

MỤC LỤC

A. MỞ ĐẦU

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

II. LỊCH SỬ CỦA GIẢI PHÁP

III. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU CỦA ĐỀ TÀI

1. Kiến thức

2. Kỹ năng

3. Thái độ

IV. NHIỆM VỤ VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

1. Nhiệm vụ

2. Phương pháp nghiên cứu

V. PHẠM VI NGHIÊN CỨU

B. NỘI DUNG

I. CƠ SỞ VIẾT GIẢI PHÁP

1. Kiến thức

2. Kỹ năng

II. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ

III. PHẦN BÀI TẬP

IV. HIỆU QUẢ

C. KẾT LUẬN

I. BIỆN PHÁP TRIỂN KHAI

II. HƯỚNG PHÁT TRIỂN CỦA ĐỀ TÀI

D. TÀI LIỆU THAM KHẢO

A. MỞ ĐẦU.

I. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI.

Thi học sinh giỏi cấp huyện, cấp thành phố và thi vào lớp chuyên toán lớp 10 ở Tp.Hồ Chí Minh luôn có bài toán liên quan đến giá trị của biểu thức.

Học sinh cần có đầu tư lớn về nguồn bài tập còn phải có cách thức học sao cho hiệu quả. Mà muốn làm được điều này tức là học sinh phải có tính độc lập làm việc và kết hợp với nhóm. Từ đó học sinh có hướng giải quyết nhanh gọn.

Việc hỗ trợ cho học sinh làm dạng toán này là cần thiết, qua đó giúp học sinh học hỏi nhiều kinh nghiệm: các kỹ thuật biến đổi. Bài tập tuy khó nhưng trình bày lại rất đơn giản và hiệu quả.

Việc tìm ra một “lớp” các bài tập cùng dạng (Bài tập liên quan đến giá trị của biểu thức) đòi hỏi mất rất nhiều thời gian truy cập (mặc dù có tìm trên mạng internet hoặc đọc sách đi nữa).

Do đó để tạo thuận lợi cho giáo viên và học sinh có nguồn bài tập cùng dạng (Bài tập liên quan đến giá trị của biểu thức) thực hành tôi đã làm hai việc như sau:

1/ Chọn bài tập qua các kỳ thi học sinh giỏi của:

- . Các quận huyện của thành phố Hồ Chí Minh.
- . Đề thi học sinh giỏi cấp thành phố (TP.HCM).
- . Đề thi của các tỉnh thành khác.

2/ Viết một số bài tập.

Hy vọng giải pháp này giúp cho giáo viên và học sinh:

- . Không mất thời gian nhiều cho việc tìm kiếm bài tập.
- . Học hỏi được nhiều kỹ thuật giải.
- . Giáo viên có nhiều cơ hội để phát triển các bài tập hay.
- . Học sinh có nhiều cơ hội đoạt giải qua các kỳ thi.

II. LỊCH SỬ CỦA GIẢI PHÁP.

Từ năm học 2012-2013 đến nay, đề thi học sinh giỏi cấp thành phố (TP.Hồ Chí Minh) “Bài số 1” có sự liên quan đến giá trị của biểu thức. Đây là bài toán hay mà học sinh cần nắm nhiều kỹ thuật giải. Cách trình bày bài giải dạng này thường ngắn gọn.

Đề thi học sinh giỏi lớp 8 của huyện Hóc Môn cũng có bài 1 tương tự như bài 1 của đề thi học sinh giỏi cấp thành phố.

Đề thi các học kỳ và kiểm tra đồng loạt (45 phút) của huyện Hóc Môn cũng xuất hiện bài kiểm tra có sự liên quan đến giá trị của biểu thức.

Nhằm giúp cho giáo viên có tài liệu ôn thi cho học giỏi, các kỳ kiểm tra của lớp 8 và lớp 9. Sáng kiến: “Bài tập liên quan đến giá trị của biểu thức”, đã được viết ra. Giải pháp này gồm có 82 bài tập, phần nhiều là các bài thi học sinh giỏi các cấp ở TP. Hồ Chí Minh và các tỉnh thành khác.

III. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU CỦA ĐỀ TÀI.

1. Kiến thức.

Các quy tắc:

- . Nhân đơn thức với đa thức, nhân đa thức với đa thức.
- . Chia đơn thức cho đơn thức.
- . Chia đa thức cho đơn thức.
- . Chia đa thức cho đa thức.

Học sinh hiểu rõ các hằng đẳng thức:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \quad \text{Từ đó cho: } A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$$

$$A^2 + B^2 = (A - B)^2 + 2AB$$

$$(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 \quad \text{Từ đó cho: } A^3 + B^3 = (A + B)^3 - 3AB(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)^3 + 3AB(A - B)$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA$$

$$\sqrt{A^2} = |A|$$

$$\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0 \text{ và } B \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0 \text{ và } B > 0)$$

2. Kỹ năng.

1/ Dùng hằng đẳng thức, nhân đơn thức với đa thức, nhân đa thức với đa thức để biến đổi các biểu thức đã cho thành quen thuộc.

2/ Thành thạo các phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử.

3/ Ta có: $A^2 + B^2 + C^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ và } B = 0 \text{ và } C = 0$

4/ Cho $A = m$. Tính giá trị của B .

Nếu ta chứng minh được: $A - B = 0$ ta suy ra được $B = m$

5/ Hiểu rõ hai bổ đề:

Bổ đề 1: Cho $A^2 + B^2 + C^2 = AB + BC + CA$

Ta chứng minh được: $A = B = C$

Bổ đề 2: Cho $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$

Ta chứng minh được: $A + B + C = 0$ hoặc $A = B = C$

Với hai bổ đề này ta có thể định hướng nhanh: Biến đổi các biểu thức đã cho thành các biểu thức có thể ứng dụng của hai bổ đề trên.

3. Thái độ.

Với giáo viên: . Chuẩn bị bài dạy nhanh hơn và tốt hơn.

. Thoải mái trong công việc.

Với học sinh: . Có thể tự học qua tài liệu này qua đó các em giúp

yêu thích và cuốn hút vào môn toán hơn.

. Làm toán có vẻ chuyên nghiệp và tự tin hơn.

. Tôn trọng các kiến thức đã học và sắp xếp chúng ngăn nắp.

IV. NHIỆM VỤ VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU.

1. Nhiệm vụ.

Với giáo viên:

. Chuẩn bị kiến thức về: Hằng đẳng thức, các kỹ thuật biến đổi một biểu thức.

. Hiểu rộng các kiến thức này giúp giáo viên hỗ trợ cho học sinh các kỹ thuật làm toán dễ hiểu và đạt hiệu quả nhanh.

. Chuẩn bị soạn thêm các bài tập.

. Chuẩn bị cho học sinh tâm lý tự học, tự tìm tài liệu.

Với học sinh:

. Chuẩn bị kiến thức về: Hằng đẳng thức, các kỹ thuật biến đổi một biểu thức.

. Tinh thần tự học cao.

. Có ý thức tốt về tính tự học và tìm kiếm tài liệu.

. Phân tích bài tập và rút ra một số kỹ thuật giải hiệu quả.

2. Phương pháp nghiên cứu.

Phương pháp: Phân tích bài toán nhanh qua các dữ liệu đề bài cho.

Phương pháp: Phân loại và lựa chọn các kiến thức cần thiết để giải quyết bài toán một cách hiệu quả.

Phương pháp: Thống kê các tính huống hay xảy ra ở bài toán.

V. PHẠM VI NGHIÊN CỨU.

Phạm vi nghiên cứu của đề tài này là:

Hỗ trợ cho giáo viên: . Có nguồn bài tập đa dạng tốn ít thời gian tìm kiếm.

. Tìm kiếm được nhiều kỹ thuật giải toán.

. Có thể chủ động tự soạn bài tập thích ứng.

Hỗ trợ cho học sinh: Có nhiều kỹ thuật giải toán cho các kỳ thi các cấp.

VI. ĐIỂM MỚI TRONG KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU.

Do có nguồn bài tập nhiều nên:

Với giáo viên: Chủ động tự nghiên cứu và đưa ra nhiều cách hay để hỗ trợ cho học sinh.

Với học sinh: Chủ động trong việc tự học và giải toán có bản lĩnh và tự tin hơn.

B. NỘI DUNG.

I. CƠ SỞ VIẾT SÁNG KIẾN.

1. Kiến thức.

Các quy tắc: . Nhân đơn thức với đa thức, nhân đa thức với đa thức.

. Chia đơn thức cho đơn thức.

. Chia đa thức cho đơn thức.

. Chia đa thức cho đa thức.

Các hằng đẳng thức đáng nhớ (lớp 8 và lớp 9).

Các kiến thức về căn thức bậc hai.

2. Kỹ năng.

Vận dụng các kiến thức trên và một số kỹ năng phân tích như ở phần: “**Mục đích của sáng kiến**” để biến đổi biểu thức đã cho thành các biểu thức có thể tính toán được.

II. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ.

Để giải quyết một câu (liên quan đến giá trị của biểu thức) trong đề thi (học sinh giỏi cấp thành phố, cấp huyện, các bài thi học kỳ, kiểm tra đồng loạt) không phải giải được một hai bài là có kinh nghiệm được.

Học sinh cần được cung cấp hàng loạt dạng bài tập này với mục tiêu: Học hỏi nhiều về kỹ thuật giải toán và có bản lĩnh hơn trong các kỳ thi.

1. Thuận lợi.

. Các kỳ thi: Học sinh giỏi cấp thành phố, cấp huyện, các bài thi học kỳ, kiểm tra đồng loạt thường có câu hỏi liên quan đến giá trị của biểu thức.

. Đây là động lực lớn để cho giáo viên và học sinh tìm hiểu dạng bài tập này.

. Có quyết tâm lớn hỗ trợ cho giáo viên và học sinh:

 Tìm kiếm bài tập.

 Học hỏi kỹ thuật giải toán.

. Có khả năng biên soạn một số bài tập.

. Có sự hỗ trợ của đồng nghiệp.

2. Khó khăn.

Việc tìm kiếm nguồn bài tập phải trải qua quá trình lâu dài.

Việc soạn ra một bài tập: Cần có thời gian.

 Cần có phản biện đáp ứng dạng bài tập.

3. Cơ hội.

Giáo viên và học sinh rất muốn tìm kiếm nguồn bài tập dạng: Liên quan đến giá trị của biểu thức.

Giáo viên hỗ trợ cho học sinh hiệu quả hơn.

Học sinh thành công hơn trong các kỳ thi.

III. PHẦN BÀI TẬP

BỔ ĐỀ 1: Cho $A^2 + B^2 + C^2 = AB + BC + CA$.

Chứng minh: $A = B = C$

Chứng minh:

$$\text{Ta có : } A^2 + B^2 + C^2 = AB + BC + CA$$

$$\Leftrightarrow 2A^2 + 2B^2 + 2C^2 = 2AB + 2BC + 2CA$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 2AB + B^2 + B^2 - 2BC + C^2 + C^2 - 2CA + A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow A - B = 0 \text{ và } B - C = 0 \text{ và } C - A = 0 \quad \left((A - B)^2 \geq 0; (B - C)^2 \geq 0; (C - A)^2 \geq 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow A = B \text{ và } B = C \text{ và } C = A$$

Vậy $A = B = C$

Bài 1: Cho $a - b = 7$; $b - c = 2$. Hãy tính: $P = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

Giải

Ta có: $a - b = 7$; $b - c = 2$ nên $a - c = 9$

$$P = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$\Leftrightarrow 2P = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca$$

$$\Leftrightarrow 2P = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$$

$$\Leftrightarrow 2P = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$$

$$\Leftrightarrow 2P = 7^2 + 2^2 + 9^2$$

$$\Leftrightarrow 2P = 134$$

$$\Leftrightarrow P = 67$$

Bài 2: Cho ba số $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + 4c^2 = ab + 2bc + 2ca$. Hãy tính:

a) $A = \frac{a+b-c}{a+b+c}$ b) $B = \frac{a^3 + b^3 + 4c^3}{abc}$

Giải

Áp dụng bổ đề 1, ta có: $a = b = 2c$. Vậy:

a) $A = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{2c+2c-c}{2c+2c+c} = \frac{3c}{5c} = \frac{3}{5}$

b) $B = \frac{a^3 + b^3 + 4c^3}{abc} = \frac{(2c)^3 + (2c)^3 + 4c^3}{2c \cdot 2c \cdot c} = \frac{20c^3}{4c^3} = 5$

Bài 3: Cho hai số a, b thỏa mãn $9a^2 + 9b^2 + 1 = 9ab - 3b - 3a$. Hãy tính: $Q = \frac{a^3 - b^5}{a^5 + b^3}$

Giải

Ta có: $9a^2 + 9b^2 + 1 = 9ab - 3b - 3a \Leftrightarrow a^2 + b^2 + \frac{1}{9} = ab - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a$

Áp dụng bổ đề 1, ta có: $a = b = -\frac{1}{3}$

Do đó:

$$Q = \frac{a^3 - b^5}{a^5 + b^3} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5}{\left(-\frac{1}{3}\right)^5 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{\frac{-8}{243}}{\frac{-10}{243}} = \frac{4}{5}$$

Bài 4: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$.

Hãy tính: $P = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} + 6}{15\sqrt{abc} + 30}$

Giải

Ta có: $a + b + c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{c})^2 = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$

Áp dụng bổ đề 1, ta có $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c}$

Do đó: $P = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} + 6}{15\sqrt{abc} + 30} = \frac{3(\sqrt{a})^3 + 6}{5[3(\sqrt{a})^3 + 6]} = \frac{1}{5}$

BỔ ĐỀ 2: Cho $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$.

Chứng minh: $A + B + C = 0$ hoặc $A = B = C$

Chứng minh:

Ta có: $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$

$$\Leftrightarrow A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 0$$

$$\Leftrightarrow (A+B)^3 - 3AB(A+B) + C^3 - 3ABC = 0$$

$$\Leftrightarrow (A+B)^3 + C^3 - 3AB(A+B) - 3ABC = 0$$

$$\Leftrightarrow (A+B+C) \left[(A+B)^2 - (A+B)C + C^2 \right] - 3AB(A+B+C) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A+B+C) (A^2 + 2AB + B^2 - AC - BC + C^2 - 3AB) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A+B+C) (A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA) = 0$$

$$\Leftrightarrow A+B+C=0 \text{ hoặc } A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA = 0$$

$$\Leftrightarrow A+B+C=0 \text{ hoặc } A=B=C \text{ (theo bổ đề 1)}$$

Bài 5: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Hãy tính:

$$\text{a) } P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}$$

$$\text{b) } M = \frac{a^2 + b^3 + c^4}{a^3 + b^4 + c^5} - \frac{1}{a}$$

Giải

Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Theo bổ đề 2, ta có: $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$

Do $a + b + c > 0$ nên ta được $a = b = c$

Do đó:

$$\text{a) } P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{ab + bc + ca}{ab + bc + ca} = 1$$

$$\text{b) } M = \frac{a^2 + b^3 + c^4}{a^3 + b^4 + c^5} - \frac{1}{a} = \frac{a^2 + a^3 + a^4}{a^3 + a^4 + a^5} - \frac{1}{a} = \frac{a^2 + a^3 + a^4}{a(a^2 + a^3 + a^4)} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

Bài 6: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Hãy tính: $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca + 18}{3a^2 + 3b^2 + 2c^2 + 2ab + ac + bc + 72}$

Giải

Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Áp dụng bổ đề 2, ta có: $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$

Mà a, b, c đôi một khác nhau nên loại trường hợp $a = b = c$

Vậy ta được $a + b + c = 0$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca + 18}{3a^2 + 3b^2 + 2c^2 + 2ab + ac + bc + 72} \\ \Leftrightarrow 2P &= \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 36}{(a+b)^2 + c(a+b) + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 72} \\ \Leftrightarrow 2P &= \frac{(a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 36}{(a+b)(a+b+c) + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 72} \\ \text{Do đó } \Leftrightarrow 2P &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 36}{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 72} \\ \Leftrightarrow 2P &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 36}{2(a^2 + b^2 + c^2 + 36)} \\ \Leftrightarrow 2P &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow P &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Bài 7: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} = 3\sqrt{abc}$.

