

PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 MỘT ẨN

1. Định nghĩa:

Phương trình bậc hai một ẩn (phương trình bậc hai) là phương trình có dạng $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó x là ẩn; a, b, c là những số cho trước gọi là các hệ số và $a \neq 0$

2. Công thức nghiệm:

Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$:

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

3. Công thức nghiệm thu gọn:

Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ và $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$:

- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

4. Áp dụng:

Ví dụ 1: Giải phương trình

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$(a = 3; b = -7; c = 2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 > 0$$

Vậy: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7 + 5}{6} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7 - 5}{6} = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $5x^2 + 4x - 1 = 0$

$$a = 5; b' = 2; c = -1$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 2^2 - 5 \cdot (-1) = 9$$

$$\sqrt{\Delta'} = 3$$

Nghiệm của phương trình:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 + 3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 - 3}{5} = -1$$

5. Luyện tập:

Bài 1: Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai để giải các phương trình sau:

a) $3x^2 - 5x + 1 = 0$;

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$;

c) $7x^2 + x + 9 = 0$;

d) $2x^2 + 5x - 7 = 0$;

e) $y^2 - 8y + 16 = 0$;

f) $16z^2 + 24z + 9 = 0$.

Bài 2: Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình:

a) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;

b) $13852x^2 - 14x + 1 = 0$;

c) $5x^2 - 6x + 1 = 0$;

d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}.x + 4 = 0$.

HỆ THỨC VIET VÀ ỨNG DỤNG

1. Hệ thức Vi-ét

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ thì:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

2. Áp dụng

Tính nhẩm nghiệm

+) Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ có $a+b+c=0$ thì phương trình có một nghiệm $x_1=1$, còn nghiệm kia là $x_2=\frac{c}{a}$

+) Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ có $a-b+c=0$ thì phương trình có nghiệm là $x_1=-1$, còn nghiệm kia là $x_2=-\frac{c}{a}$

3. Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P và $S^2-4P \geq 0$ thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình: $x^2-Sx+P=0$

4. Ví dụ: a) Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm(nếu có) của phương trình: $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Giải:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 > 0$ suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{5}{3}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$$

b) Tính nhẩm nghiệm của phương trình : $x^2+3x - 4 = 0$

Giải:

ta có $a+b+c = 1+3 + (-4) = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{c}{a} = -4$$

5. Bài tập:

Bài 1: Đối với mỗi phương trình sau, kí hiệu x_1 và x_2 là hai nghiệm (nếu có). Không giải phương trình, hãy điền vào những chỗ trống (...):

a) $2x^2 - 17x + 1 = 0$;

$$\Delta = \dots; x_1 + x_2 = \dots; x_1 \cdot x_2 = \dots;$$

b) $5x^2 - x - 35 = 0$;

$$\Delta = \dots; x_1 + x_2 = \dots; x_1 \cdot x_2 = \dots;$$

c) $8x^2 - x + 1 = 0$;

$$\Delta = \dots; x_1 + x_2 = \dots; x_1 \cdot x_2 = \dots;$$

d) $25x^2 + 10x + 1 = 0$;

$$\Delta = \dots; x_1 + x_2 = \dots; x_1 \cdot x_2 = \dots;$$

Bài 2: Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau:

a) $35x^2 - 37x + 2 = 0$;

b) $7x^2 + 500x - 507 = 0$;

c) $x^2 - 49x - 50 = 0$;

d) $4321x^2 + 21x - 4300 = 0$.

Bài 3: Dùng hệ thức Vi-et để tính nhẩm các nghiệm của phương trình.

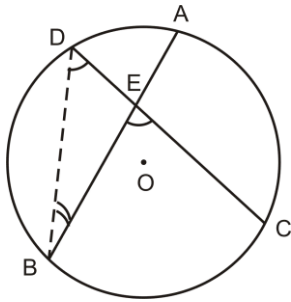
a) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

b) $x^2 + 7x + 12 = 0$.

LUYỆN TẬP GÓC CÓ ĐỈNH BÊN TRONG VÀ BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN

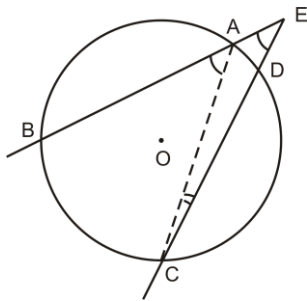
Nhắc lại kiến thức:

1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn



$$\angle BEC = \frac{1}{2} \text{sđ}(\widehat{BC} + \widehat{AD})$$

2. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn



$$\angle BEC = \frac{1}{2} \text{sđ}(\widehat{BC} - \widehat{AD})$$

Bài 1: Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một điểm S nằm bên trong đường tròn.

Chứng minh:

$$\widehat{A} + \widehat{BSM} = 2\widehat{CMN}$$

Bài 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn. P, Q, R theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung bị chắn BC, CA, AB bởi các góc A, B, C.

a) Chứng minh $AP \perp QR$.

b) AP cắt CR tại I. Chứng minh tam giác CPI là tam giác cân.

Bài 3: Cho đường tròn (O) và hai dây cung song song AB, CD (A và C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ BD); AD cắt BC tại I. Chứng minh:

$$\widehat{AOC} = \widehat{AIC}$$

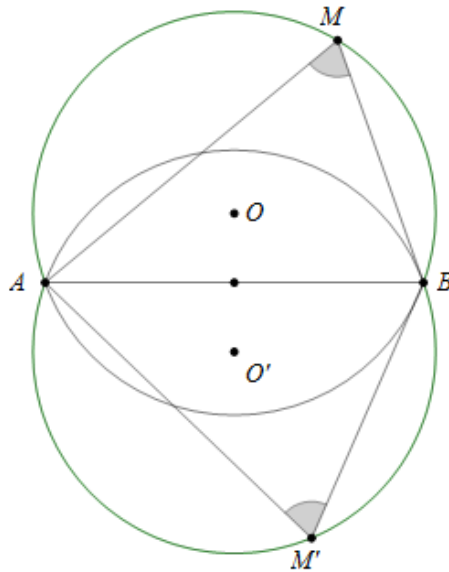
CUNG CHỨA GÓC

LÝ THUYẾT CUNG CHỨA GÓC

a. Quỹ tích cung chứa góc

Với đoạn thẳng AB và góc $\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ cho trước thì quỹ tích các điểm M thỏa mãn góc $AMB = \alpha$ là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn AB .

Chú ý : Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB . Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.



Đặc biệt : Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .

b. Cách vẽ cung chứa góc

Bài toán: Cho đoạn thẳng AB và góc $\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn góc $AMB = \alpha$.

- Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB ;
- Vẽ tia Ax tạo với AB một góc α ;
- Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax . Gọi O là giao điểm của Ay với d .
- Vẽ cung AmB , tâm O , bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax . Cung AmB được vẽ như trên là một cung chứa góc α .

c. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thỏa mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần :

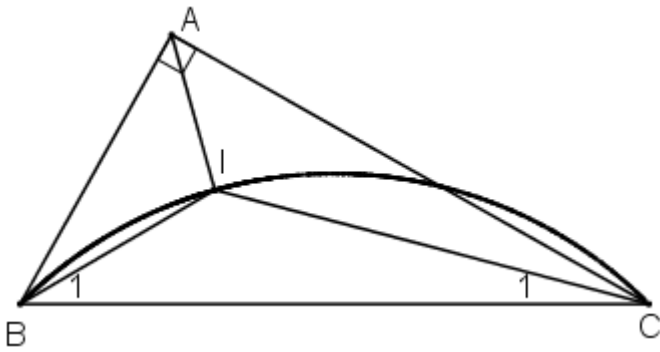
Phần thuận : Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H .

Phần đảo : Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T .

Từ đó đi đến kết luận quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H .

(Thông thường với bài toán: “Tìm quỹ tích ...” ta nên dự đoán hình H trước khi chứng minh)

VÍ DỤ: Cho tam giác ABC vuông ở A , có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm I khi A thay đổi.



* Dự đoán : Quỹ tích điểm I là cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC.

* Chứng minh :

Phần thuận : Chứng minh mọi điểm I thỏa mãn điều kiện trên đều thuộc cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC.

$$BI \text{ là phân giác } \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{B_1} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{B}$$

$$CI \text{ là phân giác } \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{C_1} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{C}$$

$$\begin{aligned} \Delta BIC \text{ có } \widehat{BIC} &= 180^\circ - (\widehat{B_1} + \widehat{C_1}) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot (\widehat{B} + \widehat{C}). \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \Delta ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 135^\circ$$

$\Rightarrow$ I thuộc cung chứa góc 135° dựng trên đoạn thẳng BC.

Phần đảo: Chứng minh mọi điểm I thuộc cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC, đều có tam giác ABC thỏa mãn điều kiện.

+ Lấy I trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC

+ Kẻ tia Bx sao cho BI là phân giác của

+ Kẻ tia Cy sao cho CI là phân giác của

+ Bx cắt Cy tại A.

Khi đó I là giao điểm của hai đường phân giác trong tam giác ABC

$$\begin{aligned}
\widehat{BAC} &= 180^0 - (\widehat{B} + \widehat{C}) \\
&= 180^0 - 2.(\widehat{IBC} + \widehat{ICB}) \\
&= 180^0 - 2.(180^0 - \widehat{BIC}) \\
&= 180^0 - 2.(180^0 - 135^0) \\
&= 90^0 .
\end{aligned}$$

Vậy ΔABC vuông tại A thỏa mãn đề bài.

Kết luận : Quỹ tích điểm I là toàn bộ cung chứa góc 135° dựng trên đoạn BC (khác B và C).

Bài tập: Cho các hình thoi ABCD có cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo của các hình thoi đó.

Bài tập:

Bài 1: Dựng một cung chứa góc 55° trên đoạn thẳng $AB = 3\text{cm}$.

Bài 2: Cho hai điểm A, B cố định. Từ A vẽ các tiếp tuyến với các đường tròn tâm B có bán kính không lớn hơn AB. Tìm quỹ tích các tiếp điểm.

Bài 3: Dựng tam giác ABC, biết $BC = 6\text{cm}$, góc $A = 40^\circ$ và đường cao $AH = 4\text{cm}$.