

CHỦ ĐỀ 8. VẼ HÌNH PHỤ ĐỀ GIẢI TOÁN TRONG CHƯƠNG TỨ GIÁC

A. Kiến thức cần nhớ

Nhiều bài toán trong chương tứ giác cần phải vẽ hình phụ thì mới giải được. Vẽ hình phụ để tạo thêm sự liên kết giữa giả thiết và kết luận từ đó dễ tìm ra cách giải. Một số cách vẽ hình phụ thường dùng trong chương này là:

1. Nếu đề bài có hình thang thì từ một đỉnh có thể vẽ thêm một đường thẳng:

- song song với một cạnh bên;
- song song với một đường chéo;
- vuông góc với đáy.

Khi vẽ như vậy, một đoạn thẳng đã được dời song song với chính nó từ vị trí này đến một vị trí khác thuận lợi hơn trong việc liên kết với các yếu tố khác, từ đó giải được bài toán.

2. Vẽ thêm hình bình hành

Để chứng minh hai đường thẳng song song, chứng minh quan hệ về độ dài, chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng, tính số đo góc,...

3. Vẽ thêm trung điểm của đoạn thẳng

+ Để vận dụng định lý đường trung bình của tam giác, của hình thang, định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông.

+ Cũng có thể vẽ thêm đường thẳng song song để tạo ra đường trung bình của tam giác, hình thang.

+ Dùng định lý đường trung bình có thể chứng minh các quan hệ song song, thẳng hàng, các quan hệ về độ dài,...

4. Vẽ điểm đối xứng với một điểm cho trước qua một đường thẳng hoặc qua một điểm.

Nhờ cách vẽ này ta cũng có thể dời một đoạn thẳng, một góc từ vị trí này sang vị trí khác thuận lợi cho việc chứng minh.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.

I. MỘT SỐ VÍ DỤ.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng trong một hình thang tổng hai cạnh bên lớn hơn hiệu hai cạnh đáy.

Giải

* *Tìm cách giải*

Xét hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), ta phải chứng minh $AD + BC > CD - AB$.

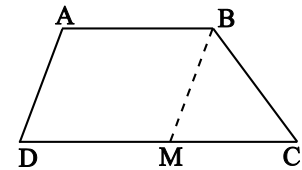
Điều phải chứng minh rất gần với bất đẳng thức tam giác. Điều này gợi ý cho ta vẽ hình phụ để có $AD + BC$ là tổng các độ dài hai cạnh của một tam giác.

** Trình bày lời giải*

Vẽ $BM \parallel AD$ ($M \in CD$) ta được $DM = AB$ và $BM = AD$.

Xét $\triangle BMC$ có $BM + BC > MC \Rightarrow AD + BC > DC - DM$

hay $AD + BC > CD - AB$ (đpcm).



Trường hợp hai cạnh bên song song thì hai đáy bằng nhau, bài toán hiển nhiên đúng.

Ví dụ 2. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), hai đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AB = 5\text{cm}$, $CD = 12\text{cm}$ và $AC = 15\text{cm}$. Tính độ dài BD.

Giải

** Tìm cách giải*

Ba đoạn thẳng AB, AC và CD đã biết độ dài nhưng ba đoạn thẳng này không phải ba cạnh của một tam giác nên không tiện sử dụng. Ta sẽ dời song song đường chéo AC đến vị trí BE thì tam giác BDE vuông tại B biết độ dài hai cạnh, dễ dàng tính được độ dài cạnh thứ ba BD.

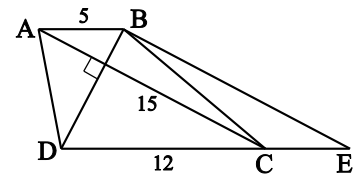
** Trình bày lời giải*

Vẽ $BE \parallel AC$ ($E \in \text{tia } DC$).

Khi đó $BE = AC = 15\text{cm}$; $CE = AB = 5\text{cm}$.

Ta có $BE \perp BD$ (vì $AC \perp BD$).

Xét $\triangle BDE$ vuông tại B có $BD = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8(\text{cm})$.



Ví dụ 3. Hình thang ABCD có $A = D = 90^\circ$. Biết $AB = 3\text{cm}$; $BC = 2\sqrt{2}\text{cm}$ và $CD = 5\text{cm}$. Chứng minh rằng $B = 3C$.

Giải

** Tìm cách giải*

Nếu dời song song đoạn thẳng AD tới vị trí BH thì được $\triangle BHC$ vuông tại H. Ta dễ dàng tính được $HC = HB$, do đó tính được góc C, góc B.