Hãy tính: $P = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{2\sqrt{c} + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c} + \sqrt{a}}{2\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

Giải

Ta có: $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c} = 3\sqrt{abc} \Leftrightarrow (\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3 + (\sqrt{c})^3 = 3\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$

Áp dụng bổ đề 2, ta có: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$ hoặc $\sqrt{a} = \sqrt{b} = \sqrt{c}$

Ta loại trường hợp $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$ do a, b, c dương. Do đó

$$P = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{2\sqrt{c} + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c} + \sqrt{a}}{2\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a}}{2\sqrt{a} + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a}}{2\sqrt{a} + \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a}}{2\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Bài 8: Cho $a^3 + b^3 = 3ab - 1$, với $a + b > 0$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a^2 + b^3}{ab + 7}$

Giải

Ta có: $a^3 + b^3 = 3ab - 1 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 1^3 = 3ab.1$

Áp dụng bổ đề 2, ta có: $a + b + 1 = 0$ hoặc $a = b = 1$

Ta loại $a + b + 1 = 0$ do $a + b > 0$

$$\text{Vậy } P = \frac{a^2 + b^3}{ab + 6} = \frac{1^2 + 1^3}{1.1 + 6} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Bài 9: Cho $x + y = 1$. Tính giá trị biểu thức: $P = x^3 + y^3 + 3xy$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= x^3 + y^3 + 3xy \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 3xy \\ &= 1^3 - 3xy.1 + 3xy \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bài 10: Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 24$ và $(a + b)(b + c)(c + a) = 64$. Tính $a + b + c$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^3 &= (a + b)^3 + c^3 + 3c(a + b)(a + b + c) \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a + b) + 3c(a + b)(a + b + c) \\ &= 24 + 3(a + b)[ab + c(a + b + c)] \\ &= 24 + 3(a + b)(ab + ca + bc + c^2) \\ &= 24 + 3(a + b)[a(b + c) + c(b + c)] \\ &= 24 + 3(a + b)(b + c)(c + a) \\ &= 24 + 3.64 \\ &= 216 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a + b + c = 6$$

Bài 11: Cho $a^2 + b^2 = 1$; $c^2 + d^2 = 1$ và $ad + bc = 0$. Chứng minh rằng: $ab + cd = 0$

Giải

Ta có :

$$\begin{aligned}ab + cd &= ab(c^2 + d^2) + cd(a^2 + b^2) \\&= abc^2 + abd^2 + cda^2 + cdb^2 \\&= abc^2 + a^2cd + abd^2 + b^2cd \\&= ac(bc + ad) + bd(ad + bc) \\&= (bc + ad)(ac + bd) \\&= 0.(ac + bd) \\&= 0\end{aligned}$$

Bài 12: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Giải

Ta có: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Nên: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xy}{ab} + \frac{2yz}{bc} + \frac{2xz}{ac} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xyz}{abc} \left(\frac{c}{z} + \frac{b}{y} + \frac{a}{x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xyz}{abc} \cdot 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bài 13: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = 2018.$$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{b-a+a-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-b+b-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-c+c-b}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{-1}{a-c} + \frac{1}{a-b} + \frac{-1}{b-a} + \frac{1}{b-c} + \frac{-1}{c-b} + \frac{1}{c-a} \\ &= \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a} \end{aligned}$$

Vậy: $P = 2018$

Bài 14: Cho $abc = 1$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}$

Giải

Ta có: $abc = 1$ nên $a = \frac{1}{bc}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = \frac{\frac{1}{bc}}{\frac{1}{bc} \cdot b + \frac{1}{bc} + 1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{c \cdot \frac{1}{bc} + c + 1} \\ &= \frac{1}{b+1+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{1+b+bc} \\ &= \frac{1+b+bc}{1+b+bc} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bài 15: Cho a, b, c, d là các số nguyên dương đôi một khác nhau thỏa mãn :

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2. \text{ Chứng minh rằng: } abcd \text{ là một số chính phương.}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2 \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b+c} + 1 - \frac{c}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{b}{a+b} - \frac{b}{b+c} + \frac{d}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow b\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)+d\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{d+a}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)}+\frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)}=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{(c+d)(d+a)}-\frac{b}{(a+b)(b+c)}=0 \quad (a \neq c) \\
&\Leftrightarrow 1-\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b+c}+1-\frac{c}{c+d}-\frac{d}{d+a}=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{b}{a+b}-\frac{b}{b+c}+\frac{d}{c+d}-\frac{d}{d+a}=0 \\
&\Leftrightarrow b\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)+d\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{d+a}\right)=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)}+\frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)}=0 \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{(c+d)(d+a)}-\frac{b}{(a+b)(b+c)}=0 \quad (a \neq c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow d(a+b)(b+c)-b(c+d)(d+a)=0 \\
&\Leftrightarrow d(ab+ac+b^2+bc)-b(ac+cd+d^2+ad)=0 \\
&\Leftrightarrow abd+adc+b^2d+bcd-abc-bcd-bd^2-abd=0 \\
&\Leftrightarrow b^2d-bd^2+adc-abc=0 \\
&\Leftrightarrow bd(b-d)+ac(d-b)=0 \\
&\Leftrightarrow (b-d)(bd-ac)=0 \quad (b \neq d) \\
&\Leftrightarrow bd-ac=0 \\
&\Leftrightarrow bd=ac
\end{aligned}$$

Vậy $abcd = (ac)^2$ là một số chính phương.

Bài 16: Cho $(a+b)^2 = 2(a^2+b^2)$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{5a^2+1}{30ab+6}$

Giải

$$\text{Ta có: } (a+b)^2 = 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 = 2a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$$

$$\text{Vậy } P = \frac{5a^2+1}{30ab+6} = \frac{5a^2+1}{30a^2+6} = \frac{1}{6}$$

Bài 17: Cho $(a + 3b)^2 = 2(a^2 + 9b^2)$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{6a^2 + a - 3b + 27}{2b^2 + 1}$

Giải

Ta có: $(a + 3b)^2 = 2(a^2 + 9b^2)$

$$\Leftrightarrow a^2 + 6ab + 9b^2 = 2a^2 + 18b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6ab + 9b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 3b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - 3b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 3b$$

$$\text{Vậy } P = \frac{6a^2 + a - 3b + 27}{2b^2 + 1} = \frac{6(3b)^2 + 3b - 3b + 27}{2b^2 + 1} = \frac{54 + 27b^2}{2b^2 + 1} = 27$$

Bài 18: Cho hai số $a, b \neq 0$ thỏa điều kiện $a + b = a^2 + b^2$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{b} + \frac{b}{a} + b - \frac{b^2}{a} - \frac{a}{b} - a$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{b} + \frac{b}{a} + b - \frac{b^2}{a} - \frac{a}{b} - a \\ &= \frac{a^3 + b^2 + ab^2 - b^3 - a^2 - a^2b}{ab} \\ &= \frac{a^3 - b^3 - (a^2 - b^2) + ab^2 - a^2b}{ab} \\ &= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2) - (a - b)(a + b) + ab(b - a)}{ab} \\ &= \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2 - a - b - ab)}{ab} \\ &= \frac{(a - b)(a^2 + b^2 - a - b)}{ab} \\ &= \frac{(a - b)(a + b - a - b)}{ab} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bài 19: Cho hai số a, b thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{ab}$ và $ab \neq \frac{4}{3}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^3 + b^3}{15ab - 20}$

Giải

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{ab}$

Nên: $\frac{a+b}{ab} = \frac{2}{ab}$

Hay: $a + b = 2$

$$\text{Do đó: } P = \frac{a^3 + b^3}{15ab - 20} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{15ab - 20} = \frac{2[(a+b)^2 - 3ab]}{15ab - 20} = \frac{2(4 - 3ab)}{-5(4 - 3ab)} = \frac{-2}{5}$$

Bài 20: Cho hai số a, b thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a^4 + b^2}{3a^2 + 3b^4}$

Giải

Ta có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Vậy } P = \frac{a^4 + b^2}{3a^2 + 3b^4} = \frac{a^4 + a^2}{3a^2 + 3a^4} = \frac{1}{3}$$

Bài 21: Cho hai số dương a, b thỏa mãn $\frac{a^2 + b^2 - 2}{ab + 1} + 2 = 2ab$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 + 6a^2b^2}{a^2 + b^2}$

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{a^2 + b^2 - 2}{ab + 1} + 2 = 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab + 1} = 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2a^2b^2 + 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2ab$$

$$\begin{aligned} \text{Nên: } P &= \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 + 6a^2b^2 \right) : (a^2 + b^2) = \left[\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + 6a^2b^2 \right] : (2a^2b^2) \\ &= \left[(2ab)^2 + 6a^2b^2 \right] : (2a^2b^2) \\ &= 10a^2b^2 : (2a^2b^2) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Bài 22: Cho hai số a, b thỏa điều kiện $a + b = a^2 - ab + b^2$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{6a^3 + 6b^3 + 18}{(a + 3)(b + 3) + 8ab}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{6a^3 + 6b^3 + 18}{(a + 3)(b + 3) + 8ab} = \frac{6(a + b)(a + b) + 18}{ab + 3a^2 - 3ab + 3b^2 + 8ab + 9} \\ &= \frac{6(a + b)^2 + 18}{3a^2 + 6ab + 3b^2 + 9} \\ &= \frac{6(a + b)^2 + 18}{3(a^2 + 2ab + b^2) + 9} \\ &= \frac{6(a + b)^2 + 18}{3(a + b)^2 + 9} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Bài 23: Cho hai số a, b ($a \neq b$) thỏa $a - b = a^2 + ab + b^2$. Tính giá trị biểu thức:

$$\text{a) } P = \frac{8a^3 - 8b^3 + 20}{(2a - 1)(2b + 1) - 10ab + 6}$$

$$\text{b) } S = \frac{4a^3 - 4b^3}{(2a + 3)^2 + (2b - 3)^2 - 18 - 44ab}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } P &= \frac{8a^3 - 8b^3 + 20}{(2a - 1)(2b + 1) - 10ab + 6} \\ &= \frac{8(a - b)(a^2 + ab + b^2) + 20}{4ab + 2(a - b) - 1 - 10ab + 6} \\ &= \frac{8(a - b)(a - b) + 20}{4ab + 2a^2 + 2ab + 2b^2 - 10ab + 5} \\ &= \frac{8(a - b)^2 + 20}{2a^2 - 4ab + 2b^2 + 5} \\ &= \frac{8(a - b)^2 + 20}{2(a - b)^2 + 5} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } S &= \frac{4a^3 - 4b^3}{(2a + 3)^2 + (2b - 3)^2 - 18 - 44ab} \\ &= \frac{4(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{4a^2 + 12a + 9 + 4b^2 - 12b + 9 - 18 - 44ab} \\ &= \frac{4(a - b)(a - b)}{4a^2 + 4b^2 + 12(a - b) - 44ab} \\ &= \frac{4(a - b)^2}{4a^2 + 4b^2 + 12(a^2 + ab + b^2) - 44ab} \\ &= \frac{4(a - b)^2}{16a^2 - 32ab + 16b^2} \\ &= \frac{4(a - b)^2}{16(a - b)^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Bài 24: Cho hai số dương a, b thỏa điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}$

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{4}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a-b=0$$

$$\Leftrightarrow a=b$$

$$\text{Nên } P = \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2} = \frac{a}{2a} + \frac{a}{2a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Bài 25: Cho ba số dương a, b, c đôi một khác nhau thỏa điều kiện:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b} \text{ và } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{b+c}.$$

Hãy tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a^2 + bc + c^2}{b^2 + ca + a^2}$.

Giải

Theo bài 24, ta có $a=b$ và $b=c$ hay $a=b=c$. Do đó:

$$P = \frac{a^2 + bc + c^2}{b^2 + ca + a^2} = \frac{a^2 + aa + a^2}{a^2 + aa + a^2} = 1$$

Bài 26: Cho bốn số $a, b, c, d \neq 0$ thỏa $abcd = 1$ và $a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

Chứng minh rằng: $ab = 1$ hoặc $bc = 1$ hoặc $bd = 1$

Giải

Ta có: $a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$

$$\Leftrightarrow a + b - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + c + d - \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)\left(1 - \frac{1}{ab}\right) + (c + d)\left(1 - \frac{1}{cd}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a + b)(ab - 1)}{ab} + (c + d)(1 - ab) = 0 \quad \text{do } abcd = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{cd} = ab$$

$$\Leftrightarrow (ab - 1)\left(\frac{a + b}{ab} - c - d\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (ab - 1)(a + b - abc - abd) = 0$$

$$\Leftrightarrow (ab - 1)[a(1 - bc) + b(1 - ad)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (ab - 1)[a(1 - bc) + b(abcd - ad)] = 0 \quad \text{do } abcd = 1$$

$$\Leftrightarrow (ab - 1)[a(1 - bc) + abd(bc - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow a(ab - 1)(1 - bc)(1 - bd) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - 1 = 0 \text{ hoặc } 1 - bc = 0 \text{ hoặc } 1 - bd = 0 \text{ (do } a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow ab = 1 \text{ hoặc } bc = 1 \text{ hoặc } bd = 1$$

Bài 27: Cho $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ và a, b, c là ba số khác 0.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

Giải

Ta có: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab + 2bc + 2ac = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}$$

$$\begin{aligned}
\text{Do đó: } & \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} \\
&= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{ab} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} \\
&= \left(\frac{-1}{c}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{ab} \left(\frac{-1}{c}\right) + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} \\
&= \frac{-1}{c^3} + \frac{3}{abc} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$$

Bài 28: Cho bốn số a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 0$ và $(b + d)(ac - bd) = 144$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = (b + c)(ad - bc)$

Giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } (b + d)(ac - bd) - (b + c)(ad - bc) &= abc - b^2d + acd - bd^2 - abd + b^2c - acd + bc^2 \\
&= abc + b^2c + bc^2 - b^2d - bd^2 - abd \\
&= bc(a + b + c) - bd(b + d + a) \\
&= bc(-d) - bd(-c) \\
&= -bcd + bcd \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } (b + d)(ac - bd) = (b + c)(ad - bc)$$

$$\text{Do đó } P = 144$$

Cách khác:

$$\text{Ta có: } a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow a + c = -(b + d)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (a + c)^3 = -(b + d)^3 \\
&\Leftrightarrow a^3 + c^3 + 3ac(a + c) = -b^3 - d^3 - 3bd(b + d) \\
&\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3bd(b + d) + 3ac(b + d) \\
&\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + d)(ac - bd)
\end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(b + c)(ad - bc)$$

$$\text{Vậy: } (b + d)(ac - bd) = (b + c)(ad - bc)$$

$$\text{Do đó } P = 144$$

Bài 29: Cho $abc = 9$ và $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{149}{36}$ ($a, b, c > 0$)

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}$

Giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} = abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = 9 \cdot \frac{149}{36} = \frac{149}{4}$$

Bài 30: Cho a, b, c khác 2 và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{c+ab}{a^2+b^2+abc-1} + \frac{a+bc}{b^2+c^2+abc-1} + \frac{b+ac}{a^2+c^2+abc-1} = \frac{ab+bc+ca+8}{(a-2)(b-2)(c-2)}$$

Giải

Ta có: $a + b + c = 1$ Nên: $a + b = 1 - c$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a+b)^2 &= (1-c)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 1 - 2c + c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 1 = c^2 - 2c - 2ab \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + abc - 1 = c^2 - 2c - 2ab + abc \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + abc - 1 = c(c-2) + ab(c-2) \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + abc - 1 = (c-2)(c+ab) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \frac{c+ab}{a^2+b^2+abc-1} = \frac{c+ab}{(c+ab)(c-2)} = \frac{1}{c-2}$$

$$\text{Tương tự, ta được: } \frac{a+bc}{b^2+c^2+abc-1} = \frac{1}{a-2} \text{ và } \frac{b+ac}{a^2+c^2+abc-1} = \frac{1}{b-2}$$

$$\text{Nên: } \frac{c+ab}{a^2+b^2+abc-1} + \frac{a+bc}{b^2+c^2+abc-1} + \frac{b+ac}{a^2+c^2+abc-1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c-2} + \frac{1}{a-2} + \frac{1}{b-2} \\ &= \frac{(a-2)(b-2) + (b-2)(c-2) + (a-2)(c-2)}{(a-2)(b-2)(c-2)} \\ &= \frac{ab - 2a - 2b + 4 + bc - 2b - 2c + 4 + ac - 2a - 2c + 4}{(a-2)(b-2)(c-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{ab + bc + ca - 4(a+b+c) + 12}{(a-2)(b-2)(c-2)} \\ &= \frac{ab + bc + ca - 4 \cdot 1 + 12}{(a-2)(b-2)(c-2)} = \frac{ab + bc + ca + 8}{(a-2)(b-2)(c-2)} \end{aligned}$$

Bài 31: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau và khác 0 thỏa điều kiện $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Giải

Ta có:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} \Leftrightarrow a^2 + ab = bc + c^2 \Leftrightarrow a^2 - c^2 + ab - bc = 0 \Leftrightarrow (a-c)(a+c) + b(a-c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)(a+b+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow a-c=0 \text{ hoặc } a+b+c=0$$

$$\Leftrightarrow a=c \text{ hoặc } a+b+c=0$$

Do: $a \neq c$ nên $a+b+c=0$

$$\Rightarrow a+b=-c; b+c=-a; a+c=-b$$

$$\text{Vậy } P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) = \frac{b+a}{b} \cdot \frac{c+b}{c} \cdot \frac{a+c}{a}$$

$$= \frac{-c}{b} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{a}$$

$$= -1$$

Bài 32: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}$

Giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{c+a}$$

$$= \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c - a - b - c$$

$$= \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(a+b+c)}{c+a} + \frac{c(a+b+c)}{a+b} - a - b - c$$

$$= (a+b+c) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) - a - b - c$$

$$= a+b+c - a - b - c$$

$$= 0$$

Bài 33: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng:

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(a-c)-(a-b)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{c-a}$$

Tương tự, ta được:

$$\frac{c-a}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}$$

$$\frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c}$$

$$\text{Vậy } \frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}.$$

Bài 34: Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = \sqrt{2018}$.

Chứng minh rằng: $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = \sqrt{2017}$

Giải

$$\text{Ta có: } xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = \sqrt{2018}$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + (1+x^2)(1+y^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 2018$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + x^2y^2 + y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 2017$$

$$\Leftrightarrow x^2(1+y^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + y^2(1+x^2) = 2017$$

$$\Leftrightarrow \left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right)^2 = 2017$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = \sqrt{2017}$$

Bài 35: Cho $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$.

Tính giá trị biểu thức: $P = x^{2017} + y^{2017}$

Giải

Giả sử: $\sqrt{x^2+1}-x=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}=x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+1=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Nên $\sqrt{x^2+1}-x \neq 0$.

