; 2) ; N'(–2 ; 4) ; P'(2 ; 3) ; Q'(3 ; 4,5).

b) (h.26)

• $y = |x| = \begin{cases} x \text{ khi } x \geq 0 \\ -x \text{ khi } x \leq 0. \end{cases}$

Ta vẽ đồ thị $y = x$ với $x \geq 0$.

Vẽ đồ thị $y = -x$ với $x \leq 0$.



Hình 26

• $y = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{với } x+1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1 \\ -(x+1) & \text{với } x+1 \le 0 \Leftrightarrow x \le -1. \end{cases}$

Ta vẽ đồ thị $y = x + 1$ với $x \ge -1$.

Vẽ đồ thị $y = -x - 1$ với $x \le -1$.

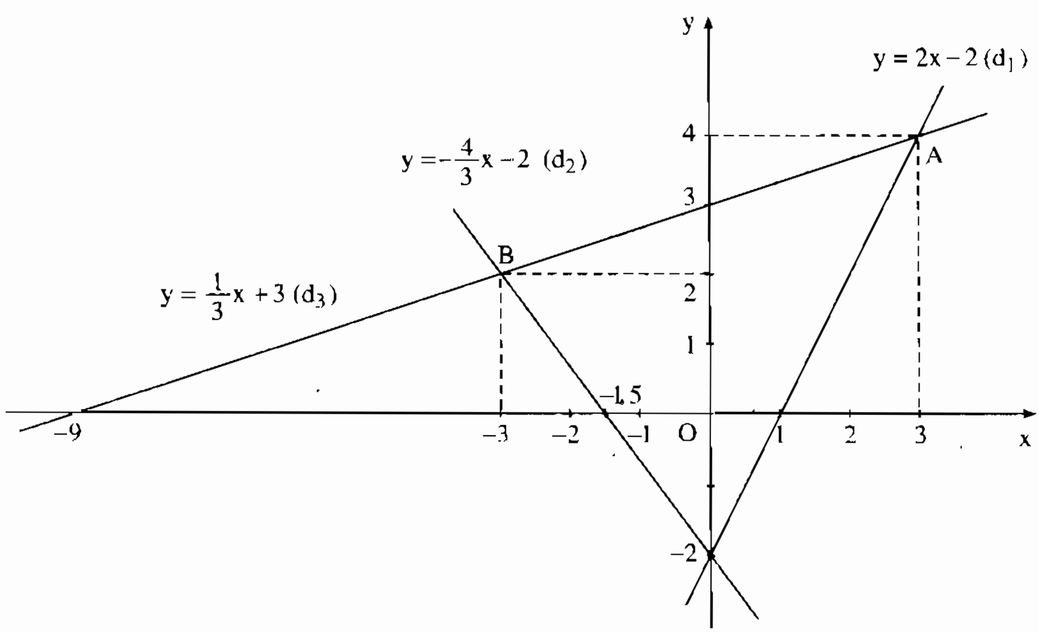
c) (h.26). Đồ thị $y = -x$ cắt đồ thị $y = x + 1$ tại điểm $M(x_0 ; y_0)$. Vì M thuộc cả hai đồ thị nên toạ độ của M phải thoả mãn các hàm số, nghĩa là :

$$y_0 = -x_0 = x_0 + 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right).$$

Đồ thị $y = |x|$ và đồ thị $y = |x + 1|$ chỉ cắt nhau tại một điểm duy nhất $M\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Suy ra phương trình $|x| = |x + 1|$ chỉ có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{2}$.

38. (h.27)



Hình 27

a) Đường thẳng (d_1) : $y = 2x - 2$ đi qua hai điểm (0 ; –2) và (1 ; 0).

Đường thẳng (d_2) : $y = -\frac{4}{3}x - 2$ đi qua hai điểm (0 ; –2) và (–1,5 ; 0).

Đường thẳng (d_3) : $y = \frac{1}{3}x + 3$ đi qua hai điểm (0 ; 3) và (–9 ; 0).

b) Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1) và (d_2) thứ tự tại A, B.

- Tìm toạ độ của $A(x_1 ; y_1)$.

Vì điểm A thuộc cả hai đường thẳng (d_1) và (d_3) nên ta có :

$$y_1 = 2x_1 - 2 = \frac{1}{3}x_1 + 3 \Rightarrow x_1 = 3 ; y_1 = 4 \Rightarrow A(3 ; 4).$$

- Tìm toạ độ của $B(x_2 ; y_2)$.

Vì điểm B thuộc cả hai đường thẳng (d_2) và (d_3) nên ta có :

$$y_2 = -\frac{4}{3}x_2 - 2 = \frac{1}{3}x_2 + 3 \Rightarrow x_2 = -3 ; y_2 = 2 \Rightarrow B(-3 ; 2).$$

c) Sử dụng kết quả bài 13,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2}.$$

$AB = \sqrt{40} \approx 6,32$ (đơn vị dài trên trục toạ độ).