

CHƯƠNG I. CĂN BẬC HAI. CĂN BẬC BA

BÀI 1. CĂN BẬC HAI

I. Căn bậc hai số học

Căn bậc hai của một số a không âm là số x sao cho $x^2 = a$

Số dương a có đúng hai căn bậc hai: số dương kí hiệu là $\sqrt{a}$, số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$

$$\sqrt{0} = 0$$

Với số dương a , số $\sqrt{a}$ được gọi là căn bậc hai số học của a .

Số 0 được gọi là căn bậc hai số học của 0.

VD: Căn bậc hai của 4 là $\sqrt{4} = 2$ và $-\sqrt{4} = -2$

Căn bậc hai của 25 là $\sqrt{25} = 5$ và $-\sqrt{25} = -5$

Căn bậc hai của 3 là $\sqrt{3}$ và $-\sqrt{3}$

Căn bậc hai số học của $\frac{4}{9}$ là $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ và $-\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}$

$$\text{*Chú ý } \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases} \quad \left(\sqrt{A}\right)^2 = A \quad (A \geq 0)$$

II. So sánh các căn bậc hai số học

***Định lý:** Với hai số a, b không âm, ta có: $a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

VD: So sánh

a. $\sqrt{31}$ và $\sqrt{29}$

Ta có: $31 > 29$ nên $\sqrt{31} > \sqrt{29}$

b. 3 và $\sqrt{7}$

Ta có: $9 > 7$ nên $\sqrt{9} > \sqrt{7}$. Suy ra $3 > \sqrt{7}$

BÀI TẬP

DẠNG 1: Thu gọn biểu thức

1. Khai triển các hằng đẳng thức

VD 1:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2} + 1\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2 \\ &= 2 + 2\sqrt{2} + 1 \\ &= 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

VD 2

$$\begin{aligned}
& (3 - \sqrt{5})^2 \\
&= 3^2 - 2.3.\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 \\
&= 9 - 6\sqrt{5} + 5 \\
&= 14 - 6\sqrt{5}
\end{aligned}$$

VD 3:

$$\begin{aligned}
& 5(\sqrt{3} - 1) + (2 + \sqrt{3})^2 \\
&= 5\sqrt{3} - 5 + 2^2 + 2.2.\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\
&= 5\sqrt{3} - 5 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\
&= (-5 + 4 + 3) + 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \\
&= 2 + 9\sqrt{3}
\end{aligned}$$

2. Tính

$$A = \sqrt{4} - \sqrt{81} + \sqrt{16} + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 + \sqrt{121}$$

$$E = (\sqrt{2} + 1)^2 + \sqrt{16} + 2.(\sqrt{2} - 3)$$

$$F = 5.(3\sqrt{7} - 2) + (\sqrt{7} - 2)^2$$

$$G = 2.(3\sqrt{5} - 1) + (2\sqrt{3} + 1)^2$$

DẠNG 2: Tìm x

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

VD 1:

$$\sqrt{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow x = 9$$

VD 2:

$$\sqrt{x+1} = 5$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = 5^2$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 25$$

$$\Leftrightarrow x = 24$$

VD 3:

$$3\sqrt{2x-1} - 4 = 8$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1} = 8 + 4$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1} = 12$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = 16$$

$$\Leftrightarrow 2x = 17$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{17}{2}$$

VD 4:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} = x + 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + 7x + 1}\right)^2 = (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 7x + 1 = x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 1 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Bài 1: Tìm x

a. $\sqrt{x} = 7$

b. $\sqrt{2x+3} = 5$

c. $3\sqrt{x-1} = 30$

d. $4\sqrt{x+2} - 1 = 6$

e. $\sqrt{x^2 - 3x + 4} = x + 1$

f. $\sqrt{4x^2 - 3x + 5} = 2x - 1$

DẠNG 3: Tìm x

$$\sqrt{A} < B \ (B > 0) \quad \sqrt{A} \leq B \ (B \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq A < B^2 \quad \Leftrightarrow 0 \leq A \leq B^2$$

$$\sqrt{A} > B \ (B \geq 0) \quad \sqrt{A} \geq B \ (B \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow A > B^2 \quad \Leftrightarrow A \geq B^2$$

VD 1: $\sqrt{x} < 2$

$$\sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{x})^2 < 2^2 \Leftrightarrow 0 \leq x < 4$$

VD 2: $\sqrt{x-1} < 3$

$$\sqrt{x-1} < 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{x-1})^2 < 3^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x-1 < 9$$

$$\Leftrightarrow 0+1 \leq x < 9+1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x < 10$$

VD 3: $\sqrt{x-3} > 4$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-3})^2 > 4^2$$

$$\Leftrightarrow x-3 > 16$$

$$\Leftrightarrow x > 19$$

VD 4: $2\sqrt{x-4} - 1 \geq 5$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-4} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-4} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x-4 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow x \geq 13$$

BÀI TẬP

a. $\sqrt{x-1} > 6$

b. $\sqrt{4x-2} \leq 1$

c. $\sqrt{2x-1} - 3 \leq 2$

d. $2\sqrt{2x-1} - 3 > 7$

BÀI 2. CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẸNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

1. Căn thức bậc hai

Cho A là một biểu thức đại số, người ta gọi $\sqrt{A}$ gọi là căn thức bậc hai của A, còn A gọi là biểu thức dưới dấu căn hay biểu thức lấy căn.

VD: $\sqrt{25-x^2}$ là căn thức bậc hai của $25-x^2$, $25-x^2$ là biểu thức dưới dấu căn

$\sqrt{A}$ xác định (hay có nghĩa) khi $A \geq 0$

VD: Tìm x để các biểu thức sau có nghĩa

a. $\sqrt{2x+1}$ có nghĩa khi $2x+1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{2}$$

b. $\sqrt{5-3x}$ có nghĩa khi $5-3x \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3x \geq -5$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$$

c. $\sqrt{\frac{5}{x+6}}$ có nghĩa khi $\frac{5}{x+6} \geq 0$

$$\Leftrightarrow x+6 > 0 \quad (\text{vì } 5 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x > -6$$

d. $\sqrt{\frac{-4}{2x+3}}$ có nghĩa khi $\frac{-4}{2x+3} \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2x+3 > 0 \quad (\text{vì } -4 < 0)$$

$$\Leftrightarrow 2x > -3$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{-3}{2}$$

Thực hành: Tìm x để biểu thức sau có nghĩa

a. $\sqrt{3x-6}$

b. $\sqrt{16-2x}$

c. $\sqrt{\frac{5}{2x+3}}$

d. $\sqrt{\frac{-3}{5x+6}}$

3. Hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$

Định lí: Với mọi số A, ta có $\sqrt{A^2} = |A|$

*Chú ý: $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$

VD: Rút gọn

a. $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$

b. $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = -(2-\sqrt{5}) = -2+\sqrt{5}$

c. $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$

$$\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2 \text{ (vì } x \geq 2)$$

d. $\sqrt{(5-x)^2}$ với $x > 5$

$$\sqrt{(5-x)^2} = |5-x| = -(5-x) = -5+x \text{ (vì } x > 5)$$

Thực hành:

a. $\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}$

b. $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$

c. $\sqrt{(3\sqrt{2}-1)^2}$

d. $\sqrt{(2\sqrt{6}-3)^2}$

e. $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$

f. $\sqrt{(x+5)^2}$ với $x < -5$