Tương tự, ta cũng có $\sqrt{y^2+1}-y \neq 0$

Do đó:

$$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x)=\sqrt{x^2+1}-x$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1-x^2)(y+\sqrt{y^2+1})=\sqrt{x^2+1}-x$$

$$\Leftrightarrow y+\sqrt{y^2+1}=\sqrt{x^2+1}-x$$

Tương tự, ta được: $x+\sqrt{x^2+1}=\sqrt{y^2+1}-y$

Từ đó, ta có: $2(x+y)=0 \Leftrightarrow x=-y$

Vậy: $P=x^{2017}+y^{2017}=(-y)^{2017}+y^{2017}=0$

Bài 36: Cho $a^3-3ab^2=18$ và $b^3-3a^2b=26$. Tính a^2+b^2

Giải

Ta có: $(a^3-3ab^2)^2+(b^3-3a^2b)^2=18^2+26^2$

$$\Leftrightarrow a^6-6a^4b^2+9a^2b^4+b^6-6a^2b^4+9a^4b^2=1000$$

$$\Leftrightarrow a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=1000$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)^3=1000$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=10$$

Bài 37: Cho $a^{2018} + b^{2018} + c^{2018} = a^{1009}b^{1009} + b^{1009}c^{1009} + c^{1009}a^{1009}$.

$$\text{Tính } P = (a-b)^{40} + (b-c)^{50} + (c-a)^{60}$$

Giải

$$\text{Ta có: } a^{2018} + b^{2018} + c^{2018} = a^{1009}b^{1009} + b^{1009}c^{1009} + c^{1009}a^{1009}$$

$$\Leftrightarrow (a^{1009})^2 + (b^{1009})^2 + (c^{1009})^2 - a^{1009}b^{1009} - b^{1009}c^{1009} - c^{1009}a^{1009} = 0$$

Theo bổ đề 1, ta có:

$$a^{1009} = b^{1009} \text{ và } b^{1009} = c^{1009} \text{ và } c^{1009} = a^{1009}$$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ và } b = c \text{ và } c = a$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy:

$$\begin{aligned} P &= (a-b)^{40} + (b-c)^{50} + (c-a)^{60} \\ &= (a-a)^{40} + (b-b)^{50} + (c-c)^{50} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bài 38: Cho các số a, b, c, d khác 0 thỏa mãn $a + b = c + d$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = \frac{(c+d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Giải

$$\text{Ta có: } a + b = c + d \Leftrightarrow a = c + d - b$$

Nên:

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= (c + d - b)^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= (c + d)^2 - 2b(c + d) + b^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= (c + d)^2 - 2bc - 2bd + 2b^2 + c^2 + d^2 \\ &= (c + d)^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \\ &= (c + d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } P = 1$$

Bài 39: Cho biết $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{2a^2 + 2c^2 + 2ab + 2}{b^2 + d^2 + cd + 1}$

Giải

$$\text{Ta có: } a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + c^4 - 2c^2d^2 + d^4 + 2a^2b^2 - 4abcd + 2c^2d^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \text{ và } c^2 = d^2 \text{ và } ab = cd$$

$$\text{Vậy } P = \frac{2a^2 + 2c^2 + 2ab + 2}{b^2 + d^2 + cd + 1} = \frac{2a^2 + 2c^2 + 2ab + 2}{a^2 + c^2 + ab + 1} = 2$$

Bài 40: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng: $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 \\ &= a^3 + b^3 + a^2c - abc + b^2c \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c(a^2 - ab + b^2) \\ &= (a^2 - ab + b^2)(a + b + c) \\ &= (a^2 - ab + b^2) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bài 41: Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 = a^3 + b^3 = a^4 + b^4$.

Tính giá trị biểu thức: $P = a^{2018} + b^{2018}$

Giải

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 = a^3 + b^3 = a^4 + b^4$$

$$\text{Nên: } (a^2 + b^2) \cdot (a^4 + b^4) = (a^3 + b^3)^2 \Leftrightarrow a^6 + a^2b^4 + a^4b^2 + b^6 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6$$

$$\Leftrightarrow a^2b^4 + a^4b^2 - 2a^3b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2(b^2 + a^2 - 2ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 + a^2 - 2ab = 0 \quad (a, b > 0)$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

Ta lại có: $a^2 + b^2 = a^3 + b^3$

$$\Leftrightarrow a^2 + a^2 = a^3 + a^3$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = 2a^3$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \quad (\text{do } a > 0)$$

Do đó: $a = b = 1$

$$\text{Vậy: } P = a^{2018} + b^{2018} = 1^{2018} + 1^{2018} = 2$$

Bài 42: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của $\triangle ABC$.

Biết rằng: $\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 8$. Chứng minh: $\triangle ABC$ là tam giác đều

Giải

$$\text{Ta có: } \left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right) = 8$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} + \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{bc} + \frac{a^2 + c^2 - 2ac}{ac} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(a-c)^2}{ac} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \text{ và } (b-c)^2 = 0 \text{ và } (c-a)^2 = 0 \quad (\text{do } a, b, c > 0)$$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ và } b = c \text{ và } c = a$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy $\triangle ABC$ đều

Bài 43: Cho $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 2018$ và $ad + bc = 0$. Tính $ab + cd$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & 2018(ab + cd) \\ &= 2018.ab + 2018.cd \\ &= (c^2 + d^2)ab + (a^2 + b^2)cd \\ &= abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd \\ &= abc^2 + a^2cd + abd^2 + b^2cd \\ &= ac(bc + ad) + bd(ad + bc) \\ &= (bc + ad)(ac + bd) \\ &= 0.(ac + bd) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bài 44: Cho $a^2 + b^2 + (a - b)^2 = c^2 + d^2 + (c - d)^2$.

Chứng minh rằng: $a^4 + b^4 + (a - b)^4 = c^4 + d^4 + (c - d)^4$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + (a - b)^2 = c^2 + d^2 + (c - d)^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - 2ab = c^2 + d^2 + c^2 + d^2 - 2cd \\ \Leftrightarrow & 2a^2 + 2b^2 - 2ab = 2c^2 + 2d^2 - 2cd \\ \Leftrightarrow & a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 - cd \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 + (a - b)^4 = a^4 + b^4 + (a - b)^4 \\ &= a^4 + b^4 + a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ &= 2(a^4 - 2a^3b + 3a^2b^2 - 2ab^3 + b^4) \\ &= 2(a^2 - ab + b^2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } c^4 + d^4 + (c - d)^4 = 2(c^2 - cd + d^2)^2$$

$$\text{Vậy: } a^4 + b^4 + (a - b)^4 = c^4 + d^4 + (c - d)^4$$

Bài 45: Cho $\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} = 2018$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{y+z} + \frac{x^2}{z+x}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} - P \\ &= \frac{x^2}{x+y} - \frac{y^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} - \frac{z^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} - \frac{x^2}{z+x} \\ &= \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} + \frac{(y+z)(y-z)}{y+z} + \frac{(z+x)(z-x)}{z+x} \\ &= x - y + y - z + z - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $P = 2018$

Bài 46: Cho $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} = 1$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} - P \\ &= \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} - \frac{b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} - \frac{c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} - \frac{a^3}{c^2+ca+a^2} \\ &= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2} + \frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{b^2+bc+c^2} + \frac{(c-a)(c^2+ca+a^2)}{c^2+ca+a^2} \\ &= a - b + b - c + c - a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy: $P = 1$

Bài 47: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0$

Giải

Ta có: $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$

Nên: $\frac{a}{b-c} = \frac{-b}{c-a} + \frac{-c}{a-b}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b-c} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(c-a)(a-b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{(b-c)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

Tương tự:

$$\frac{b}{(c-a)^2} = \frac{c^2 - bc + ba - a^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

$$\frac{c}{(a-b)^2} = \frac{a^2 - ca + cb - b^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

Vậy: $\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = \frac{b^2 - ab + ac - c^2 + c^2 - bc + ba - a^2 + a^2 - ca + cb - b^2}{(b-c)(c-a)(a-b)} = 0$

Bài 48: Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $a^2 + b^2 = (a + b - c)^2$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c}$

Giải

Ta có: $a^2 + b^2 = (a + b - c)^2 \Leftrightarrow a^2 = (a + b - c)^2 - b^2$

$$\Leftrightarrow a^2 = (a + b - c + b)(a + b - c - b)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = (a + 2b - c)(a - c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (a - c)^2 = (a + 2b - c)(a - c) + (a - c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (a - c)^2 = (a - c)(a + 2b - c + a - c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (a - c)^2 = (a - c)(2a + 2b - 2c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (a - c)^2 = 2(a - c)(a + b - c)$$

Tương tự: $b^2 + (b - c)^2 = 2(b - c)(a + b - c)$

Vậy: $\frac{a^2 + (a - c)^2}{b^2 + (b - c)^2} = \frac{2(a - c)(a + b - c)}{2(b - c)(a + b - c)} = \frac{a - c}{b - c}$

Bài 49: Cho a, b, c khác 0 và thỏa mãn $a + b + c = 0$.

Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - b^2 - a^2}$

Giải

Ta có: $a + b + c = 0$ Nên: $b + c = -a$

$$\Rightarrow (b + c)^2 = (-a)^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$$

Tương tự, ta được: $b^2 - c^2 - a^2 = 2ac$ và $c^2 - b^2 - a^2 = 2ab$

Nên: $a^3 + b^3 + c^3$

$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3$$

$$= (-c)^3 - 3ab(-c) + c^3$$

$$= -c^3 + 3abc + c^3$$

$$= 3abc$$

Vậy: $P = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - b^2 - a^2}$

$$= \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}$$

$$= \frac{3abc}{2abc}$$

$$= \frac{3}{2}$$

Bài 50: Cho hai số a, b thỏa mãn $a + 5 = 3\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \sqrt{5a-b}$

Giải

Ta có: $a + 5 = 3\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$

$$\Leftrightarrow 2a + 10 = 6\sqrt{a+b} + 2\sqrt{a-b}$$

$$\Leftrightarrow a + b - 6\sqrt{a+b} + 9 + a - b - 2\sqrt{a-b} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a+b} - 3)^2 + (\sqrt{a-b} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+b} - 3 = 0 \text{ và } \sqrt{a-b} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+b} = 3 \text{ và } \sqrt{a-b} = 1$$

$$\Leftrightarrow a + b = 9 \text{ và } a - b = 1$$

$$\Leftrightarrow a = 5 \text{ và } b = 4$$

Vậy: $P = \sqrt{5a-b} = \sqrt{5 \cdot 5 - 4} = 1$

Bài 51: Cho các số a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện:

$$ac - a - c = b^2 - 2b ; bd - b - d = c^2 - 2c ; b \neq 1 ; c \neq 1$$

Chứng minh rằng: $ad + b + c = bc + a + d$

Giải

Ta có: $ac - a - c = b^2 - 2b$

$$\Leftrightarrow ac - a - c + 1 = b^2 - 2b + 1$$

$$\Leftrightarrow a(c-1) - (c-1) = (b-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (c-1)(a-1) = (b-1)^2$$

Tương tự, ta được: $(b-1)(d-1) = (c-1)^2$

Do đó:

$$(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) = (b-1)^2 (c-1)^2$$

$$(a-1)(d-1) = (b-1)(c-1) \quad (\text{do } b \neq 1 ; c \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow ad - a - d + 1 = bc - b - c + 1$$

$$\Leftrightarrow ad + b + c = bc + a + d$$

Bài 52: Cho hai số tự nhiên khác 0 thỏa điều kiện $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = a^2 + b^2$

Giải

$$\text{Ta có: } a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow a + b - \frac{a+b}{ab} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b) \left(1 - \frac{1}{ab}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{ab} = 0 \quad \text{do } a+b > 0$$

$$\Leftrightarrow ab = 1$$

$$\Leftrightarrow a = b = 1 \text{ do } a, b \text{ là hai số tự nhiên khác 0}$$

$$\text{Vậy: } P = a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Bài 53: Cho bốn số a, b, c, d thỏa mãn $ab + cd = 8$ và $\dots$

Tính giá trị của biểu thức: $P = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$

Giải

$$\text{Ta có: } P = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

$$= a^2b^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + c^2d^2$$

$$= a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2$$

$$= (ab + cd)^2 + (bc - ad)^2$$

$$= 8^2 + 1^2$$

$$= 65$$

Bài 54: Cho $a + b + c + d = 0$.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(ab - cd)(c + d)$

Giải

Ta có: $a + b + c + d = 0$

Nên: $a + b = -(c + d)$

$$\Leftrightarrow (a + b)^3 = [-(c + d)]^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3 - d^3 - 3cd(c + d)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab(a + b) - 3cd(c + d)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ab[-(c + d)] - 3cd(c + d)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(ab - cd)(c + d)$$

Bài 55: Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

Giải

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ Nên: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}$

$$\begin{aligned} \text{Ta xét: } \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{ab} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} \\ &= \left(\frac{-1}{c}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{ab} \cdot \left(\frac{-1}{c}\right) + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} \\ &= \frac{-1}{c^3} + \frac{3}{abc} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$$

Vậy:

$$\begin{aligned} P &= \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = \frac{abc}{a^3} + \frac{abc}{b^3} + \frac{abc}{c^3} = abc \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \\ &= abc \cdot \frac{3}{abc} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Bài 56: Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2$

Giải

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow \frac{bc + ac + ab}{abc} = 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$

Do đó:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot 0 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ &= (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

Bài 57: Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} + 1 + \frac{c+a}{b} + 1 + \frac{a+b}{c} + 1 - 3 \\ &= \frac{b+c+a}{a} + \frac{c+a+b}{b} + \frac{a+b+c}{c} - 3 \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3 \\ &= (a+b+c) \cdot 0 - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Bài 58: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ và $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= 2 \quad \text{Nên: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{abc}(c + a + b) = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{abc} \cdot abc = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2 \end{aligned}$$

Bài 59: Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

Giải

$$\text{Ta có: } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab + bc + ca}{abc} = 0 \quad (\text{do } a, b, c \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^3 - \frac{3}{ab}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$$

$$= \left(\frac{-1}{c}\right)^3 - \frac{3}{ab}\left(\frac{-1}{c}\right) + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$$

$$= \frac{-1}{c^3} + \frac{3}{abc} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc}$$

$$= 0$$

$$\text{Vậy: } \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$$

Bài 60: Cho a, b, c là ba số khác 0 thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và

$a + b + c \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)$

Giải

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\text{Theo bổ đề 2, ta có: } (a + b + c)\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = 0$$

$$\text{Mà: } a + b + c \neq 0$$

$$\text{Nên: } (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$$

$$\text{Vậy: } P = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) = 2.2.2 = 8$$

Bài 61: Cho $x + y + z = -12$.

Chứng minh rằng: $(x + 4)^3 + (y + 4)^3 + (z + 4)^3 = 3(x + 4)(y + 4)(z + 4)$

Giải

Đặt $a = x + 4$; $b = y + 4$; $c = z + 4$

Nên: $a + b + c = x + y + z + 12 = -12 + 12 = 0$

Hay: $a + b = -c$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc \\ &= (-c)^3 - 3ab(-c) + c^3 - 3abc \\ &= -c^3 + 3abc + c^3 - 3abc \\ &= 0\end{aligned}$$

Vậy: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Hay: $(x + 4)^3 + (y + 4)^3 + (z + 4)^3 = 3(x + 4)(y + 4)(z + 4)$

Bài 62: Cho hai số a, b khác 0 thỏa mãn $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{3b}$

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{a^4 + b^4}{a^2b^2} = \frac{a^3b + ab^3}{a^2b^2} \\ &\Leftrightarrow a^4 + b^4 = a^3b + ab^3 \quad (a^2b^2 \neq 0) \\ &\Leftrightarrow a^3(a - b) + b^3(b - a) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)(a^3 - b^3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)^2 \left[\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \quad \left(\text{do } b \neq 0 \text{ nên } \left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0 \right) \\ &\Leftrightarrow a = b\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } P = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{3b} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{3a} = 0$$

Bài 63: Cho ba số dương a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện:

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}. \text{ Chứng minh rằng: } a = b = c$$

Giải

$$\text{Ta có: } a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} \quad \text{Nên: } a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b - c}{bc}$$

$$b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c - a}{ac}$$

$$c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}$$

$$\text{Nếu: } a > b \text{ thì } \frac{b - c}{bc} > 0 \Rightarrow b - c > 0 \quad (b, c > 0)$$

$$\Rightarrow b > c$$

$$\Rightarrow \frac{c - a}{ac} > 0$$

$$\Rightarrow c - a > 0 \quad (c, a > 0)$$

$$\Rightarrow c > a \text{ (vô lý)}$$

Tương tự, với $a < b$ ta cũng có điều vô lý.

Vậy: $a = b = c$

Bài 64: Cho a, b, c là các số có tổng bằng 2018.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2} = \frac{(a + b + c) \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right]}{2 \cdot \left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right]} \\ &= \frac{a + b + c}{2} \\ &= \frac{2018}{2} \\ &= 1009 \end{aligned}$$

Bài 65: Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $abc = 1$ và $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Tính $P = (a^{2016} - 1)(b^{2017} - 1)(c^{2018} - 1)$

Giải

Ta có: $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$$\Leftrightarrow a + b + c = \frac{bc + ca + ab}{abc}$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = bc + ca + ab$$

$$\Leftrightarrow 1 - ab + a - ac + b - bc + c - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow abc - ab + a(1 - c) + b(1 - c) + c - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(c - 1) + a(1 - c) + b(1 - c) + c - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 1)(ab - a - b + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 1)[a(b - 1) - (b - 1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 1)(b - 1)(a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 1 \text{ hoặc } b = 1 \text{ hoặc } a = 1$$

Nếu $c = 1$ thì $c^{2018} - 1 = 1^{2018} - 1 = 0$ nên $P = 0$

Nếu $b = 1$ thì $b^{2017} - 1 = 1^{2017} - 1 = 0$ nên $P = 0$

Nếu $a = 1$ thì $a^{2016} - 1 = 1^{2016} - 1 = 0$ nên $P = 0$

Vậy $P = 0$

Bài 66: Cho hai số a, b thỏa mãn $a^3 + b^3 = \frac{(a + b)^3}{4}$.

a) Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a^2 + b^2 + 1}{6ab + 3}$ khi $a + b \neq 0$

b) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 6$ khi $a \neq b, ab \neq 0$

Giải

a) Ta có: $a^3 + b^3 = \frac{(a + b)^3}{4} \Leftrightarrow 4a^3 + 4b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

$$\Leftrightarrow 3a^3 + 3b^3 - 3ab(a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a - 2ab + b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \quad \text{do } a+b \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{a^2 + b^2 + 1}{6ab + 3} = \frac{a^2 + a^2 + 1}{6a^2 + 3} = \frac{2a^2 + 1}{6a^2 + 3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) Ta có: } (a+b)(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a+b=0 \quad \text{do } a \neq b$$

$$\text{Vậy: } P = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 6 = \frac{a^2 + b^2 - 6ab}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 8ab}{ab} = \frac{0 - 8ab}{ab} = -8$$

Bài 67: Cho hai số dương a, b thỏa mãn $ab < 1$ và $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} = \frac{2}{1+ab}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^3}{b^2} - \frac{b^4}{a^3} + 1$

Giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} = \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{1}{1+ab} - \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+ab} - \frac{1}{1+b^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - ab}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{b^2 - ab}{(1+b^2)(1+ab)} = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(1+b^2) - b(a-b)(1+a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)[a + ab^2 - b - ba^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)[a - b + ab(b-a)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b)(1-ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(1-ab) = 0$$

Do $1-ab > 0$

Nên $(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$

$$\text{Vậy: } P = \frac{a^3}{b^2} - \frac{b^4}{a^3} + 1 = \frac{a^3}{a^2} - \frac{a^4}{a^3} + 1 = a - a + 1 = 1$$

Bài 68: Cho hai số a, b thỏa mãn $a + b > 0$ và $a^3 + b^3 = a + b$.

Hãy tính giá trị biểu thức: $P = a^4 + 3a^2b^2 + b^4 - 2a^3b - 2ab^3 - 1$

Giải

Ta có: $a^3 + b^3 = a + b$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a + b$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 = 1 \quad \text{do } a + b > 0$$

Vậy:

$$\begin{aligned} P &= a^4 + 3a^2b^2 + b^4 - 2a^3b - 2ab^3 - 1 \\ &= a^4 + a^2b^2 + b^4 - 2a^3b - 2ab^3 + 2a^2b^2 - 1 \\ &= (a^2 - ab + b^2)^2 - 1 \\ &= 1^2 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bài 69: Cho hai số khác nhau a, b thỏa điều kiện $a^4 + a^2 = b^4 + b^2$.

Tính giá trị biểu thức: $P = a^5 + b^5 + 6$

Giải

Ta có: $a^4 + a^2 = b^4 + b^2 \Leftrightarrow a^4 - b^4 + a^2 - b^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(a - b)(a^2 + b^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b = 0 \quad (\text{do } a \neq b \text{ và } a^2 + b^2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow a = -b$$

Vậy: $P = a^5 + b^5 + 6 = (-b)^5 + b^5 + 6 = -b^5 + b^5 + 6 = 6$

Bài 70: Cho hai số dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b}$.

Chứng minh rằng: $\frac{2a}{2a + b} + \frac{b}{a + 2b} = 1$

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} &= \frac{1}{b^2} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0 \quad (\text{do } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow a = b\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \frac{2a}{2a+b} + \frac{b}{a+2b} = \frac{2a}{2a+a} + \frac{a}{a+2a} = \frac{2a+a}{2a+a} = 1$$

Bài 71: Cho hai số thực a, b thỏa điều kiện $ab = 1$ và $a + b \neq 0$.

Tính giá trị biểu thức:

$$P = \frac{1}{(a+b)^3} \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) + \frac{3}{(a+b)^4} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{6}{(a+b)^5} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

Giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } P &= \frac{1}{(a+b)^3} \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right) + \frac{3}{(a+b)^4} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{6}{(a+b)^5} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3 \cdot a^3 b^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4 \cdot a^2 b^2} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5 \cdot ab} \\ &= \frac{(a+b)^3 - 3ab(a+b)}{(a+b)^3} + \frac{3[(a+b)^2 - 2ab]}{(a+b)^4} + \frac{6}{(a+b)^4} \\ &= 1 - \frac{3}{(a+b)^2} + \frac{3}{(a+b)^2} - \frac{6}{(a+b)^4} + \frac{6}{(a+b)^4} \\ &= 1\end{aligned}$$

Bài 72: Cho x, y thỏa mãn $0 < x < 1$; $0 < y < 1$ và $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$.

Tính giá trị biểu thức: $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$

Giải

Ta có: $0 < x < 1$ do đó $1-x > 0$ nên $\frac{x}{1-x} > 0$, tương tự ta được $\frac{y}{1-y} > 0$

$$\text{Mà } \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$$

Do đó:

$$\frac{x}{1-x} < 1 \quad \text{và} \quad \frac{y}{1-y} < 1 \quad \text{và} \quad x(1-y) + y(1-x) = (1-x)(1-y)$$

$$\Leftrightarrow x < 1-x \quad \text{và} \quad y < 1-y \quad \text{và} \quad x - xy + y - xy = 1 - x - y + xy$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad y < \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad 2x + 2y - 1 < 3xy$$

$$\Leftrightarrow x + y < 1 \quad \text{và} \quad 2x + 2y - 1 < 3xy$$

$$\Leftrightarrow x + y - 1 < 0 \quad \text{và} \quad 2x + 2y - 1 < 3xy$$

Vậy:

$$\begin{aligned} P &= x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2} \\ &= x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 3xy} \\ &= x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 2x - 2y + 1} \\ &= x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 2(x+y) + 1} \\ &= x + y + \sqrt{(x+y-1)^2} \\ &= x + y + |x+y-1| \\ &= x + y - x - y + 1 \text{ do } x+y-1 < 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bài 73: Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn:

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2018. \text{ Tính giá trị biểu thức: } P = c^2(a+b)$$

Giải

$$\text{Ta có: } a^2(b+c) = b^2(c+a)$$

$$\Leftrightarrow a^2b + a^2c = b^2c + ab^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b - ab^2 + a^2c - b^2c = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b) + c(a^2 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)[ab + c(a+b)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(ab + ac + bc) = 0$$

Do $a \neq b$ Nên: $ab + ac + bc = 0$

Suy ra: $a^2(b+c) = a(ab+ac) = a(-bc) = -abc$

$P = c^2(a+b) = c(ca+cb) = c(-ab) = -abc$

Vậy: $P = 2018$

Bài 74: Cho ba số thực dương a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\sqrt{a+b-c} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$.

Chứng minh: $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

Giải

Ta có: $\sqrt{a+b-c} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$

Nên: $a+b-c = a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}$

$$\Leftrightarrow c - \sqrt{bc} + \sqrt{ab} - \sqrt{ac} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{c}(\sqrt{c} - \sqrt{b}) + \sqrt{a}(\sqrt{b} - \sqrt{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{c} \text{ hoặc } \sqrt{b} = \sqrt{c}$$

$$\Leftrightarrow a = c \text{ hoặc } b = c$$

Khi $a = c$ hoặc $b = c$ thì dễ thấy $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

Vậy: $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 - c^2$

Bài 75: Cho a, b là hai số thực thỏa điều kiện: $a^2 + b^2 = 2(8+ab)$ và $a < b$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = a^2(a+1) - b^2(b-1) + ab - 3ab(a-b+1) + 64$

Giải

Ta có: $a^2 + b^2 = 2(8+ab) \Leftrightarrow (a-b)^2 = 16 \Rightarrow a-b = -4$ (do $a < b$)

$$P = a^2(a+1) - b^2(b-1) + ab - 3ab(a-b+1) + 64$$

$$P = (a-b)^3 + (a-b)^2 + 64$$

$$P = (-4)^3 + (-4)^2 + 64 = 16$$

MỘT SỐ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ

Bài 1. Cho ba số a, b, c khác 0 thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 0$

a) Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

b) Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3}{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + abc}$

(TPHCM, ngày 24/03/2013)

Bài 2. Cho hai số dương a, b và số c khác 0 thỏa điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b-c}$

(TPHCM, ngày 19/03/2014)

Bài 3. Cho ba số dương a, b, c thỏa điều kiện $a + b + c = \frac{1}{abc}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{(1+b^2c^2)(1+a^2c^2)}{c^2 + a^2b^2c^2}} = a + b$

(TPHCM, ngày 24/03/2015)

Bài 4. Cho hai số thực phân biệt a và b thỏa điều kiện $ab = a - b$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$

(TPHCM, ngày 22/03/2016)

Bài 5. Cho ba số a, b, c thỏa các điều kiện $a - b = 7; b - c = 3$

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc}$

(TPHCM, ngày 20/03/2017)

Bài 6. Chứng minh rằng nếu có: $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \\ a + b + c = abc \end{cases}$ thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

(TPHCM, năm học 2005 – 2006)

Bài 7. Cho hai số a, b thỏa các điều kiện: $a^2 + b^2 = 1$ và $a^4 + b^4 = \frac{1}{2}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = a^{2018} + b^{2018}$

(TPHCM, ngày 29/03/2018)

Bài 8. Cho x, y là các số thực sao cho: $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$

(TPHCM, ngày 13/03/2019)

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1:

a) Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Ta có: $a + b + c = 0$

Nên: $a + b = -c$

Do đó:

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 \\ &= (-c)^3 - 3abc(-c) + c^3 \\ &= -c^3 + 3abc + c^3 \\ &= 3abc \end{aligned}$$

Cách khác: Theo bổ đề 2

Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$$\begin{aligned} &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= 0 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$\begin{aligned}
\text{b) Tính giá trị biểu thức } P &= \frac{(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3}{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + abc} \\
P &= \frac{(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+b-a)^3}{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + abc} \\
&= \frac{(-c-c)^3 + (-a-a)^3 + (-b-b)^3}{ab^2 + ac^2 - 2abc + ba^2 + bc^2 - 2abc + ca^2 + cb^2 - 2abc} \\
&= \frac{-8c^3 - 8b^3 - 8a^3}{a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) - 6abc} \\
&= \frac{-8(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2(-a) + b^2(-b) + c^2(-c) - 6abc} \\
&= \frac{-8.3abc}{-a^3 - b^3 - c^3 - 6abc} \\
&= \frac{-24abc}{-3abc - 6abc} \\
&= \frac{-24abc}{-9abc} \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Bài 2:

Ta có: $a, b > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ suy ra $c < 0$

Mặt khác: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$

Ta có:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c})^2 \\
&= a+c+b+c+2\sqrt{(a+c)(b+c)} \\
&= a+b+2c+2\sqrt{ab+bc+ac+c^2} \\
&= a+b+2c+2\sqrt{c^2} \\
&= a+b+2c+2\cdot|c| \\
&= a+b+2c-2c \quad (c < 0) \\
&= a+b
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b-c}$$

Bài 3:

Ta có: $a + b + c = \frac{1}{abc}$

$$\Leftrightarrow abc(a + b + c) = 1$$

$$\Leftrightarrow abc(a + b + c) + b^2c^2 = 1 + b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow bc(a^2 + ab + ac + bc) = 1 + b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow bc[a(a + b) + c(a + b)] = 1 + b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow bc(a + b)(a + c) = 1 + b^2c^2$$

Tương tự: $1 + a^2c^2 = ac(b + a)(b + c)$

Ta lại có: $c^2 + a^2b^2c^2 = c^2(1 + a^2b^2) = c^2.ab(c + a)(c + b)$

Vậy:

$$\sqrt{\frac{(1 + b^2c^2)(1 + a^2c^2)}{c^2 + a^2b^2c^2}} = \sqrt{\frac{bc(a + b)(a + c)ac(b + a)(b + c)}{c^2.ab(c + a)(c + b)}} = \sqrt{(a + b)^2} = a + b \text{ (do } a, b > 0 \text{)}$$

Bài 4:

Ta có: $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - a^2b^2}{ab} = \frac{(a - b)^2 + 2ab - a^2b^2}{ab} = \frac{a^2b^2 + 2ab - a^2b^2}{ab} = 2$

Bài 5:

Ta có: $a - b = 7; b - c = 3$

Nên: $a - c = 10$

Theo bổ đề 1, ta có: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

Do đó: $P = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 - c^2 - 2ab + 2bc} = \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca}{2(a + c)(a - c) - 4b(a - c)}$

$$= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2(a - c)(a + c - 2b)}$$

$$= \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{2(a - c)(a - b + c - b)}$$

$$= \frac{7^2 + 3^2 + 10^2}{2 \cdot 10 \cdot [7 + (-3)]}$$

$$= \frac{79}{40}$$

Bài 6:

Ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

Nên: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = -2 \cdot \frac{(c+a+b)}{abc} + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = -2 \cdot \frac{abc}{abc} + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$$

Bài 7.

Ta có: $a^4 + b^4 = \frac{1}{2}$ Nên $2(a^4 + b^4) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = (a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4 + 2a^2b^2$.

Suy ra: $(a^2 - b^2)^2 = 0$ hay $a^2 = b^2$

Mà $a^2 + b^2 = 1$

Do đó: $a^2 = b^2 = \frac{1}{2}$

Ta có: $P = a^{2018} + b^{2018} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1009} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1009} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1009} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1008}$

Bài 8.

Ta có: $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$

Nên: $(2y-x)(2x+y) = xy$

Hay: $x^2 - y^2 = xy$

Do đó: $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1$ ($xy \neq 0$)

Suy ra: $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 = 1$ Nên: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2 = 1$ Vậy: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 3$

IV. HIỆU QUẢ CỦA SÁNG KIẾN

Các bài kiểm tra đồng loạt và kiểm tra học kỳ I của các năm học 2020-2021 và 2021-2022 có nhiều học sinh đạt điểm 9,5, 10. Điều này chứng tỏ học sinh làm được câu hỏi liên quan đến giá trị của biểu thức. Tức là giáo viên và học sinh có đầu tư vào dạng bài tập này.



Năm học 2020-2021

Ở khối lớp 9: Có 19 em dự thi học sinh giỏi môn toán cấp thành phố.

Kết quả: 3 em đạt giải nhì.

6 em đạt giải ba.

Trường Nguyễn An Khương có 12 em đạt giải môn toán cấp huyện.

Năm học 2021-2022

Ở khối lớp 9: Có 19 em dự thi học sinh giỏi môn toán cấp thành phố.

Kết quả: 3 em đạt giải nhì.

4 em đạt giải ba.

Trường Nguyễn An Khương có 11 em đạt giải môn toán cấp huyện.

Số học sinh giỏi lớp 9 cấp huyện của trường Nguyễn An Khương và số học sinh giỏi lớp 9 cấp thành phố của huyện ở mức ổn định.

C. KẾT LUẬN.

I. BIỆN PHÁP TRIỂN KHAI.

Hai năm trước đây đề tài này đã được phổ biến cho giáo viên và học sinh tham khảo. Đã được sự ủng hộ nhiều về phía giáo viên và học sinh. Tài liệu này cũng được giáo viên giảng dạy cho học sinh qua các kỳ thi.

Các em thi học sinh giỏi cấp thành phố cũng sử dụng tài liệu này.

Đề tài này có thể áp dụng rộng rãi ở các trường ở các khối lớp 8 và 9.

II. HƯỚNG PHÁT TRIỂN CỦA ĐỀ TÀI.

Đề thi hiện nay liên quan đến giá trị của biểu thức mang tính ngắn gọn ngay cả trong bài giải. Nhưng cũng mang lại cảm giác phấn đấu thử thách cho học sinh.

Hướng của câu hỏi này còn tồn tại trong nhiều năm sau. Cho nên tài liệu này giáo viên và học sinh vẫn cần sử dụng lâu dài.

Qua giải pháp tôi nhận xét được một số nội dung sau:

Giáo viên:

- . Có mục tiêu rõ ràng để soạn bài tập và là cơ sở để họ nâng cao kỹ thuật giải toán.
- . Định hướng soạn bài tập cho các nội dung khác.

Học sinh:

- . Có mục tiêu rõ ràng để phấn đấu đạt được qua các kỳ thi.
- . Giáo viên và học sinh thích thú với công việc của mình hơn.
- . Kết quả đạt được có nhiều khả năng xảy ra.

Với bài viết trên, chắc chắn rằng nội dung chưa thật sự hoàn thiện.

Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của quý thầy cô.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Ngày 12/04/2022

Phạm Văn Khải

D. TÀI LIỆU THAM KHẢO

Các đề thi học sinh giỏi cấp thành phố (TP.HCM).

Các đề thi học sinh giỏi cấp quận (huyện) của TP.HCM

Các đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh ở các tỉnh thành khác.