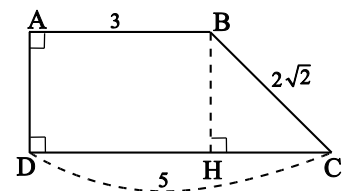
** Trình bày lời giải*

Vẽ $BH \perp CD$ ($H \in CD$) thì $BH \parallel AD$, do đó $DH = AB = 3\text{cm}$

suy ra $HC = 5 - 3 = 2(\text{cm})$.

Xét $\triangle BHC$ vuông tại H, áp dụng định lí Py-ta-go ta có

$$HB = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2(\text{cm}).$$



Vậy $\triangle HBC$ vuông cân $\Rightarrow C = 45^\circ$ do đó $\angle ABC = 135^\circ$ suy ra $\angle ABC = 3C$.

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O . Cho biết $\angle AOB = 60^\circ$ và $AC = BD = a$. Chứng minh rằng $AB + CD \geq a$.

Giải

* *Tìm cách giải*

Từ điều phải chứng minh ta thấy cần vận dụng bất đẳng thức tam giác. Do đó cần vẽ hình phụ để tạo ra một tam giác có hai cạnh lần lượt bằng AB , CD và cạnh thứ ba bằng đường chéo AC .

Nếu vẽ thêm hình bình hành $ABEC$ thì các yêu cầu trên được thỏa mãn.

* *Trình bày lời giải*

Vẽ hình bình hành $ABEC$, ta được $BE \parallel AC$ suy ra

$$\angle DBE = \angle AOB = 60^\circ; BE = AC = a; AB = CE.$$

Tam giác BDE là tam giác đều $\Rightarrow DE = a$.

Xét ba điểm C, D, E ta có $CE + CD \geq DE$

hay $AB + CD \geq a$ (dấu "=" xảy ra khi điểm C nằm giữa D và E hay $DC \parallel AB$. Khi đó tứ giác $ABCD$ là hình thang cân).

Ví dụ 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Vẽ $AH \perp BD$. Gọi K và M lần lượt là trung điểm của BH và CD . Tính số đo của góc AKM .

Giải

* *Tìm cách giải*

Bài toán có cho hai trung điểm K và M nhưng chưa thể vận dụng trực tiếp được.

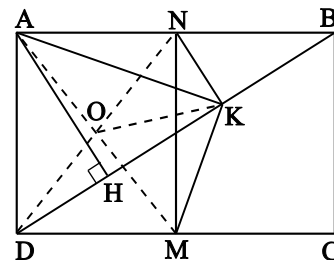
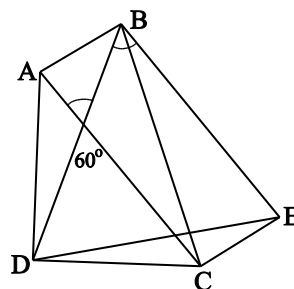
Ta vẽ thêm trung điểm N của AB để vận dụng định lý đường trung bình của hình chữ nhật, đường trung bình của tam giác.

* *Trình bày lời giải*

Gọi N là trung điểm của AB thì MN là đường trung bình của hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow MN \parallel AD$.

Mặt khác, $AN \parallel DM$ nên tứ giác $ANMD$ là hình bình hành. Hình bình hành này có $\angle D = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật. Suy ra hai đường chéo AM và DN cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường: $OA = OM = ON = OD$.

Xét $\triangle ABH$ có NK là đường trung bình nên $NK \parallel AH \Rightarrow NK \perp BD$ (vì $AH \perp BD$).



Do đó ΔKDN vuông tại K.

Xét ΔKDN có KO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $KO = \frac{1}{2}DN$

$$\Rightarrow KO = \frac{1}{2}AM = OA = OM.$$

Vậy ΔKAM vuông tại K $\Rightarrow AKM = 90^\circ$.

Ví dụ 6. Cho hai điểm A và B thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm trên d một điểm M sao cho hai tia MA, MB tạo với đường thẳng d hai góc nhọn bằng nhau.

Giải

** Tìm cách giải*

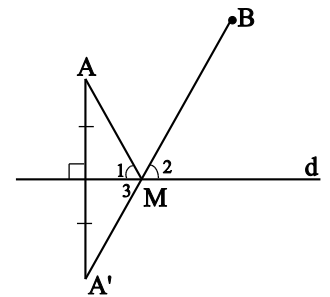
Giả sử đã tìm được điểm $M \in d$ sao cho $M_1 = M_2$. Vẽ điểm A' đối xứng với A qua d thì $M_1 = M_3$, suy ra $M_2 = M_3$ (cùng bằng M_1). Do đó ba điểm A', M, B thẳng hàng.

