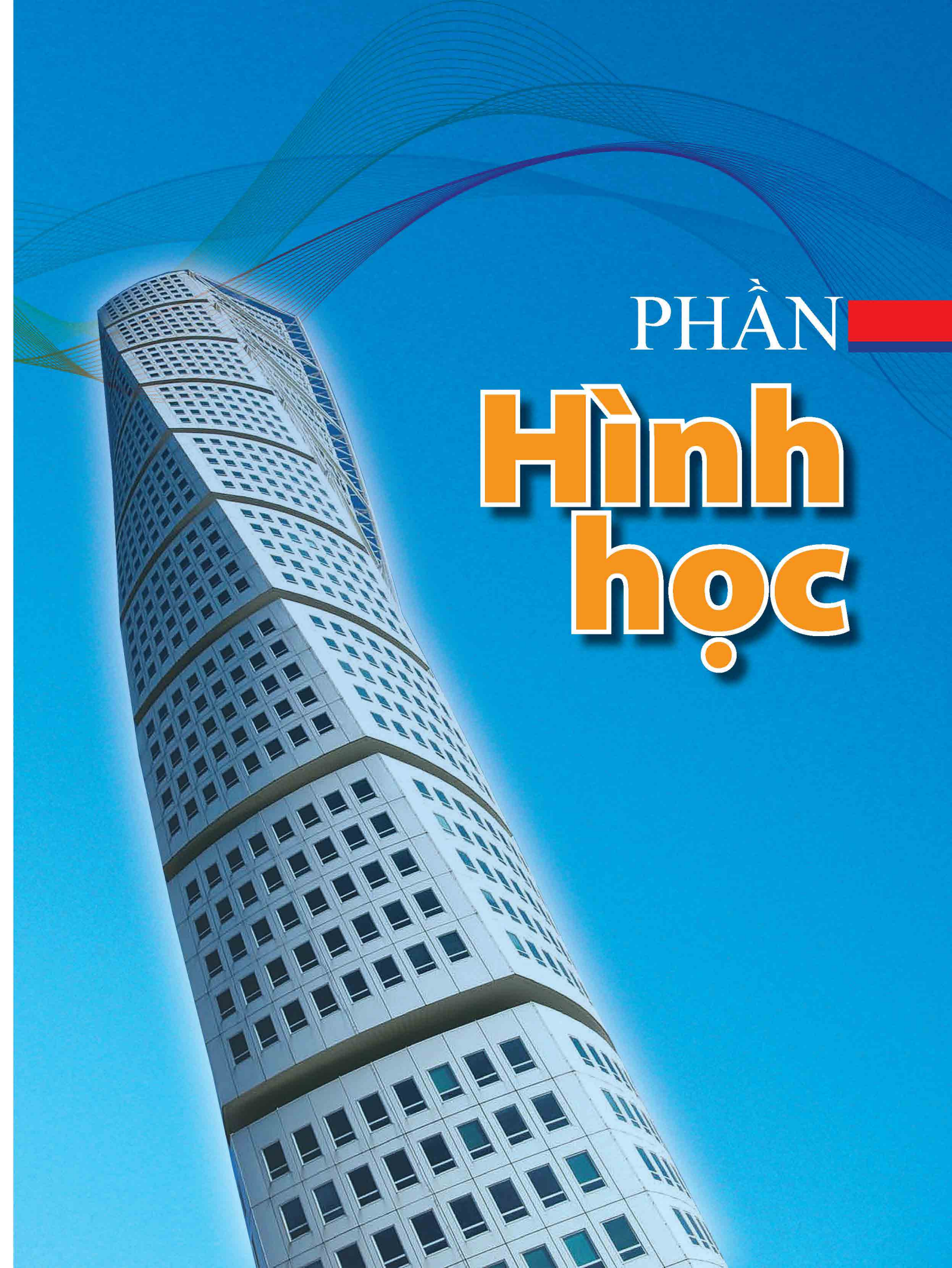




PHẦN

Hình học

CHƯƠNG 1

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

- Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông
- Tỷ số lượng giác của góc nhọn
- Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông
- Ứng dụng của tỷ số lượng giác



Trong hình là hải đăng Kê Gà, thuộc tỉnh Bình Thuận, cao 65 m trên mực nước biển.

Làm thế nào để tính được khoảng cách từ ngọn hải đăng đến các con tàu ở xa ?

Hệ thức lượng trong tam giác vuông sẽ cho các bạn câu trả lời.

MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

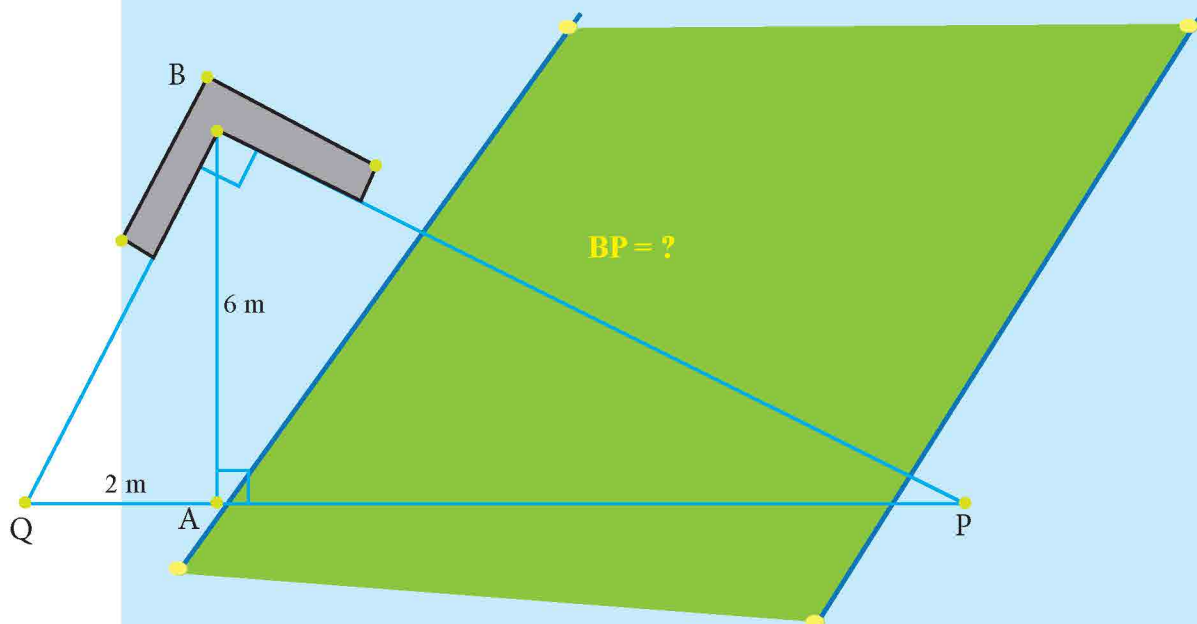
Hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

Hệ thức giữa ba cạnh của tam giác vuông

Hệ thức giữa đường cao ứng với cạnh huyền và hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền

Hệ thức diện tích

Hệ thức giữa đường cao và hai cạnh góc vuông



Trong đời sống hằng ngày, chúng ta thường gặp các bài toán liên quan đến tính toán cạnh và đường cao của các tam giác vuông.



1. HỆ THỨC GIỮA CẠNH GÓC VUÔNG VÀ HÌNH CHIẾU CỦA NÓ TRÊN CẠNH HUYỀN

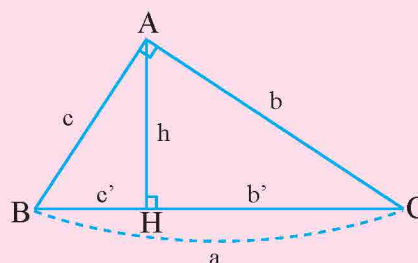
Hoạt động

1

Xét tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền BC = a, các cạnh góc vuông AC = b và AB = c. Gọi AH = h là đường cao ứng với cạnh huyền và HC = b', HB = c' lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC.

a) Chứng minh các tam giác HBA và ABC đồng dạng, từ đó so sánh c^2 và $c' \cdot a$.

b) Chứng minh các tam giác HCA và ACB đồng dạng, từ đó so sánh b^2 và $b' \cdot a$.



Hình 1

Định lý 1

Trong một tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

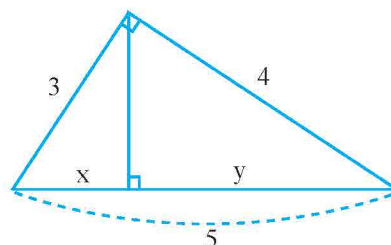
Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 1, ta có :

$$BA^2 = BC \cdot BH \text{ hay } c^2 = a \cdot c' ;$$

$$CA^2 = CB \cdot CH \text{ hay } b^2 = a \cdot b' .$$

Ví dụ : Trong tam giác vuông có ba cạnh (đơn vị cm) là 6, 8, 10, hình chiếu của hai cạnh góc vuông xuống cạnh huyền có độ dài lần lượt là :

$$\frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ (cm)} ; \quad \frac{8^2}{10} = 6,4 \text{ (cm)} .$$



Hình 2



THỬ TÀI BẠN

Tìm x, y trong hình 2.



BẠN NÀO ĐÚNG ?

Có thể tính ba cạnh của một tam giác vuông khi biết độ dài hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.



Dũng



Lan

Không thể tính được đâu.

Theo em, bạn nào đúng ?



2. HỆ THỨC GIỮA BA CẠNH CỦA TAM GIÁC VUÔNG

Hoạt động

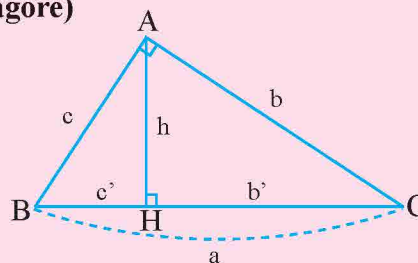
2

(Một cách khác để chứng minh định lý Pythagore)

- So sánh a với tổng $b' + c'$.
- Hãy cộng hai đẳng thức (1) và (2) sau đây, rồi rút gọn và nêu nhận xét :

$$b^2 = a \cdot b' \quad (1)$$

$$c^2 = a \cdot c' \quad (2)$$



Hình 3

Định lý Pythagore

Trong một tam giác vuông, bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.

Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 3, ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ hay } a^2 = b^2 + c^2.$$

Ví dụ 1 : Cho tam giác vuông có độ dài ba cạnh là a, b, c ($a > b > c$). Điền các số thích hợp vào các ô trống sau :

a	b	c
5	4	
	12	5
17		8
	24	7

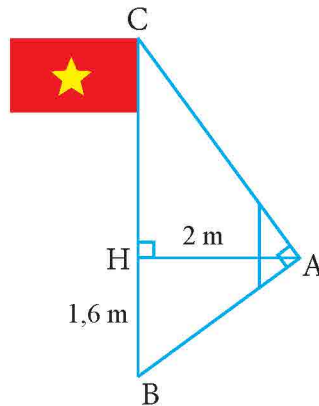
Ví dụ 2 : Một học sinh cầm một cái thước ê ke đứng cách cột cờ 2 m. Bạn ấy lần lượt nhìn theo hai cạnh góc vuông của ê ke thì thấy ngọn và gốc cột cờ. Biết mắt học sinh cách mặt đất 1,6 m. Hãy tính chiều cao của cột cờ.

Giải : Xem hình 4, ta có :

$$BH \cdot BC = BA^2 = BH^2 + AH^2 = 1,6^2 + 2^2 = 6,56$$

$$\Rightarrow BC = \frac{6,56}{1,6} = 4,1 \text{ (m)}.$$

Vậy cột cờ cao 4,1 m.



Hình 4

✓ BẠN NÀO ĐÚNG ?

Hai cạnh và đường chéo của một hình chữ nhật có số đo lần lượt là : 6 cm ; 8 cm ; 9 cm.



Dũng



Lan

Bạn đo sai rồi.

Theo em, bạn nào đúng ?



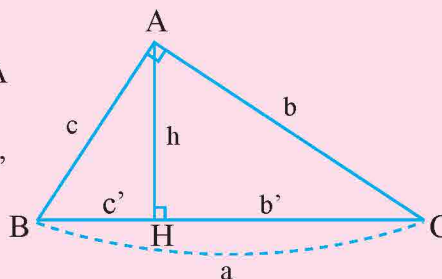
3. HỆ THỨC GIỮA ĐƯỜNG CAO ỨNG VỚI CẠNH HUYỀN VÀ HÌNH CHIẾU CỦA HAI CẠNH GÓC VUÔNG TRÊN CẠNH HUYỀN

Hoạt động

3

Xem hình 5.

- Hãy chứng tỏ hai tam giác AHB và CHA đồng dạng.
- Lập tỉ số đồng dạng, từ đó tính h theo b' và c' .



Hình 5

Định lý 2

Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 5, ta có :

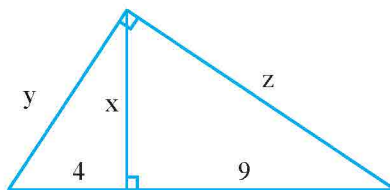
$$HA^2 = HB \cdot HC \text{ hay } h^2 = b' \cdot c'.$$

Ví dụ : Nếu một tam giác vuông có độ dài hình chiếu của hai cạnh góc vuông xuống cạnh huyền là 9 cm và 16 cm thì độ dài đường cao ứng với cạnh huyền là :

$$h = \sqrt{b' \cdot c'} = \sqrt{9 \cdot 16} = 12 \text{ (cm)}.$$

THỬ TÀI BẠN

Tìm x, y, z trong hình 6.



Hình 6



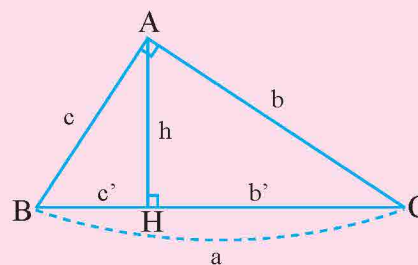
4. HỆ THỨC DIỆN TÍCH

Hoạt động

4

Xem hình 7.

- Hãy tính diện tích tam giác ABC theo cạnh huyền a và đường cao tương ứng h.
- Hãy tính diện tích tam giác ABC theo hai cạnh góc vuông b, c.
- So sánh và nêu nhận xét.



Hình 7

Định lý

Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.

Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 7, ta có :

$$BC \cdot AH = AB \cdot AC \text{ hay } b \cdot c = a \cdot h.$$

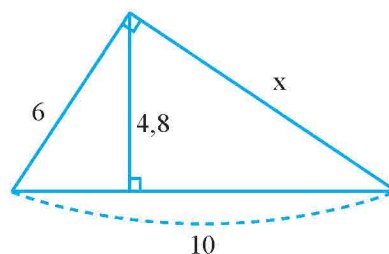
Ví dụ : Một tam giác vuông nếu có độ dài ba cạnh là 3 cm ; 4 cm ; 5 cm thì độ dài đường cao ứng với cạnh huyền bằng :

$$h = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ (cm)}.$$



THỬ TÀI BẠN

Tìm x trên hình 8 bằng hai cách khác nhau.



Hình 8

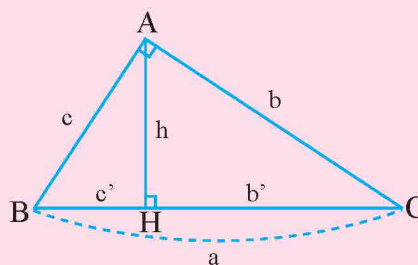


5. HỆ THỨC GIỮA ĐƯỜNG CAO VÀ HAI CẠNH GÓC VUÔNG

Hoạt động

5

Bằng cách sử dụng các đẳng thức $a^2 = b^2 + c^2$ và $b \cdot c = a \cdot h$, hãy tính theo h biểu thức $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ theo gợi ý sau : $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2}$.



Hình 9

Định lý

Trong một tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.

Cụ thể đối với tam giác vuông trong hình 9, ta có :

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2} \text{ hay } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}.$$

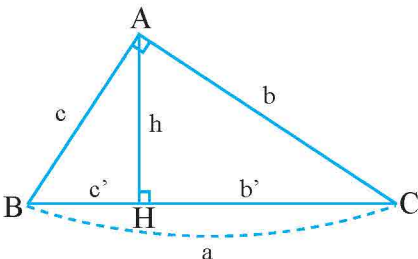
Ví dụ : Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 và 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này mà không cần tính cạnh huyền.

Giải : Áp dụng công thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, ta có :

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144} \Rightarrow h = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ (cm)}.$$

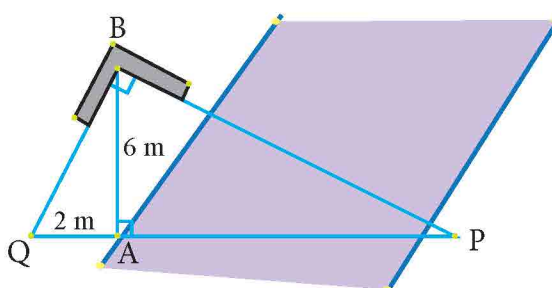
THỬ TÀI BẠN

- Cho tam giác vuông có các cạnh góc vuông dài 6 cm và 8 cm. Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông bằng hai cách khác nhau.
- Điền các số thích hợp vào các chỗ trống sau đây :

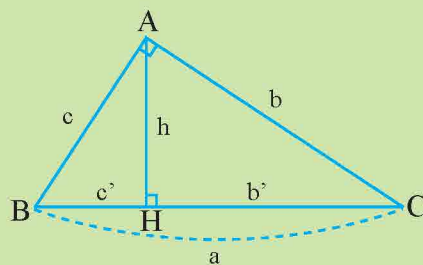
 $c = 6 \text{ cm}, b = 8 \text{ cm}$	$a =$
	$c' =$
	$b' =$
	$h =$
	$S_{ABC} =$
	Chu vi tam giác ABC =

THƯ GIÃN

Hùng muốn tính khoảng cách AP nối hai điểm ở hai bên bờ một con rạch. Bạn ấy đặt đỉnh góc vuông ê ke vào đầu B của một cái sào BA dài 6 m. Nhìn theo hai cạnh góc vuông của ê ke thì lần lượt thấy điểm Q và điểm P. Hùng đo thấy đoạn QA dài 2 m. Em có thể tính nhằm chiều dài đoạn AP được không ?



GHI NHỚ



Trong một tam giác vuông

$c^2 = a \cdot c'$	Bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.
$b^2 = a \cdot b'$	
$a^2 = b^2 + c^2$	Bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.
$h^2 = b' \cdot c'$	Bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.
$b \cdot c = a \cdot h$	Tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.
$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$	Nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 9$ cm, $BC = 15$ cm. AH là đường cao (H thuộc cạnh BC). Tính BH, CH, AC và AH.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 5$ cm, $AB = 4$ cm. Tính :

a) Cạnh huyền BC.

b) Hình chiếu của AB và AC trên cạnh huyền.

c) Đường cao AH.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 40$ cm, $AC = 36$ cm. Tính AB, BH, CH và AH.

4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 24$ cm. Tính AB, AC, cho biết $AB = \frac{2}{3}AC$.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A có AH là đường cao. $BH = 10$ cm, $CH = 42$ cm. Tính BC, AH, AB và AC.

6. Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 10$ cm. A, B là hai điểm trên đường tròn (O) và I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

a) Tính AB nếu $OI = 7$ cm.

b) Tính OI nếu $AB = 14$ cm.

7. Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 53$ cm. C là một điểm trên đường tròn sao cho $AC = 45$ cm. Gọi H là hình chiếu của C trên AB. Tính BC, AH, BH, CH và OH.

8. Cho hình thang cân ABCD có đáy lớn $AB = 15$ cm, đáy nhỏ $CD = 5$ cm và góc A bằng 60° .

a) Tính cạnh BC.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính MN.

9. Cho tứ giác ABCD có $AB = AC = AD = 20$ cm, góc B bằng 60° và góc A bằng 90° .

a) Tính đường chéo BD.

b) Tính khoảng cách BH và DK từ hai điểm B và D đến AC.

c) Tính HK.

d) Vẽ BE vuông góc với DC kéo dài. Tính BE, CE, DC.

10. Cho đoạn thẳng $AB = 2a$. Từ trung điểm O của AB vẽ Ox vuông góc với AB. Trên Ox lấy điểm D sao cho $OD = \frac{a}{2}$. Từ B vẽ BC vuông góc với AD kéo dài.

a) Tính AD, AC và BC theo a.

b) Kéo dài DO một đoạn $OE = a$. Chứng minh bốn điểm A, C, B, E cùng nằm trên một đường tròn.

c) Vẽ đường vuông góc với BC tại B cắt CE tại F. Tính BF.

d) Gọi P là giao điểm của AB và CE. Tính AP và BP.

11. Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 16$ cm, $AH = 6$ cm. Vẽ điểm D trên đoạn BH sao cho $BD = 3,5$ cm. Chứng minh rằng tam giác DAC vuông.

LUYỆN TẬP

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $HB = 9$ cm, $HC = 16$ cm. Tính các độ dài AB, AC.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 6$ cm, $HC - HB = 9$ cm. Tính các độ dài HB, HC.

3. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, đường cao $AH = 18$ cm. Tính chu vi tam giác ABC.

4. Cho hình thang ABCD có chiều dài hai đáy AB và CD lần lượt là 9 cm và 30 cm, chiều dài hai cạnh bên AD và BC lần lượt là 13 cm và 20 cm. Tính diện tích hình thang.

5. Cho tam giác ABC vuông tại A có diện tích $37,5 \text{ cm}^2$, $AB < AC$, đường cao AH có độ dài 6 cm. Tính các độ dài AB, AC.

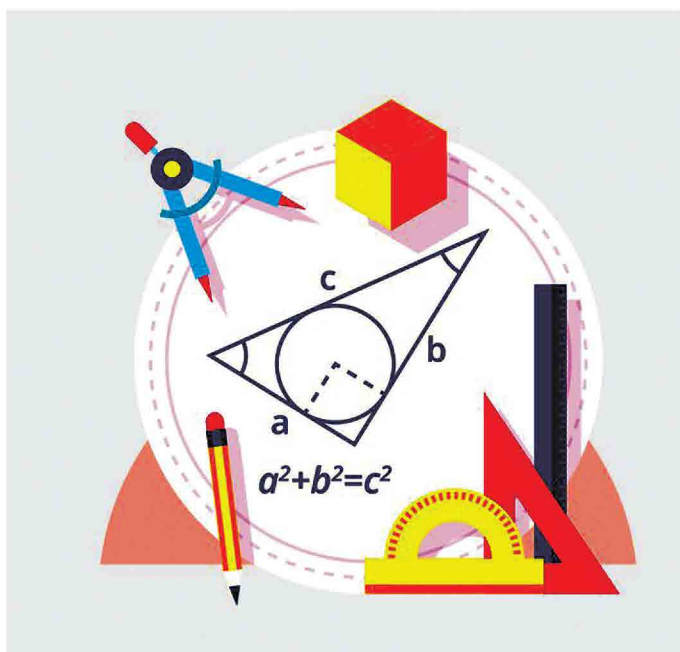
6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, điểm M thuộc cạnh BC và $AM = m$. Tính tổng $MB^2 + MC^2$ theo m.

7. Cho tam giác ABC vuông tại A, vẽ đường cao AH. Gọi E và D lần lượt là hình chiếu của H trên AB và AC. Cho biết $HD = 18$ cm, $HE = 12$ cm. Tìm các độ dài AB, AC.

8. Một tam giác vuông có cạnh huyền là 6,15 cm và đường cao tương ứng là 3 cm. Tìm các cạnh góc vuông của tam giác.

9. Cạnh huyền của một tam giác vuông lớn hơn một cạnh góc vuông của tam giác là 9 cm, còn tổng hai cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền là 6 cm. Tính chu vi và diện tích tam giác vuông đó.

10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Điểm D di động trên cạnh AC. Đường thẳng d vuông góc với AC tại C cắt đường BD tại E. Chứng minh rằng khi D di chuyển trên cạnh AC thì tổng $\frac{1}{BD^2} + \frac{1}{BE^2}$ không đổi.





CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY BẰNG HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Trong đại số, ta có bất đẳng thức Cauchy được phát biểu như sau :

Cho hai số dương a và b , ta luôn có : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$.

Dấu bằng chỉ xảy ra khi $a = b$.

Các em có thể dùng các hệ thức vừa học để chứng minh bất đẳng thức nổi tiếng này.

– Trên một đường thẳng lấy theo thứ tự ba điểm A, H, B sao cho $HA = a, HB = b$.

– Vẽ nửa đường tròn tâm O có đường kính AB .

Đường tròn này có bán kính $R = OM = \frac{AB}{2} = \frac{a+b}{2}$.

– Vẽ đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn tại C .

Ta có $OA = OB = OC$ nên tam giác ABC vuông tại C . Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có :

$$HC^2 = HA.HB.$$

Suy ra $h = HC = \sqrt{HA.HB} = \sqrt{a.b}$.

Trong nửa đường tròn, ta luôn có :

$$OC \geq HC \Rightarrow R \geq h \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}.$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi : $H \equiv O \Leftrightarrow a = b$.

Vậy ta đã chứng minh bất đẳng thức Cauchy bằng cách vận dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Lưu ý :

$\frac{a+b}{2}$ được gọi là **trung bình cộng** của hai số a, b ;

$\sqrt{a.b}$ được gọi là **trung bình nhân** của hai số dương a, b .

Như vậy :

– Hệ thức lượng vừa dùng trong chứng minh trên có thể được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông đường cao ứng với cạnh huyền luôn bằng trung bình nhân hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

– Bất đẳng thức Cauchy có thể được phát biểu như sau :

Trung bình cộng hai số không âm luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân của hai số đó. Dấu bằng chỉ xảy ra khi hai số đó bằng nhau.

Ta thấy ĐẠI SỐ và HÌNH HỌC là hai người bạn tốt luôn hỗ trợ cho nhau trong việc học toán phải không các em !