** Trình bày lời giải*

- Vẽ điểm A' đối xứng với A qua d;
- Vẽ đoạn thẳng A'B cắt đường thẳng d tại M;
- Vẽ đoạn thẳng MA ta được $M_1 = M_2$.

Thật vậy, do A' đối xứng với A qua d nên $M_1 = M_3$.

Mặt khác, $M_2 = M_3$ (đối đỉnh) nên $M_1 = M_2$.



II. LUYỆN TẬP

• Vẽ thêm đường thẳng song song

8.1. Chứng minh rằng nếu một hình thang có hai cạnh bên bằng nhau thì đó là hình thang cân hoặc hình bình hành.

8.2. Cho hình thang hai đáy không bằng nhau. Chứng minh rằng tổng hai góc kề đáy lớn nhỏ hơn tổng hai góc kề đáy nhỏ.

8.3. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), $BD \perp CD$. Cho biết $AB + CD = BD = a$. Tính độ dài AC.

8.4. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$), đường cao bằng h và tổng hai đáy bằng 2h. Tính góc xen giữa hai đường chéo.

8.5. Chứng minh rằng trong một hình thang thì tổng các bình phương của hai đường chéo bằng tổng các bình phương của hai cạnh bên cộng với hai lần tích của hai cạnh đáy.

• Vẽ thêm hình bình hành

8.6. Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác này các tam giác đều ABD, BCE, CAF. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác DEF trùng với trọng tâm của tam giác ABC.

8.7. Cho tam giác đều ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M. Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với AB cắt AB tại H, cắt đường thẳng vuông góc với AC vẽ từ C tại điểm K. Gọi N là trung điểm của BM. Chứng minh rằng tam giác ANK có số đo các góc tỉ lệ với 1, 2, 3.

8.8. Dựng tứ giác ABCD sao cho $AB = 2,5\text{cm}$; $BC = 3\text{cm}$; $CD = 4,5\text{cm}$; $DA = 3,5\text{cm}$ và góc nhọn giữa hai đường thẳng AD, BC là 40° .

• **Vẽ thêm trung điểm - Tạo đường trung bình**

8.9. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), $A = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{2}CD$. Vẽ $DH \perp AC$. Gọi K là trung điểm của HC. Tính số đo của góc BKD.

8.10. Cho hình vuông ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và CD. Chứng minh rằng tam giác MNB vuông cân.

8.11. Cho tam giác ABC cân tại A, đường phân giác BM. Từ M vẽ một đường thẳng vuông góc với BM cắt đường thẳng BC tại D. Chứng minh rằng $BD = 2CM$.

8.12. Cho tứ giác ABCD, $CAD = CBD = 90^\circ$. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của C và D trên đường thẳng AB. Chứng minh rằng $AF = BE$.

8.13. Cho đường thẳng xy. Vẽ tam giác ABC trên một nửa mặt phẳng bờ xy. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Từ A, B, C và G vẽ các đường thẳng song song với nhau cắt xy lần lượt tại A', B', C' và G'. Chứng minh rằng $AA' + BB' + CC' = 3GG'$.

8.14. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Trên các cạnh AB và AC lần lượt lấy các điểm M và D sao cho $AM = AD$. Từ A và M vẽ các đường thẳng vuông góc với BD chúng cắt BC lần lượt tại E và F. Chứng minh rằng $AE = \frac{BD + MF}{2}$.

8.15. Cho tứ giác ABCD. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng:

- a) Các đường thẳng AA', BB', CC', DD' cùng đi qua một điểm;
- b) Điểm này chia AA', BB', CC', DD' theo cùng một tỉ số.

8.16. Cho tam giác ABC và một điểm O nằm trong tam giác sao cho $ABO = ACO$. Vẽ $OH \perp AB$, $OK \perp AC$. Chứng minh rằng đường trung trực của HK đi qua một điểm cố định.

• **Vẽ thêm hình đối xứng**

8.17. Cho góc xOy có số đo bằng 60° và một điểm A ở trong góc đó sao cho A cách Ox là 2cm và cách Oy là 1cm .

a) Tìm một điểm B trên Ox và một điểm C trên Oy sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất;

b) Tính độ dài nhỏ nhất của chu vi tam giác ABC .

8.18. Dựng tam giác biết một đỉnh, trọng tâm và hai đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại.