PHƯƠNG TRÌNH

A. PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Cho hai biểu thức A(x) và B(x) có cùng biến x.
Ta gọi: **A(x) = B(x)** là một phương trình với ẩn là x.
Trong đó ta gọi: **A(x)** là vế trái của phương trình.
B(x) là vế phải của phương trình.

Ví dụ: $8x - 2 = x + 6$ là phương trình với ẩn x.
$y^2 + 1 = y - 5$ là phương trình với ẩn y.
$t^4 = t$ là phương trình với ẩn .

Bạn hãy viết: Một phương trình có ẩn là x :
Một phương trình có ẩn là m :

Chú ý: x = 8 cũng được coi là một phương trình.
x = m (với m là một số nào đó) cũng được coi là một phương trình.

B. NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Xét phương trình: $5x = x + 8$

Với x = 2 thì vế trái của phương trình có giá trị là: 5.2 = 10
vế phải của phương trình có giá trị là: 2 + 8 = 10
Ta nhận thấy hai vế của phương trình có cùng giá trị là 10.
Người ta gọi: x = 2 là một nghiệm của phương trình.

Với x = 4 thì vế trái của phương trình có giá trị là: 5.4 = 20
vế phải của phương trình có giá trị là: 4 + 8 = 12
Ta nhận thấy hai vế của phương trình không có cùng một giá trị.
Người ta gọi: x = 4 không là nghiệm của phương trình.

Thực hành:

Hãy tìm một nghiệm của phương trình: $3x = 20 - x$

Hãy tìm hai nghiệm của phương trình: $x^2 = 16$

Hãy tìm ba nghiệm của phương trình: $x^3 = x$

Hãy tìm mười nghiệm của phương trình: $3x + 1 = 3x + 1$

Hãy tìm nghiệm của phương trình: $x + 3 = x + 1$

Nhận xét:

Một phương trình có thể có một nghiệm, hai nghiệm, ba nghiệm, …, nhưng cũng có thể có vô số nghiệm hoặc không có nghiệm nào (vô nghiệm).

Ví dụ:

Phương trình: $3x = 20 - x$ chỉ có một nghiệm là x = 5.

Phương trình: $x^2 = 16$ có hai nghiệm là x= 4 và x = − 4.

Phương trình: $x^3 = x$ có ba nghiệm là x= 0 và x= 1 và x = − 1.

Phương trình: $3x + 1 = 3x + 1$ có vô số nghiệm.

Phương trình: $x^2 = -4$ vô nghiệm.

C. TẬP NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình gọi là tập nghiệm của phương trình đó và thường ký hiệu là S.

Ví dụ:

Phương trình: $3x = 20 - x$ có tập nghiệm là: $S = \{5\}$

Phương trình: $x^2 = 16$ có tập nghiệm là: $S = \{\pm 4\}$

Phương trình: $x^3 = x$ có tập nghiệm là: $S = \{0; \pm 1\}$

Phương trình: $3x + 1 = 3x + 1$ có tập nghiệm là: $S = R$

Phương trình: $x^2 = -4$ có tập nghiệm là: $S = \varnothing$

D. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Giải một phương trình tức là phải tìm tập nghiệm của phương trình đó.

E. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Ta gọi hai phương trình có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương.

Ví dụ:

$3x = 20 - x \Leftrightarrow 4x = 20$ do có cùng tập nghiệm là: $S = \{5\}$

$x^2 = 16 \Leftrightarrow |x| = 4$ do có cùng tập nghiệm là: $S = \{\pm 4\}$

$x^3 = x \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) = 0$ do có cùng tập nghiệm là: $S = \{0; \pm 1\}$

$3x + 1 = 3x + 1 \Leftrightarrow x - 1 = x - 1$ do có cùng tập nghiệm là: $S = R$

$x^2 = -4 \Leftrightarrow 6x + 2 = 6x + 4$ do có cùng tập nghiệm là: $S = \varnothing$

Thực hành:

Hãy tìm tập nghiệm của phương trình: $x = 20 - x$ $S = \{ \quad \}$

Hãy tìm tập nghiệm của phương trình: $x^2 = 49$ $S = \{ \quad \}$

Hãy tìm tập nghiệm của phương trình: $x^3 = x^2$ $S = \{ \quad \}$

Hãy tìm tập nghiệm của phương trình: $x^4 + 2 = 0$

Hãy tìm tập nghiệm của phương trình: $x^4 + x = x^4 + x$

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẦN

Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng: ax + b = 0.
Trong đó: a và b là các số đã cho và $a \neq 0$.
x là ẩn số.

Ví dụ: $3x - 6 = 0$; $-2,5x + 8 = 0$ là các phương trình bậc nhất một ẩn.

B. HAI BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Nếu ta chuyển vế một hạng tử của một phương trình và đổi dấu hạng tử đó thì ta được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

Ví dụ: $3x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow 3x = 6$; $-2,5x + 8 = 0$ $\Leftrightarrow -2,5x = -8$

Nếu ta nhân (hoặc chia) hai vế của một phương trình với cùng một số khác 0 thì ta được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

Ví dụ: $3x - 6 = 0$ $\Leftrightarrow 3x = 6$ $\Leftrightarrow 3x.\frac{1}{3} = 6.\frac{1}{3}$

$-2,5x + 8 = 0$ $\Leftrightarrow -2,5x = -8$ $\Leftrightarrow -2,5x:(-2,5) = -8:(-2,5)$

C. ÁP DỤNG HAI BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG TRÊN ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẦN

Bài 1. Giải các phương trình: **a)** $5x - 15 = 0$ **b)** $-3,5x - 8 = 0$

c) $8^{10}x - 8^{12} = 0$ **d)** $\frac{1}{2}x + 12 = 0$

Giải

a) $5x - 15 = 0$

$\Leftrightarrow 5x = 15$

$\Leftrightarrow x = 3$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{3\}$

b) $-3,5x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

c) $8^{10}x - 8^{12} = 0$

d) $\frac{1}{2}x - 12 = 0$

D. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ DẠNG: $ax + b = 0$

Bài 2. Giải các phương trình: a) $8x - 15 = 2x - 18$ b) $4(x - 15) = 2(x + 3)$

Giải

a) $8x - 15 = 2x - 18$

$\Leftrightarrow 8x - 2x = -18 + 15$

$\Leftrightarrow 6x = -3$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$

b) $4(x - 15) = 2(x + 3)$

$\Leftrightarrow$

Chú ý: $0x = 0$

$\Leftrightarrow x \in R$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = R$

$0x = 2$ (vế trái là số khác 0)

$\Leftrightarrow x \in \varnothing$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \varnothing$

Bài 3. Giải các phương trình:

a) $(x - 3)^2 - x^2 = -6x + 9$ b) $(x - 5)(x + 4) = (x - 7)(x + 6)$

Bài 4. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{x - 3}{6} - \dfrac{x - 2}{4} = \dfrac{x - 2}{3}$ b) $\dfrac{x - 941}{41} + \dfrac{x - 931}{31} + \dfrac{x - 921}{21} = -3$

PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Phương trình tích là phương trình có dạng: A(x).B(x) = 0

Công thức giải: $A(x).B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ hoặc $B(x) = 0$

Bài 5. Giải các phương trình:

a) $(8x - 16)(-4x - 6) = 0$

b) $(5x - 20)(-6x - 9) = 0$

Giải

a) $(8x - 16)(-4x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow 8x - 16 = 0$ hoặc $-4x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 8x = 16$ hoặc $-4x = 6$

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -\dfrac{3}{2}$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{\dfrac{-3}{2}; 2\right\}$

b) $(5x - 20)(-6x - 9) = 0$

$\Leftrightarrow \quad = 0$ hoặc

Bài 6. Giải các phương trình:

a) $(5x - 15)(x^2 - 16) = 0$

b) $(6x + 15)(x^3 + 8) = 0$

Giải

Bài 7. Giải các phương trình:

a) $(75x - 150)^2 = (75x - 150)(45x - 30)$

b) $(91x - 273)^2 = (91x - 273)(41x - 73)$

Nhận xét: . Nếu ta tính vế trái và vế phải thì mất thời gian nhiều và cho ra phương trình bậc 2 giải cũng khó khăn.

. Nếu ta đơn giản hai vế của phương trình cho cùng một biểu thức là sai là do:

+ Do biểu thức đó chưa xác định khác 0

+ Phương trình sẽ mất đi một nghiệm.

. *Ta nhận thấy cả hai vế của phương trình đều có cùng một biểu thức, do đó để giải các phương trình này ta đưa về phương trình tích để giải.*

Giải

a) $(75x - 150)^2 = (75x - 150)(45x - 30)$

$\Leftrightarrow (75x - 150)^2 - (75x - 150)(45x - 30) = 0$

$\Leftrightarrow (75x - 150)\left[75x - 150 - (45x - 30)\right] = 0$

b) $(91x - 273)^2 = (91x - 273)(41x - 73)$

$\Leftrightarrow (75x - 150)[75x - 150 - 45x + 30] = 0$

$\Leftrightarrow (75x - 150)(30x - 120) = 0$

$\Leftrightarrow 75x - 150 = 0$ hoặc $30x - 120 = 0$

$\Leftrightarrow 75x = 150$ hoặc $30x = 120$

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 4$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{2; 4\}$

Bài 8. Giải các phương trình:

a) $(45x - 15)^2 = 90x - 30$ b) $(21x - 42)^2 = -63x + 126$

Giải

a) $(45x - 15)^2 = 90x - 30$ b) $(21x - 42)^2 = -63x + 126$

$\Leftrightarrow (45x - 15)^2 - 90x + 30 = 0$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (45x - 15)^2 - 2(45x - 15) = 0$

$\Leftrightarrow (45x - 15)(45x - 15 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 45x - 15 = 0$ hoặc $45x - 17 = 0$

$\Leftrightarrow 45x = 15$ hoặc $45x = 17$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = \frac{17}{45}$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{\frac{1}{3}; \frac{17}{45}\right\}$

Bài 9. Giải các phương trình:

a) $x^2 - 3x - 40 = 0$ b) $x^2 + 3x - 40 = 0$

c) $x^2 - 3x - 28 = 0$ d) $x^2 + 3x - 10 = 0$

e) $x^2 = 8x - 15$ f) $x^2 = 7x + 18$

g) $40x^2 - 3x - 1 = 0$ h) $28x^2 + 3x - 1 = 0$

k) $(41x - 33)^2 - 3(41x - 33)x - 40 = 0$

m) $(41x - 33)^2 - 3(41x - 33)(31x - 11) - 40(31x - 11)^2 = 0$

Nhận xét: . Các phương trình đều đưa về phương trình tích để giải.

Trước hết ta ôn lại phân tích đa thức thành nhân tử:

$x^2 - 3x - 40 = x^2 - 8x + 5x - 40 = x(x - 8) + 5(x - 8) = (x - 8)(x + 5)$

Tại sao ta làm được như vậy: Thật đơn giản: hai số 5 **và** -8

Thỏa mãn: $5 + (-8) = -3$ **và** $5.(-8) = -40$

Tương tự:

$x^2 + 3x - 40 =$

$x^2 - 3x - 28 =$

$x^2 + 3x - 10 =$

$x^2 - 8x + 15 =$

$x^2 - 7x - 18 =$

$40x^2 - 3x - 1 =$

$28x^2 + 3x - 1 =$

Giải

a) $x^2 - 3x - 40 = 0$ b) $x^2 + 3x - 40 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 5x - 40 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 8) + 5(x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 8)(x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow x - 8 = 0$ hoặc $x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 8$ hoặc $x = -5$

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-5; 8\}$

c) $x^2 - 3x - 28 = 0$ d) $x^2 + 3x - 10 = 0$

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU

Các phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{x-6} = 0 \qquad \frac{x+1}{x+5} + \frac{x}{x-4} = \frac{5}{x^2+x-20}$$

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{x} \qquad \frac{2x}{x+4} + \frac{9}{x-4} - \frac{5}{x^2-16} = 0$$

Gọi là phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Vậy ta giải như thế nào nhỉ!

Xét phương trình: $\frac{2x}{x-3} - \frac{5}{x+2} - \frac{x^2-x+24}{x^2-x-6} = 0$

Nhận xét: . Ta có: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

. Với x = 3 thì $\frac{2x}{x-3}$ và $\frac{x^2-x+24}{x^2-x-6}$ không xác định được giá trị.

$x = -2$ thì $\frac{5}{x+2}$ và $\frac{x^2-x+24}{x^2-x-6}$ không xác định được giá trị.

Vậy phương trình đã cho chỉ nhận giá trị của ẩn là: $x \neq 3$ và $x \neq -2$

Giải

Đkxđ: $x \neq 3$ và $x \neq -2$ (Đkxđ: Điều kiện xác định của biến x)

$$\frac{2x}{x-3} - \frac{5}{x+2} - \frac{x^2-x+24}{x^2-x-6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x(x+2)}{(x-3)} - \frac{5(x-3)}{(x+2)} - \frac{x^2-x+24}{(x-3)(x+2)} = 0$$

$$2x(x+2) - 5(x-3) - (x^2-x+24) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 5x + 15 - x^2 + x - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm 3$$

So với điều kiện: $x \neq 3$ và $x \neq -2$ thì $x = -3$ nhận

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-3\}$

Hướng giải phương trình chứa ẩn ở mẫu:

1/ Đặt điều kiện của biến.
2/ Quy đồng mẫu chung.
3/ Bỏ mẫu chung ta được phương trình mới.
4/ Giải phương trình mới.
5/ So với điều kiện của biến để nhận nghiệm.
6/ Ghi tập nghiệm.

Chú ý: 1/ Nếu phương trình mới vô nghiệm thì phương trình đã cho vô nghiệm.

2/ Nếu phương trình đã cho có Đkxđ là: $x \neq 5$ và $x \neq -3$

và phương trình mới có nghiệm là: $x = 5$ và $x = -3$

thì tập nghiệm của phương trình đã cho: $S = \{x \in R / x \neq 5 \text{ và } x \neq -3\}$

Bài 10. Giải các phương trình: $\frac{4}{x+5} - \frac{3}{x-5} + \frac{x^2-6x+35}{x^2-25} = 0$

Giải

Đkxđ: $x \neq 5$ **và** $x \neq -5$

$$\frac{4}{x+5} - \frac{3}{x-5} + \frac{x^2-6x+35}{x^2-25} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-5)}{(x+5)(x-5)} - \frac{3(x+5)}{(x-5)(x+5)} + \frac{x^2-6x+35}{(x+5)(x-5)} = 0$$

$$4(x-5) - 3(x+5) + x^2-6x+35 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x-20 - 3x - 15 + x^2 - 6x + 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)x = 0$$

$\Leftrightarrow x - 5 = 0$ hoặc $x = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$ hoặc $x = 0$

So với điều kiện: $x \neq 5$ **và** $x \neq -5$ thì $x = 0$ nhận

Tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0\}$

Thực hành:

Bài 11. Giải các phương trình:

a) $\frac{3x}{x-2} - \frac{6}{x+2} = \frac{2x^2-4x+8}{x^2-4}$

b) $\frac{x+2}{x-5} - \frac{x+5}{x-2} + \frac{x^2+x-27}{x^2-7x+10} = 0$

c) $\frac{4}{x-3} - \frac{6}{x^2+3x+9} - \frac{12x+90}{x^3-27} = 0$

d) $\frac{2}{x-4} - \frac{2}{x+2} + \frac{x^2-2x-20}{x^2-7x+10} = 0$

GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Ta xét bài toán 11 sau: Lớp 8A có 32 học sinh. Trong đợt ủng hộ sách cho các bạn ở vùng nông thôn, mỗi bạn nữ góp được 2 cuốn sách, mỗi bạn nam góp được 5 cuốn. Tổng số sách cả lớp góp được là 124 cuốn. Hỏi lớp 8A có bao nhiêu bạn nữ?

Bài này có lẽ các bạn đã biết giải ở các lớp dưới theo cách dùng: "Giả thiết tạm".

Cách giải như sau:

Giả sử mỗi bạn ở lớp 8A góp 5 cuốn.

Tổng số sách cả lớp góp được là:

32.5 = 160 (cuốn)

Số sách dư ra so với thực tế là:

160 − 124 = 36 (cuốn)

Số sách dư ra là do mỗi bạn nữ đã góp sách thêm là:

5 − 2 = 3 (cuốn)

Số bạn nữ của lớp 8A là:

36 : 3 = 12 (bạn)

Bài này cũng có thể giải bằng cách giả sử mỗi bạn ở lớp 8A góp 2 cuốn.

Các bạn tự giải nhé.

Vậy ta có thể giải bằng cách khác được không? Ta thử xem nhé:

Ta gán số bạn nữ của lớp 8A là: x

Vậy số bạn nam của lớp 8A theo biến x là: 32 − x

Tổng số sách của các bạn nữ lớp 8A theo biến x là: 2x

Tổng số sách của các bạn nam lớp 8A theo biến x là: 5(32 − x)

(hoặc 124 − 2x)

Vậy ta ráng viết ra được phương trình với ẩn số là x.

Manh mối nào để viết ra được phương trình với ẩn số là x.

Sau khi rà soát lại ta thấy dữ liệu "Tổng số sách cả lớp góp được là 124 cuốn" là hợp lý nhất.

Nghĩa là ta có: 2x + 5(32 − x) = 124

Phương trình này ta giải được:

$$\begin{aligned} & 2x + 5(32 - x) = 124 \\ \Leftrightarrow\ & 2x + 160 - 5x = 124 \\ \Leftrightarrow\ & -3x = -36 \\ \Leftrightarrow\ & x = 12 \end{aligned}$$

Giá trị $x = 12$ khớp với đáp án của cách giải dùng: "Giả thiết tạm".

Cách giải như trên gọi là: "***Giải bài toán bằng cách lập phương trình***".

Ưu việt của cách giải này là: giải quyết được các toán phức tạp có nhiều dữ liệu.

Ta trình bài giải như sau:

Giải

Gọi số bạn nữ của lớp 8A là: x (x nguyên dương và x < 32)

Vậy số bạn nam của lớp 8A là: 32 − x

Tổng số sách của các bạn nữ lớp 8A góp là: 2x
Tổng số sách của các bạn nam lớp 8A góp là: 5(32 − x)
Do tổng số sách cả lớp góp được là 124 cuốn, nên ta có phương trình:

$$2x + 5(32 - x) = 124$$
$$\Leftrightarrow 2x + 160 - 5x = 124$$
$$\Leftrightarrow -3x = -36$$
$$\Leftrightarrow x = 12 \quad \text{(nhận)}$$

Vậy số bạn nữ của lớp 8A là 12 người.

Bài này cũng có thể giải bằng cách:

Gọi số bạn nam của lớp 8A là: x (x nguyên dương và x < 32)

Các bạn hãy tự giải nhé. Đừng bỏ qua.

Các bước: "***Giải bài toán bằng cách lập phương trình***".
1/ Gán biến x (hoặc y,…) cho đại lượng nào đó có trong bài toán.
2/ Biểu diễn các số liệu theo x (số liệu có thể đề bài không cho nhưng hiển nhiên ta biết: Số chân của mỗi gia cầm, mỗi gia súc…).
3/ Viết phương trình theo biến x.
4/ Giải phương trình và nhận nghiệm của phương trình.
5/ Ghi kết quả.

Thực hành: Giải các bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Bài 11.1 Trên công trường xây dựng có 32 công nhân được chia làm hai đội. Do làm tốt công việc nên tháng 12/2020 mỗi công nhân ở đội A được thưởng thêm 5 triệu đồng (ngoài tiền lương), mỗi công nhân ở đội B được thưởng thêm 2 triệu đồng (ngoài tiền lương). Tổng số tiền thưởng thêm cho cả hai đội là 124 triệu đồng. Tính số người của mỗi đội.

Bài 11.2 Người ta chia 124 cuốn sách vào 32 khay. Khay loại A mỗi khay chứa 5 cuốn, khay loại B mỗi khay chứa 2 cuốn. Tính số khay của mỗi loại.

Bài 11.3 Để chuyển 124 tấn gạo trong kho đến các cửa hàng, người ta dùng các xe tải: loại xe chở 5 tấn và loại xe chở 2 tấn. Số chuyến xe chở 5 tấn nhiều hơn số chuyến xe loại chở 2 tấn là 8 chuyến. Tính tổng số chuyến xe chở hết số gạo trên.

Bài 11.4 Lớp 8A có 32 học sinh. Trung bình mỗi ngày mỗi bạn nữ tiết kiệm được 2 ngàn đồng, trung bình mỗi ngày mỗi bạn nam tiết kiệm được 5 ngàn đồng. Trong tháng 2/2020 cả lớp tiết kiệm được 3596 ngàn đồng. Hỏi lớp 8A có bao nhiêu bạn nữ?

Bài 12. Bạn Duy được mẹ giao 180 trái xoài mang ra chợ bán. Ban đầu bạn Duy bán mỗi trái xoài giá 10 ngàn đồng. Do thấy khách hàng mua đông quá, bạn Duy bán mỗi trái xoài tăng giá 20% và trong chốc lát số xoài đã bán hết. Tổng số tiền bạn Duy thu được là 1,96 triệu đồng. Tính số xoài bạn Duy bán với giá 10 ngàn đồng/1 trái.

Chú ý: 1/ Giá trị 1 trái xoài khi tăng giá 20% là: 10.120% = 12 (ngàn đồng)
2/ Giá trị 1 trái xoài khi giảm giá 20% là: 10.80% = 8 (ngàn đồng)

Giải

Giá trị 1 trái xoài khi tăng giá 20% là: 10.120% = 12 (ngàn đồng)

Gọi số xoài bán mỗi trái giá 10 ngàn đồng là: x (x nguyên dương và x < 180)

Vậy số xoài bán mỗi trái giá 12 ngàn đồng là: 180 − x

Tổng số tiền thu được khi bán mỗi trái xoài giá 10 ngàn đồng là: 10x

Tổng số tiền thu được khi bán mỗi trái xoài giá 12 ngàn đồng là: 12(180 − x)

Do tổng số tiền thu được khi bạn Duy bán hết xoài là 1,96 triệu đồng.

Nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & 10x + 12(180 - x) = 1960 \\ \Leftrightarrow\ & 10x + 2160 - 12x = 1960 \\ \Leftrightarrow\ & -2x = -200 \\ \Leftrightarrow\ & x = 100 \quad \text{(nhận)} \end{aligned}$$

Vậy số xoài bạn Duy bán với giá 10 ngàn đồng/1 trái là: 100 trái.

Bài này cũng có thể giải bằng cách:

Gọi số xoài bán mỗi trái giá 12 ngàn đồng là: x (x nguyên dương và x < 180)

Các bạn hãy tự giải nhé. Đừng bỏ qua.

Bài 12.1 Bạn Duy được mẹ giao 180 trái xoài mang ra chợ bán. Ban đầu bạn Duy bán mỗi trái xoài giá 10 ngàn đồng. Do thấy khách hàng mua ít quá, bạn Duy hạ giá mỗi trái xoài 30% và trong chốc lát số xoài đã bán hết. Tổng số tiền bạn Duy thu được là 1,43 triệu đồng. Tính số xoài bạn Duy bán với giá 10 ngàn đồng/1 trái.

Bài 13. Một chiếc xe đi từ A đến B với vận tốc trung bình là 50km/h. Lúc về xe đi với vận tốc trung bình là 80km/h. Thời gian về nhanh hơn thời gian đi là 3 giờ. Tính quãng đường AB.

Giải

Cách 1:

Gọi quãng đường AB là x (km), x > 0

Thời gian lúc đi là: $\frac{x}{50}$

Thời gian lúc về là: $\frac{x}{80}$

Do thời gian về nhanh hơn thời gian đi là 3 giờ.

Nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{50} - \frac{x}{80} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & 8x - 5x = 1200 \\ \Leftrightarrow\ & 3x = 1200 \\ \Leftrightarrow\ & x = 400 \quad \text{(nhận)} \end{aligned}$$

Vậy quãng đường AB là 400km.

Cách 2:

Gọi thời gian lúc về là: t (giờ), t > 0

Vậy thời gian lúc đi là: t + 3

Quãng đường lúc đi là: 50(t + 3)

Quãng đường lúc về là: 80t

Do hai quãng đường bằng nhau, nên ta có phương trình:

$$\begin{aligned} & 80t - 50(t + 3) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 80t - 50t - 150 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 30t = 150 \\ \Leftrightarrow\ & t = 5 \quad \text{(nhận)} \end{aligned}$$

Vậy quãng đường AB là 5.80 = 400 (km)

Thực hành: Giải các bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Bài 13.1 Một công nhân dự định mỗi ngày làm được 50 sản phẩm, nhưng khi thực hiện mỗi ngày làm được 80 sản phẩm. Do đó thời gian hoàn thành sớm hơn dự định 3 ngày. Tính số sản phẩm công nhân đó làm được.

Bài 13.2 Nhà bạn An thu hoạch cam. Ban đầu dự định xếp 50 trái vào một giỏ thì vừa đủ, nhưng do số giỏ bị hư 3 cái nên mỗi giỏ phải xếp 80 trái thì mới hết số cam. Tính số quả cam nhà An thu hoạch được. (Các giỏ đều có cùng kích thước).

Bài 13.3 Công ty Gia An chuyên sản xuất đồ gỗ xuất khẩu. Người ta đóng các sản phẩm vào các hộp. Để xuất khẩu ra nước ngoài, người ta bỏ các hộp này vào trong container (có cùng kích thước). Ban đầu dự định mỗi container chứa 50 hộp, nhưng do xếp khéo nên mỗi container chứa được 80 hộp. Do đó số container sử dụng giảm đi 3 thùng. Tính số hộp đã xuất khẩu đi nước ngoài.

Bài 13.4 Nhà bạn Sa Đéc dự định thu hoạch một số quả xoài. Các quả xoài này đóng trong các thùng (có cùng kích thước), dự định mỗi thùng chứa 40 quả. Nhưng thực tế số xoài thu được nhiều hơn dự định 60 quả. Do mỗi quả xoài lớn hơn dự định nên mỗi thùng chỉ chứa được 30 quả, cho nên số thùng cần dùng tăng thêm 3 cái. Tính số quả xoài nhà bạn Sa Đéc thu hoạch được.

Bài 13.5 Trường THCS Cao Lãnh tổ chức cho học sinh và giáo viên tham quan ruộng muối ở Bà Rịa. Phương tiện chuyên chở là toàn xe 30 chỗ ngồi thì vừa đủ. Nhưng do có 90 người đăng ký tham quan thêm nữa, nên người ta chuyển qua dùng toàn xe chuyên chở 45 chỗ ngồi thì vừa đủ. Biết rằng số xe 45 chỗ ngồi ít hơn số xe 30 chỗ ngồi là 8 chiếc. Hỏi có bao nhiêu học sinh và giáo viên của trường THCS Cao Lãnh tham quan ruộng muối ở Bà Rịa?

Bài 14. Tổng số học sinh của hai lớp 8A và lớp 8B là 62 . Điểm thi môn toán ở học kỳ I của hai lớp được ghi lại như sau: Tổng số điểm thi của hai lớp là 394 điểm

Điểm thi trung bình của lớp 9A là 6,5 điểm.

Điểm thi trung bình của lớp 9B là 6,2 điểm.

Tính số học sinh của lớp 8A và lớp 8B.

Bài 15. Hãng hàng không ABC.Air trong tháng 12/2020 cho khách hàng chọn một trong hai khuyến mãi sau để mua vé:

1/ Hành khách có tháng sinh vào tháng 12 thì được giảm giá 4 triệu đồng cho 1 vé khứ hồi. (chỉ mua được 1 vé)

2/ Giảm 20% cho mọi vé khứ hồi nếu mua trong tháng 12/2020 (chỉ mua được 1 vé)

Chú ý: Giá vé mua phải trên 15 triệu đồng.

Bạn Minh Triết đã mua 1 vé và chọn khuyến mãi 1 do có lợi hơn khuyến mãi 2 400 ngàn đồng.

Hãy cho biết bạn Minh Triết đã mua vé giá bao nhiêu triệu đồng.

SỰ SO SÁNH

Con người chúng ta biết so sánh từ lúc nào nhỉ!

Có người nói rằng trẻ sơ sinh cũng biết so sánh. Bởi vì nó có thể cảm nhận được sữa ở bên nào nhiều hơn hoặc yên tâm hơn khi mẹ bế nó.

Lớn lên một chút, nó có thể so sánh người lạ với mẹ nó. Phản ứng của nó là khóc hoặc gồng lên hoặc ….

Lớn lên một chút, nó có thể phản ứng với mùi vị của thức ăn.

Lớn lên một chút, mẹ bẻ bánh chia cho nó ít hơn người anh. Nó phụng phịu, hờn giận.

Người mẹ tâm lý giải thích rằng: Anh con cơ thể lớn hơn con, nên nhu cầu thức ăn nhiều hơn là điều tự nhiên. Chứ không phải mẹ thương anh nhiều hơn. Những lần sau chắc nó ít phản ứng hơn.

Lớn lên rồi đi học mẫu giáo, tiểu học, trung học. ***Sự so sánh bắt đầu xuất hiện nhiều:***

. Quần áo.
. Điểm số.
. Sao cô thương bạn khác nhiều hơn.
. Bạn ấy được đi du lịch nhiều nơi.
. Bạn ấy được nhiều bạn ngưỡng mộ.
. Mình học rất nhiều sao vẫn thua bạn ấy.

….

Rất nhiều.

Nhưng các bạn nên nhớ rằng: Nhiều người cũng ngưỡng mộ mình, mà mình chả chú ý.

Cuối cùng sự so sánh mang đến điều gì?

Nó mang đến một trong hai thái độ sau:

. Tiêu cực: Ganh tị, hờn giận, ghét người làm giỏi hơn mình.
Cái tôi của mình càng lớn, bất hợp tác, hay để ý người khác rồi bắt bẻ.
Người khác thành công là do có điều kiện và kèm theo may mắn thôi.

. Tích cực: Hoàn thiện công việc hơn.
Hợp tác với mọi người.
Biết chia sẻ.
Thúc đẩy sự phát triển của cá nhân, của xã hội.
Con người có tính nhân văn và biết lắng nghe.

Ủa mình học toán mà nãy giờ đọc cảm thấy kỳ kỳ, sai sai gì đó, mất thời gian quá.

Hãy nghe câu hỏi tiếp theo: **Con người biết làm toán từ khi nào nhỉ!**

Từ khi mới sinh ra. Như em bé nói ở trên. Bé so sánh được tức là biết làm toán.

Càng ngày bé càng so sánh được những điều phức tạp hơn, tức là đã học toán giỏi hơn.

Đang học lớp 8 tức là về mặt toán các bạn thực sự có nền tảng về toán.

Sự so sánh càng mãnh liệt và rõ ràng khi nó kèm theo các con số:

. Em bé được mẹ ẵm bồng nhiều hơn cha nên nó thân thiện với me hơn.
. Bạn ấy có 5 điểm 10 còn mình chỉ có 2.
. Bạn ấy ở top 5 về học toán còn mình chỉ ở top 10.

So sánh đơn giản nhất trong toán chính là so sánh giữa hai số.

SO SÁNH GIỮA HAI SỐ

Khi cho hai con số cụ thể, sẽ xảy một trong ba trường hợp sau:

. Hai số bằng nhau.

. Số thứ nhất bé hơn số thư hai.

. Số thứ nhất lớn hơn số thư hai.

Ví dụ: Cho hai số a và b.

. Nếu $a = 3$ và $b = 3$ ta có a bằng b ký hiệu: $\mathbf{a = b}$

. Nếu $a = -6$ và $b = 2$ ta có a bé hơn b ký hiệu: $\mathbf{a < b}$

. Nếu $a = -6$ và $b = -20$ ta có a lớn hơn b ký hiệu: $\mathbf{a > b}$

Thực hành

Cho hai số p và s. Hãy so sánh p và s khi (ghi bằng ký hiệu):

. $p = 7$ và $s = 7$ ta có:

. $p = -12$ và $s = -2$ ta có:

. $p = 8$ và $s = -23$ ta có:

Bây giờ ta hiểu thêm một số ký hiệu:

Cho hai số a và b.

$\mathbf{a \geq b}$: Số a lớn hơn hoặc bằng số b.

$\mathbf{a \leq b}$: Số a bé hơn hoặc bằng số b.

$\mathbf{a \geq 0}$: Số a lớn hơn hoặc bằng số 0.

Hoặc hiểu: số a không âm.

$\mathbf{a \geq 0}$: Số a bé hơn hoặc bằng số 0.

Hoặc hiểu: số a không dương.

Giá trị bé nhất, giá trị lớn nhất.

Chúng ta tập làm quen: **Giá trị bé nhất** (hay nói: ít nhất, nhỏ nhất, cực tiểu).

Giá trị bé nhất của số A là 6: Ta viết $\mathbf{A \geq 6}$

Giá trị ít nhất của số B là 8: Ta viết

Giá trị nhỏ nhất của số C là -10: Ta viết

Giá trị cực tiểu của số D là -30: Ta viết

Ngược lại nếu có: $\mathbf{A \geq 15}$ nghĩa là giá trị bé nhất của số A là 15

$\mathbf{B \geq \frac{3}{4}}$ nghĩa

$\mathbf{M \geq -18}$

Chúng ta tập làm quen: **Giá trị lớn nhất** (hay nói: nhiều nhất, cực đại).

Giá trị lớn nhất của số A là 6: Ta viết $\mathbf{A \leq 6}$

Giá trị nhiều nhất của số B là 8: Ta viết

Giá trị cực đại của số D là -30: Ta viết

Ngược lại nếu có: $\mathbf{A \leq 15}$ nghĩa là giá trị lớn nhất của số A là 15

$\mathbf{B \leq \frac{3}{4}}$ nghĩa

$\mathbf{M \leq \frac{-3}{10}}$

ĐẲNG THỨC

Đẳng thức là gì? Ta hãy quan sát một số ví dụ sau:

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$

$$a = b, \quad y = ax + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(Với: a, b, c , d, x , y là các số)

Các ví dụ trên ta gọi là đẳng thức. Hiểu đơn giản như sau:

Hai biểu thức số được nối với nhau qua dấu " = ", ta gọi là đẳng thức.

Những hằng đẳng thức học ở học kỳ I là các đẳng thức.
Chúng ta có thể đưa ra nhiều ví dụ về đẳng thức.

BẤT ĐẲNG THỨC

Bất đẳng thức là gì? Ta hãy quan sát một số ví dụ sau:

$$6^2 > 3^2 + 4^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 < (1 + 2 + 3 + 5)^2$$

Ta gọi đây là các bất đẳng thức. Hiểu đơn giản như sau:

Hai biểu thức số liên hệ với nhau nếu xuất hiện dấu " $<$ " hoặc dấu "$>$" hoặc dấu "$\geq$" hoặc dấu "$\leq$" ta gọi là bất đẳng thức.

1. Định nghĩa

Cho hai số a và b ta gọi: $a > b$ (hoặc $a < b$ hoặc $a \geq b$ hoặc $a \leq b$) là bất đẳng thức

Ta gọi: a là vế trái của bất đẳng thức.
b là vế phải của bất đẳng thức.

Ta gọi:

. Các dấu: $<, >, \leq, \geq$ là chiều của bất đẳng thức.

. $7 > 5$ và $10 > 8$ là hai bất đẳng thức cùng chiều.

Tương tự cho: $-3 < 1$ và $2 < 6$

$a \leq b$ và $c \leq d$ (a, b, c, d là các số)

$a \geq b$ và $c \geq d$

. $7 > 5$ và $-14 < -10$ là hai bất đẳng thức ngược chiều.

Tương tự cho: $-3 < 1$ và $6 > -2$

$a \leq b$ và $c \geq d$ (a, b, c, d là các số)

$a \geq b$ và $c \leq d$

Bất đẳng thức đúng. Bất đẳng thức sai.

Ta gọi: $2 > 5$ $\quad 3 < -6$ $\quad 7 \geq 10$ $\quad 6 \leq -8$

Là những bất đẳng thức sai.

Ta gọi: $2 > -8$ $\quad -63 < -19$ $\quad 10 \geq 10$ $\quad 19 \geq 10$

Là những bất đẳng thức đúng.

Thực hành

Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào đúng, bất đẳng thức nào sai. Ghi kết quả bên cạnh.

a) $5 > 7$ bất đẳng thức sai.

b) $-8 < 7$ bất đẳng thức đúng.

c) $-12 < -4$

d) $10 \geq 8$

e) $8 \geq 20$

f) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

2. Tính chất

a. Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép cộng.

Chúng ta quan sát các ví dụ sau rồi đưa ra các nhận định:

Cho bất đẳng thức: $-3 < 1$. Hãy so sánh: $-3+6$ và $1+6$

$-3+(-7)$ và $1+(-7)$

Giải

Ta có: $-3+6 < 1+6$ do: $-3+6=3$ và $1+6=7$ mà $3<7$

$-3+(-7) < 1+(-7)$ do: $-3+(-7) = -10$ và $1+(-7) = -6$ mà $-10 < -6$

Các bất đẳng thức mới: $-3+6 < 1+6$; $-3+(-7) < 1+(-7)$

Cùng chiều với bất đẳng thức đã cho: $-3 < 1$

Tương tự nếu ta cộng hai vế của $-3 < 1$ với cùng một số bất kỳ thì ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Nghĩa là: $-3 < 1 \Rightarrow -3+m < 1+m$ với m có giá trị bất kỳ.

Tóm lại:

> **Nếu ta cộng hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số bất kỳ thì ta được một bất đẳng mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.**

Cho ba số a, b, m: Nếu $a > b$ thì $a+m > b+m$

Nếu $a+m > b+m$ thì $a > b$

Ta viết như sau: $\mathbf{a > b \Leftrightarrow a+m > b+m}$

Tương tự cho các dấu còn lại: $<, \le, \ge$

Chúng ta bắt đầu làm một số bài dễ nha:

Bài 1. a) Cho hai số a và b biết: $a+5 > b$. So sánh: a và $b-5$

b) Cho hai số a và b biết: $\mathbf{a}-9 \le \mathbf{b}$. So sánh: $\mathbf{a}$ **và** $\mathbf{b}+9$

Giải

a) Ta có: $\mathbf{a}+5 > \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a+5}+(-5) > \mathbf{b}+(-5)$

$\Leftrightarrow \mathbf{a} > \mathbf{b}-5$

b) Ta có: $\mathbf{a}-9 \le \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a}-\mathbf{9}+\mathbf{9} \le \mathbf{b}+\mathbf{9}$

$\Leftrightarrow \mathbf{a} \le \mathbf{b}+9$

Bài 1.1 a) Cho hai số a và b biết: $a-15 < b$. So sánh: a và $b+15$

b) Cho hai số a và b biết: $\mathbf{a}+16 \ge \mathbf{b}$. So sánh: $\mathbf{a}$ **và** $\mathbf{b}-\mathbf{16}$

Giải

a) Ta có:

b) Ta có:

Bài 2. a) Cho số x biết: $x - 15 < 8$. Chứng tỏ: $x < 23$

b) Cho số x biết: $x + 16 \geq 10$. Chứng tỏ: $x \geq -6$

Giải

a) Ta có: $a - 15 < 8 \Leftrightarrow a - 15 + 15 < 8 + 15$

$\Leftrightarrow a < 23$

b) Ta có: $x + 16 \geq 10 \Leftrightarrow x + 16 + (-16) \geq 10 + (-16)$

$\Leftrightarrow x \geq -6$

Bài 2.1 a) Cho số x biết: $x + 9 > 2$. Chứng tỏ: $x > -7$

b) Cho số x biết: $x - 2 \leq -7$. Chứng tỏ: $x \leq -5$

Giải

a) Ta có:

b) Ta có:

b. Tính chất liên hệ giữa thứ tự và phép nhân.

Chúng ta tiếp tục quan sát các ví dụ sau rồi đưa ra các nhận định:

Ví dụ 1. Cho bất đẳng thức: $-4 < 2$.

a) Hãy so sánh: -4.5 và 2.5 ; $-4.0,6$ và $2.0,6$; $-4.\frac{1}{2}$ và $2.\frac{1}{2}$

b) Hãy so sánh: $-4.(-6)$ và $2.(-6)$; $-4.(-10)$ và $2.(-10)$; $-4.\frac{-7}{2}$ và $2.\frac{-7}{2}$

Giải

a) Ta có: $-4.5 < 2.5$ (do $-4.5 < 0$ còn $2.5 > 0$)

$-4.0,6$ $2.0,6$ (do)

$-4.\frac{1}{2}$ $2.\frac{1}{2}$ (do)

Nếu m có giá trị dương thì: $-4.m$ $2.m$ (do : $-4.m$ còn $2.m$)

b) Ta có: $-4.(-6) > 2.(-6)$ (do $-4.(-6) > 0$ còn $2.(-6) < 0$)

$-4.(-10)$ $2.(-10)$ (do)

$-4.\frac{-7}{2}$ $2.\frac{-7}{2}$ (do)

Nếu m có giá trị âm thì: $-4.m$ $2.m$ (do : $-4.m$ còn $2.m$)

Ví dụ 2. Cho bất đẳng thức: $-6 > -10$.

a) Hãy so sánh: -6.8 và -10.8 ; $-6.0,5$ và $-10.0,5$; $-6.\frac{5}{2}$ và $-10.\frac{5}{2}$

b) Hãy so sánh: $-6.(-2)$ và $-10.(-2)$; $-6.(-0.8)$ và $-10.(-0.8)$; $-6.\frac{-11}{7}$ và $-10.\frac{-11}{7}$

Giải

a) Ta có: $-6.8 > -10.8$ (do $-6.8 = -48$ và $-10.8 = -80$; $-48 > -80$)

$-6.0,5 \quad -10.0,5$ (do)

$-6.\frac{5}{2} \quad -10.\frac{5}{2}$ (do)

Nếu m có giá trị dương thì: $-6.m \quad -10.m$

b) Ta có: $-6.(-2) < -10.(-2)$ (do $-6.(-2) = 12$ và $-10.(-2) = 20$; $12 < 20$)

$-6.(-0.8) \quad -10.(-0.8)$ (do)

$-6.\frac{-11}{7} \quad -10.\frac{-11}{7}$ (do)

Nếu m có giá trị âm thì: $-6.m \quad -10.m$

Tóm lại: Cho bất đẳng thức: $a < b$. Ta có: **a.m < b.m** khi m có giá trị dương.

a.m > b.m khi m có giá trị âm.

Tương tự cho các dấu còn lại: $<, \leq, \geq$

Nếu ta nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số dương thì ta được một bất đẳng thức mới cùng chiều với bất đẳng thức đã cho.

Nếu ta nhân hai vế của một bất đẳng thức với cùng một số âm thì ta được một bất đẳng thức mới ngược chiều với bất đẳng thức đã cho.

c. Tính chất bắc cầu.

Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$. Tương tự cho các dấu còn lại: $<, \leq, \geq$

Thực hành

Bài 3. Cho $a < b$. Hãy so sánh: 3a và 3b; 2a và a + b; $-9a$ và $-9b$

am và bm với $m < 0$

$\mathbf{a(m^2+1)}$ và $\mathbf{b(m^2+1)}$ m có giá trị bất kỳ.

$\mathbf{a(-m^2-6)}$ và $\mathbf{b(-m^2-6)}$ m có giá trị bất kỳ.

Chú ý: Bình phương của số 0 là 0.

Bình phương của một số dương là một số dương. $\mathbf{7^2 = 49 > 0}$

Bình phương của một số âm là số một dương. $\mathbf{(-6)^2 = 36 > 0}$

Vậy với một số bất kỳ: Bình phương của số đó luôn luôn là số lớn hơn hoặc bằng 0.

(hoặc luôn luôn là số không âm)

Cho số m: Ta có $\mathbf{m^2} \geq 0$ dĩ nhiên là: $\mathbf{m^2 + 8 > 0 \quad \forall m}$

$\mathbf{(m-3)^2 \geq 0}$ dĩ nhiên là: $\mathbf{(m-3)^2 + 0,6 > 0 \quad \forall m}$

Ta nên để ý đến những chi tiết này giúp ta có hướng giải toán nhanh hơn.

Giải

Ta có: $\mathbf{a < b \Leftrightarrow 3a < 3b}$ (do $3 > 0$)

$\mathbf{a < b \Leftrightarrow a + a < b + a}$

$\mathbf{\Leftrightarrow \quad 2a < a + b}$

$\mathbf{a < b \Leftrightarrow ma > mb}$ (do $m < 0$)

$a < b \Leftrightarrow -9a > -9b$ (do $-9 < 0$)

$a < b \Leftrightarrow a(m^2+1) < b(m^2+1)$ (do $m^2 + 1 > 0$)

$a < b \Leftrightarrow a(-m^2-6) > b(-m^2-6)$ (do $-m^2 - 6 < 0$)

Bài 3.1 Cho $a \geq b$. Hãy so sánh: 5a và 5b; 2a và a + b; $-7a$ và $-7b$

am và bm với m > 0

$a(m^2+2)$ và $b(m^2+2)$ m có giá trị bất kỳ.

$a(-m^2-8)$ và $b(-m^2-8)$ m có giá trị bất kỳ.

Giải

Ta có:

Bài 4. Cho $0 < a < b$. So sánh a^2 và ab

Cho $a < b < 0$. So sánh a^2 và ab

Giải

Ta có:

Chú ý: Ký hiệu $\forall a$ nghĩa là với mọi giá trị của a.

Bài 5. a) Chứng minh rằng $\forall a$ ta luôn có: $a^2 + 25 \geq 10a$

b) Chứng minh rằng $\forall a$ ta luôn có: $a^2 + 36 \geq 12a$

c) Chứng minh rằng $\forall a$ ta luôn có: $9a^2 + 1 \geq 6a$

d) Chứng minh rằng $\forall a$ ta luôn có: $25a^2 + 9 \geq -30a$

e) Chứng minh rằng $\forall a$ ta luôn có: $a^2 + \frac{1}{4} \geq a$

f) Chứng minh rằng $\forall a$ ta luôn có: $a^2 + \frac{9}{4} \geq -3a$

Để làm bài này ta chú ý: $(a-7)^2 \geq 0$ bất đẳng thức đúng $\forall a$

$(a+0,2)^2 \geq 0$ bất đẳng thức đúng $\forall a$

$(a-b)^2 \geq 0$ bất đẳng thức đúng $\forall a, b$

$(a-2)^2 + (b+1)^2 \geq 0$ bất đẳng thức đúng $\forall a, b$

Giải

a) Ta có: $\mathbf{a^2 + 25 \geq 10a}$

$\Leftrightarrow \mathbf{a^2 - 10a + 25} \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (\mathbf{a - 5})^2 \geq 0$ (bất đẳng thức đúng)

Nên: $\mathbf{a^2 + 25 \geq 10a} \quad \forall \mathbf{a}$

b) Ta có:

c) Ta có:

d) Ta có:

e) Ta có:

f) Ta có:

Bài 6. a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a và b ta luôn có: $\mathbf{a^2 + b^2 \geq 2ab}$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a và b ta luôn có: $\mathbf{a^2 + 9b^2 \geq 6ab}$

c) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a và b ta luôn có:

$$\mathbf{2a^2 + b^2 + 25 \geq 2ab - 10a}$$

Giải

a) Ta có: $\mathbf{a^2 + b^2 \geq 2ab}$

$\Leftrightarrow \mathbf{a^2 - 2ab + b^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow (\mathbf{a - b})^2 \geq 0$ (bất đẳng thức đúng)

Nên: $\mathbf{a^2 + b^2 \geq 2ab} \quad \forall \mathbf{a, b}$

b) Ta có:

c) Ta có:

Bài 7. a) Chứng minh rằng: $\forall$**a, b, c** ta luôn có: $\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca}$

b) Chứng minh rằng: $\forall$**a, b** ta luôn có: $\mathbf{a^2 + b^2 + 9 \geq ab + 3b + 3a}$

c) Chứng minh rằng: $\forall$**a, b** ta luôn có: $\mathbf{a^2 + b^2 + \frac{1}{4} \geq ab + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a}$

Giải

a) **Cách 1.** Ta có: $\mathbf{a^2 + b^2 \geq 2ab}$

$\Leftrightarrow \mathbf{a^2 - 2ab + b^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow (\mathbf{a - b})^2 \geq 0$ (bất đẳng thức đúng)

Nên: $\mathbf{a^2 + b^2 \geq 2ab} \quad \forall \mathbf{a, b}$

Tương tự: $\mathbf{b^2 + c^2 \geq 2bc} \quad \forall \mathbf{b, c}$

$\mathbf{c^2 + a^2 \geq 2ca} \quad \forall \mathbf{a, c}$

Suy ra: $\mathbf{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca} \quad \forall \mathbf{a, b, c}$

Hay: $\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca}$

Cách 2. Ta có: $\mathbf{a^2 + b^2 + 9 \geq ab + 3b + 3a}$

$\Leftrightarrow \mathbf{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca}$

$\Leftrightarrow \mathbf{a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0}$

$\Leftrightarrow (\mathbf{a - b})^2 + (\mathbf{b - c})^2 + (\mathbf{c - a})^2 \geq \mathbf{0}$ (bất đẳng thức đúng)

Vậy: $\mathbf{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca}$

Hai câu còn lại các bạn tự làm.

Bài 8. a) Chứng minh rằng: $\forall$**a, b** ta luôn có: $\mathbf{a^2 + b^2 \geq 2ab}$

b) Chứng minh rằng: $\forall$**a, b** ta luôn có: $(\mathbf{a + b})^2 \geq \mathbf{4ab}$

c) Chứng minh rằng: $\forall$**a, b** ta luôn có: $(\mathbf{a + b})^2 \leq \mathbf{2(a^2 + b^2)}$

d) Chứng minh rằng: $\forall \mathbf{a, b > 0}$ ta luôn có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

e) Chứng minh rằng: $\forall \mathbf{a, b}$ cùng dấu ta luôn có: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Bài 9. a) Chứng minh rằng: $\forall \mathbf{a, b}$ ta luôn có: $a^2 + b^2 \geq ab$

b) Chứng minh rằng: $\forall \mathbf{a, b}$ ta luôn có: $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$

Bài 10. a) Chứng minh rằng: $\forall \mathbf{a}$ ta luôn có: $a^2 + 49 \geq 14ab$

b) Chứng minh rằng: $\forall \mathbf{a}$ ta luôn có: $a^2 + 49{,}1 > 14ab$

c) Chứng minh rằng: $\forall \mathbf{a}$ ta luôn có: $a^4 - 17a^2 - 6a + 90 \geq 0$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

I.Thế nào là bất phương trình một ẩn?

Ví dụ: Ba ông Sông, Cửu, Long chung vốn mở công ty SCL chuyên sản xuất giày thể thao với số vốn ít nhất là 150 tỷ đồng. Tổng số vốn của hai ông Cửu và ông Long đã bỏ vào là 80 tỷ đồng. Còn lại là số vốn của ông Sông. Các bạn thử tính xem số vốn của ông Sông bỏ ra là bao nhiêu tỷ đồng.

Giải

Gọi số vốn của ông Sông bỏ ra là x (tỷ đồng)

Do tổng số vốn của công ty SCL ít nhất là 150 tỷ đồng.

Mà tổng số vốn của ông Cửu và ông Long là 80 tỷ đồng.

Nên ta có công thức: $\mathbf{x + 80 \geq 150}$

Người ta nói hệ thức: $\mathbf{x + 80 \geq 150}$ là một bất phương trình với ẩn là x

Cho hai biểu thức đại số A(x) và B(x) có cùng biến là x

Ví dụ: $\mathbf{A(x) = 3x - 1;\ x^2 - 6x - 2;\ \frac{1}{x} + x; \ldots}$

$\mathbf{B(x) = |x| - 5;\ 8x^3 - 5x^2 - 3;\ \frac{x}{x - 1} + x - 3; \ldots}$

Người ta gọi: $\mathbf{A(x) > B(x);\ A(x) < B(x);\ A(x) \geq B(x);\ A(x) \leq B(x)}$ là các bất phương trình với ẩn là x.

$\mathbf{A(x)}$ gọi là vế trái của bất phương trình.

$\mathbf{B(x)}$ gọi là vế phải của bất phương trình.

Ví dụ: $\mathbf{5x + 6 > 3x - 1}$ là một bất phương trình với ẩn là x.

$\mathbf{y^2 < 6y - 2}$ là

$\mathbf{5|t| + 6 \geq 8t - 12}$

$\mathbf{m + 1 \leq \frac{1}{m}}$

Ta cũng xem: $\mathbf{A(x) > 0}$; $\mathbf{A(x) < 0}$; $\mathbf{A(x) \geq 0}$; $\mathbf{A(x) \leq 0}$ là các bất phương trình với ẩn là x.

II. Nghiệm của bất phương trình.

Trở lại với ví dụ trên, ta có hệ thức: $\mathbf{x + 80 \geq 150}$

Với x = 70 ta có: $\mathbf{70 + 80 \geq 150}$ đúng.

Ta nói $\mathbf{x = 70}$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với x = 80 ta có: $\mathbf{80 + 80 \geq 150}$ đúng.

Ta nói $\mathbf{x = 80}$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với x = 60 ta có: $\mathbf{60 + 80 \geq 150}$ sai.

Ta nói $\mathbf{x = 60}$ không là nghiệm của bất phương trình.

Với x = 67 ta có: $\mathbf{67 + 80 \geq 150}$ sai.

Ta nói $\mathbf{x = 67}$ không là nghiệm của bất phương trình.

Vậy nghiệm của bất phương trình: $\mathbf{x + 80 \geq 150}$ (1) là giá trị của x thỏa mãn hệ thức: (1)

Tập nghiệm của bất phương trình.

Tập hợp tất cả các nghiệm của một bất phương trình được gọi là tập nghiệm của bất phương trình đó.

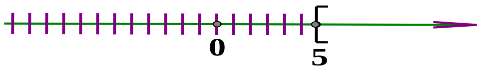
Giải bất phương trình tức là tìm tập nghiệm của bất phương trình đó.

Ví dụ1 Bất phương trình: $x \geq 5$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x lớn hơn hoặc bằng 5.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \{x \in R / x \geq 5\}$

Hoặc ghi gọn: $S = \{x / x \geq 5\}$

Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình trên trục số:



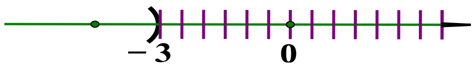
Ví dụ2

Bất phươngtrình: $x < -3$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x bé hơn -3.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \{x \in R / x < -3\}$

Hoặc ghi gọn: $S = \{x / x < -3\}$

Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình trên trục số:



Ví dụ3

Bất phương trình: $x^2 \leq -7$ không đúng với mọi giá trị của x.

Bất phương trình vô nghiệm.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \varnothing$

Ví dụ4 Bất phương trình: $(x - 5)^2 \leq 0$ chỉ đúng với x = 5.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \{5\}$

Ví dụ5 Bất phương trình: $(x - 7)^2 > 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x khác 7.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \{x / x \neq 7\}$

II. Bất phương trình tương đương.

Người ta gọi hai bất phương trình có cùng tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương.

Ký hiệu: **"$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương đó.**

Ví dụ:

$$x \geq 10 \Leftrightarrow 10 \leq x$$

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$0x \geq 12 \Leftrightarrow 0x \leq -6$$

$$x^2 \leq -10 \Leftrightarrow |x| \leq -2$$

BẮT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. Định nghĩa.

Bất phương trình có dạng: $ax + b > 0$ (hoặc $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$) trong đó a và b là hai số đã cho, $a \neq 0$, được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Ví dụ: $3x + 6 > 0$, $-5x - 7 < 0$

$12x - 16 \leq 0$, $\dfrac{-5}{2}x - \dfrac{7}{4} \geq 0$ là các bất phương trình bậc nhất một ẩn.

II. Hai quy tắc biến đổi bất phương trình.

a. Quy tắc chuyển vế

Khi chuyển vế một hạng tử của bất phương trình từ vế này qua vế kia ta phải đổi dấu hạng tử đó.

Ví dụ1: Giải các bất phương trình sau: a) $x - 16 \leq 0$ b) $x + 5 \geq 0$

c) $x - 0,5 > 0$ d) $x + \dfrac{3}{7} < 0$

Giải

Ta có:

a) $x - 16 \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 16$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x \,/\, x \leq 16\}$

b) $x + 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \geq -5$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x \,/\, x \geq -5\}$

c) $x - 0,5 > 0$

d) $x + \dfrac{3}{7} < 0$

Ví dụ2: Giải các bất phương trình sau: a) $5x - 16 \leq 4x - 30$ b) $6x + 5 \geq 5x - 7$

c) $2,5x - 3 \leq 1,5x + 10$ d) $\dfrac{3}{4}x + 12 \geq \dfrac{1}{4}x - 3$

Giải

Ta có:

a) $5x - 16 \leq 4x - 30$

$\Leftrightarrow 5x - 4x \leq -30 + 16$

$\Leftrightarrow x \leq -14$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x \,/\, x \leq -14\}$

b) $-3x + 5 \geq -4x - 7$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $2,5x - 3 \leq 1,5x + 10$

d) $\dfrac{3}{4}x + 12 \geq \dfrac{1}{4}x - 3$

b. Quy tắc nhân với một số

> **Nếu ta nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số dương thì ta được một bất phương trình mới cùng chiều với bất phương trình đã cho.**
> **Nếu ta nhân hai vế của một bất phương trình với cùng một số âm thì ta được một bất phương trình mới ngược chiều với bất phương trình đã cho.**

Ví dụ1: Giải các bất phương trình sau: a) $5x \le 30$ b) $5x \le -30$ c) $-5x \le 30$ d) $-5x \le -30$ e) $3x \ge 24$ f) $-7x \ge -28$

Giải

Ta có:

a) $5x \le 30$

$\Leftrightarrow x \le 6$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x \,/\, x \le 6\}$

b) $5x \le -30$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $-5x \le 30$

$\Leftrightarrow x \ge 6$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x \,/\, x \ge 6\}$

d) $-5x \le -30$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

e) $3x \ge 24$ f) $-7x \ge -28$

III. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Ví dụ1: Giải các bất phương trình sau: a) $2x - 14 \le 0$ b) $7x + 35 \ge 0$ c) $-2x - 14 \le 0$ d) $-7x + 35 \ge 0$ e) $12x - 18 < 0$ f) $-12x - 18 < 0$

Giải. Ta có:

a) $2x - 14 \le 0$

$\Leftrightarrow 2x \le 14$

$\Leftrightarrow x \le 7$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x \,/\, x \le 7\}$

b) $7x - 35 \ge 0$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $-2x - 14 \le 0$

$\Leftrightarrow -2x \le 14$

$\Leftrightarrow x \ge -7$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x \,/\, x \ge -7\}$

d) $-7x - 35 \ge 0$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

e) $12x - 18 < 0$

$\Leftrightarrow 12x < 18$

$\Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x \,/\, x < 1,5\}$

f) $-12x - 18 < 0$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

Bài 11. Giải các bất phương trình sau:

a) $7x + 42 > 0$ b) $-7x + 42 > 0$ c) $18x - 12 \ge 0$ d) $-18x - 12 \ge 0$

e) $\frac{2}{3}x - 18 > 0$ f) $\frac{-2}{3}x - 18 > 0$ k) $3\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3} \le 0$ m) $-3\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3} \le 0$

n) $30\%x - 70\% \ge 0$ s) $-30\%x - 70\% \ge 0$

t) $3{,}25x - 6{,}5 \le 0$ q) $-3{,}25x - 6{,}5 \le 0$

Giải. Ta có:

a) $7x + 42 > 0$

b) $-7x + 42 > 0$

c) $18x - 12 \ge 0$

d) $-18x - 12 \ge 0$

e) $\frac{2}{3}x - 18 > 0$

f) $\frac{-2}{3}x - 18 > 0$

k) $3\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3} \le 0$

m) $-3\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3} \le 0$

n) $30\%x - 70\% \ge 0$

s) $-30\%x - 70\% \ge 0$

t) $3{,}25x - 6{,}5 \le 0$

q) $-3{,}25x - 6{,}5 \le 0$

IV. Giải bất phương trình đưa được về dạng bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Ví dụ1 Giải các bất phương trình sau: a) $7x - 14 \le 5x - 30$ b) $-8x + 35 \ge 2x + 15$

c) $9x - 14 \le 4x + 11$ d) $-7x + 35 \ge -x - 1$

Giải. Ta có:

a) $7x - 14 \le 5x - 30$

$\Leftrightarrow 7x - 5x \le -30 + 14$

$\Leftrightarrow 2x \le -16$

$\Leftrightarrow x \le -8$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x / x \le -8\}$

b) $-8x + 35 \ge 2x + 15$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $9x - 14 \le 4x + 11$

d) $-7x + 35 \ge -x - 1$

Ví dụ2 Giải các bất phương trình sau:

a) $7(x - 2) \le 5(x - 6)$ b) $-8(x - 3) \ge 2(x + 15)$

c) $(x - 2)^2 \le x(x - 6) - 10$ d) $(x - 3)^2 \ge x(x + 2) - 11$

e) $(x - 2)(x + 2) > (x - 6)(x - 1) - 12$ f) $(x - 3)(x + 3) < (x - 1)(x + 2) + 7$

Giải. Ta có:

a) $7(x - 2) \le 5(x - 6)$

$\Leftrightarrow 7x - 14 \le 5x - 30$

$\Leftrightarrow 7x - 5x \le -30 + 14$

$\Leftrightarrow 2x \le -16$

$\Leftrightarrow x \le -8$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x / x \le -8\}$

b) $-8(x - 3) \ge 2(x + 15)$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $(x - 2)^2 \le x(x - 6) - 10$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \le x^2 - 6x - 10$

$\Leftrightarrow x^2 - x^2 + 6x - 4x \le -10 - 4$

$\Leftrightarrow 2x \le -14$

$\Leftrightarrow x \le -7$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x / x \le -7\}$

d) $(x - 3)^2 \ge x(x + 2) - 11$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

e) $(x - 2)(x + 2) > (x - 6)(x - 1) - 12$

f) $(x - 3)(x + 3) < (x - 1)(x + 2) + 7$

Ví dụ3 Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x}{2}-\frac{4x}{3}\le\frac{5}{4}$ c) $\frac{2x-4}{2}-\frac{5x-8}{3}>\frac{5}{4}$ e) $\frac{6x-4}{2}-\frac{10x-8}{3}\le 5x-2$

b) $\frac{x}{4}-\frac{x}{3}\ge-\frac{7}{6}$ d) $\frac{4x+6}{9}-\frac{8x-10}{4}<\frac{2x-5}{6}$ f) $\frac{3x+5}{6}-\frac{4x-10}{4}\ge-6x+3$

Giải. Ta có:

a) $\frac{x}{2}-\frac{4x}{3}\le\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{6x}{12}-\frac{16x}{12}\le\frac{15}{12}$

$\Leftrightarrow 6x-16x\le 15$

$\Leftrightarrow -10x\le 15$

$\Leftrightarrow x\ge -1,5$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S=\{x\,/\,x\ge -1,5\}$

b) $\frac{x}{4}-\frac{x}{3}\ge-\frac{7}{6}$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $\frac{2x-4}{2}-\frac{5x-8}{3}>\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{6(2x-4)}{12}-\frac{4(5x-8)}{12}>\frac{15}{12}$

$\Leftrightarrow 6(2x-4)-4(5x-8)>15$

$\Leftrightarrow 12x-24-20x+32>15$

$\Leftrightarrow -8x>7$

$\Leftrightarrow x<-\frac{7}{8}$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S=\left\{x\,/\,x<-\frac{7}{8}\right\}$

d) $\frac{4x+6}{9}-\frac{8x-10}{4}<\frac{2x-5}{6}$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

e) $\frac{6x-4}{2}-\frac{10x-8}{3}\le 5x-2$

$\Leftrightarrow \frac{6x-4}{2}-\frac{10x-8}{3}\le 5x-2$

$\Leftrightarrow \frac{2(6x-4)}{6}-\frac{3(10x-8)}{6}\le\frac{6(5x-2)}{6}$

$\Leftrightarrow 2(6x-4)-3(10x-8)\le 6(5x-2)$

$\Leftrightarrow 12x-8-30x+24\le 30x-12$

$\Leftrightarrow 12x-30x-30x\le -12+8-24$

$\Leftrightarrow -48x\le -28$

$\Leftrightarrow x\ge\frac{7}{12}$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S=\left\{x\,/\,x\ge\frac{7}{12}\right\}$

f) $\frac{3x+5}{6}-\frac{4x-10}{4}\ge-6x+3$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1

$0x \geq 0 \Leftrightarrow x \in R$	$0x \leq 0 \Leftrightarrow x \in R$	$0x > 0 \Leftrightarrow x \notin R$	$0x < 0 \Leftrightarrow x \notin R$
$0x \geq 6 \Leftrightarrow x \notin R$	$0x \leq 6 \Leftrightarrow x \in R$	$0x \leq -6 \Leftrightarrow x \notin R$	$0x \geq -6 \Leftrightarrow x \in R$

Ví dụ. Giải các bất phương trình sau:

a) $3(2x - 6) \geq 2(3x - 6) - 6$ b) $3(4x - 1) \leq 6(2x - 1) + 8$

c) $(x - 6)^2 \leq x(x - 12) + 30$ d) $(x - 2)(x + 5) > (x - 1)(x + 3) - 12$

Giải

Ta có:

a) $3(2x - 6) \geq 2(3x - 6) - 6$

$\Leftrightarrow 6x - 18 \geq 6x - 12 - 6$

$\Leftrightarrow 6x - 6x \geq -18 + 18$

$\Leftrightarrow 0x \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in R$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = R$

b) $3(4x - 1) \leq 6(2x - 1) + 1$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $(x - 6)^2 \leq x(x - 12) + 30$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

d) $(x - 2)(x + 5) > (x - 1)(x + 3) - 12$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

Dạng 2

$(x-5)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in R$	$(x-5)^2 + 3,2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in R$	$(x-5)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$	$(x-5)^2 > 0 \Leftrightarrow x - 5 \neq 0$	$(x-5)^2 < 0 \Leftrightarrow x \notin R$

Ví dụ. Giải các bất phương trình sau

a) $3x(2x - 6) + 2x \geq 5x(x - 2) - 9$ b) $(x - 1)^2 > 3(2x - 1) - 14$

c) $(x - 2)(x + 2) \leq 10x - 29$ d) $\dfrac{x^2 - 3x + 1}{2} - \dfrac{x^2 - 4x + 1}{3} > \dfrac{11x - 35}{6}$

Giải. Ta có:

a) $3x(2x-6)+2x \ge 5x(x-2)-9$

$\Leftrightarrow 6x^2-18x+2x \ge 5x^2-10x-9$

$\Leftrightarrow 6x^2-5x^2-18x+2x+10x+9 \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow x \in R$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = R$

b) $(x-1)^2 > 3(2x-1)-14$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $(x-2)(x+2) \le 10x-29$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{ \quad \}$

d) $\dfrac{x^2-3x+1}{2} - \dfrac{x^2-4x+1}{3} > \dfrac{11x-35}{6}$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

Dạng 3

$(x-5)^2 \ge 8^2$ $\Leftrightarrow x-5 \le -8$ hoặc $\Leftrightarrow x-5 \ge 8$	$(x-5)^2 \le 8^2$ $\Leftrightarrow -8 \le x-5 \le 8$

Ví dụ. Giải các bất phương trình sau

a) $3x^2 \ge 2x+8$

b) $5x^2 \ge -2x+7$

c) $x^2-10 < -3x$

d) $16x^2+9 \le 40x$

Giải. Ta có:

a) $3x^2 \ge 2x+8$

$\Leftrightarrow 9x^2 \ge 6x+24$

$\Leftrightarrow 9x^2-6x+1 \ge 25$

$\Leftrightarrow (3x-1)^2 \ge 25$

$\Leftrightarrow 3x-1 \le -5$ hoặc $3x-1 \ge 5$

$\Leftrightarrow 3x \le -4$ hoặc $3x \ge 6$

$\Leftrightarrow x \le \dfrac{-4}{3}$ hoặc $x \ge 2$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \left\{ x / x \le \dfrac{-4}{3} \text{ hay } x \ge 2 \right\}$

b) $5x^2 \ge -2x+7$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $x^2 - 10 < -3x$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 10 < -3x$

$\Leftrightarrow \quad 4x^2 - 40 < -12x$

$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 12x + 9 < 49$

$\Leftrightarrow \quad (2x + 3)^2 < 49$

$\Leftrightarrow \quad -7 < 2x + 3 < 7$

$\Leftrightarrow -10 < 2x < 4$

$\Leftrightarrow \quad -5 < x < 2$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x / -5 < x < 2\}$

d) $16x^2 + 9 \le 40x$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

Dạng 4

$$A(x).B(x) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ A(x) \ge 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) \le 0 \\ A(x) \le 0 \end{cases}$$

$$A(x).B(x) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \ge 0 \\ A(x) \le 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} A(x) \le 0 \\ A(x) \ge 0 \end{cases}$$

Ví dụ. Giải các bất phương trình sau

a) $x^2 \ge 3x + 40$

b) $x^2 \ge -5x + 14$

c) $x^2 \le 3x + 40$

d) $x^2 < -5x + 14$

e) $x^3 + 2x \le 3x^2 + 6$

f) $x^3 + 5x \ge 4x^2 + 2$

Giải. Ta có:

a) $x^2 \ge 3x + 40$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 40 \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 5x - 40 \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x - 8) + 5(x - 8) \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - 8)(x + 5) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 \ge 0 \\ x + 5 \ge 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 8 \le 0 \\ x + 5 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 8 \\ x \ge -5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \le 8 \\ x \le -5 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad x \ge 8$ hoặc $x \le -5$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x / x \le -5 \text{ hay } x \ge 8\}$

b) $x^2 \ge -5x + 14$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

c) $x^2 \le 3x + 40$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x - 40 \le 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 5x - 40 \le 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x-8) + 5(x-8) \le 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-8)(x+5) \le 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 \ge 0 \\ x + 5 \le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 8 \le 0 \\ x + 5 \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 8 \\ x \le -5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \le 8 \\ x \ge -5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x \in \varnothing$ hoặc $-5 \le x \le 8$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x / -5 \le x \le 8\}$

b) $x^2 < -5x + 14$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

e) $x^3 + 2x \le 3x^2 + 6$

$\Leftrightarrow \quad x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \le 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2(x-3) + 2(x-3) \le 0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 + 2)(x-3) \le 0$

$\Leftrightarrow \quad x - 3 \le 0$ do $x^2 + 2 > 0$

$\Leftrightarrow \quad x \le 3$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = \{x / x \le 3\}$

f) $x^3 + 5x \ge 4x^2 + 2$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

I. Ôn lại về giá trị tuyệt đối.

Giá trị tuyệt đối của một số là khoảng cách từ **điểm đó** đến điểm **0** trên trục số.

Giá trị tuyệt đối của số a ký hiệu là $|\mathbf{a}|$.

Ví dụ. $|\mathbf{7}| = 7$ (khoảng cách từ điểm 7 đến điểm 0 trên trục số là 7 đơn vị).

$|\mathbf{2}| = 2$ (khoảng cách từ điểm 2 đến điểm 0 trên trục số là 2 đơn vị).

$|\mathbf{0}| = 0$ (khoảng cách từ điểm 0 đến điểm 0 trên trục số là 0 đơn vị).

$\left|\frac{\mathbf{3}}{4}\right| = \frac{3}{4}$ (khoảng cách từ điểm $\frac{3}{4}$ đến điểm 0 trên trục số là $\frac{3}{4}$ đơn vị).

$|-\mathbf{2}| = 2$ (khoảng cách từ điểm -2 đến điểm 0 trên trục số là 2 đơn vị).

$|-\mathbf{20}| = 20$ (khoảng cách từ điểm -20 đến điểm 0 trên trục số là 20 đơn vị).

$\left|-\frac{\mathbf{3}}{4}\right| = \frac{3}{4}$ (khoảng cách từ điểm $-\frac{3}{4}$ đến điểm 0 trên trục số là $\frac{3}{4}$ đơn vị).

Tóm lại: $|\mathbf{a}| = \mathbf{a}$ **khi** $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$

$|\mathbf{a}| = -\mathbf{a}$ **khi** $\mathbf{a} < \mathbf{0}$

Với $\mathbf{x} \geq 2$ thì: $\mathbf{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow |\mathbf{x} - 2| = \mathbf{x} - 2$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{5}$ thì:

$\mathbf{x} \geq -\mathbf{8}$ thì: $\mathbf{x} + 8 \geq 0 \Rightarrow |\mathbf{x} + 8| = \mathbf{x} + 8$

$\mathbf{x} \geq -\mathbf{10}$ thì

Với $\mathbf{x} < 2$ thì: $\mathbf{x} - 2 < 0 \Rightarrow |\mathbf{x} - 2| = -\mathbf{x} + 2$

$\mathbf{x} < \mathbf{3}$ thì:

$\mathbf{x} < -\mathbf{4}$ thì: $\mathbf{x} + 4 < 0 \Rightarrow |\mathbf{x} + 4| = -\mathbf{x} - 4$

$\mathbf{x} < -\mathbf{1}$ thì:

Đặc biệt:

$|\mathbf{x}^2| = \mathbf{x}^2$ **do** $\mathbf{x}^2 \geq \mathbf{0}$

$|\mathbf{x}^2 + \mathbf{7}| = \mathbf{x}^2 + \mathbf{7}$ **do** $\mathbf{x}^2 + \mathbf{7} > \mathbf{0}$

$|\mathbf{x}^2 - \mathbf{6x} + \mathbf{9}| = |(\mathbf{x} - \mathbf{3})^2| = (\mathbf{x} - \mathbf{3})^2$ **do** $(\mathbf{x} - \mathbf{3})^2 \geq \mathbf{0}$

$|\mathbf{x}^2 - \mathbf{6x} + \mathbf{10}| = |(\mathbf{x} - \mathbf{3})^2 + \mathbf{1}| = (\mathbf{x} - \mathbf{3})^2 + \mathbf{1}$ **do** $(\mathbf{x} - \mathbf{3})^2 + \mathbf{1} > \mathbf{0}$

II. Các ví dụ.

Ví dụ1. Giải các phương trình sau:

a) $|x-2|-3=6$ b) $|x+1|-10=-4$

c) $|2x-8|-5=1$ d) $|3x+1|-6=-8$

Giải

Cách 1

Ta có:

a) $|x-2|-3=6$

$\Leftrightarrow |x-2|=6+3$

$\Leftrightarrow |x-2|=9$

$\Leftrightarrow x-2=-9$ hoặc $x-2=9$

$\Leftrightarrow x=-9+2$ hoặc $x=9+2$

$\Leftrightarrow x=-7$ hoặc $x=11$

Tập nghiệm của phương trình là:

$S=\{-7;11\}$

b) $|x+1|-10=-4$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của phương trình là:

Cách 2

Ta có:

a) $|x-2|-3=6$

Với: $x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2\Rightarrow |x-2|=x-2$

Nên: $|x-2|-3=6$

$\Leftrightarrow x-2-3=6$

$\Leftrightarrow x-5=6$

$\Leftrightarrow x=11$ thỏa $x\ge 2$

Với $x-2<0\Leftrightarrow x<2\Rightarrow |x-2|=-x+2$

Nên: $|x-2|-3=6$

$\Leftrightarrow -x+2-3=6$

$\Leftrightarrow -x-1=6$

$\Leftrightarrow -x=7$

$\Leftrightarrow x=-7$ thỏa $x<2$

Tập nghiệm của phương trình là:

$S=\{-7;11\}$

b) $|x+1|-10=-4$

Tập nghiệm của phương trình là:

Ví dụ2. Giải các phương trình sau:

a) $|x-3|+8=4x$ b) $|x-2|-10=2x-6$

c) $|3x-1|+2=x$ d) $|4x+8|-1=3x-6$

e) $|x-6|+6=x$ f) $|4x-8|+4x=8$

Giải

Cách 1

Ta có:

a) $|x-3|+8=4x$

$\Leftrightarrow |x-3| = 4x-8$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-8 \geq 0 \\ x-3 = 4x-8 \ \textit{hay} \ x-3 = -4x+8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 8 \\ x-4x = -8+3 \ \textit{hay} \ x+4x = 8+3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -3x = -5 \ \textit{hay} \ 5x = 11 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \dfrac{5}{3} \ \textit{hay} \ x = \dfrac{11}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{11}{5}$

Tập nghiệm của phương trình là:

$S = \left\{\dfrac{11}{5}\right\}$

b) $|x-2|-10 = 2x-6$

$\Leftrightarrow$

Tập nghiệm của phương trình là:

Cách 2

Ta có:

a) $|x-3|+8=4x$

Với $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \Rightarrow |x-3| = x-3$

Nên:

$|x-3|+8=4x$

$\Leftrightarrow x-3+8=4x$

$\Leftrightarrow x-4x = -5$

$\Leftrightarrow -3x = -5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$ không thỏa $x \geq 3$

Với $x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3 \Rightarrow |x-3| = -x+3$

Nên:

$|x-3|+8=4x$

$\Leftrightarrow -x+3+8=4x$

$\Leftrightarrow -x-4x = -11$

$\Leftrightarrow -5x = -11$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{11}{5}$ thỏa $x < 3$

Tập nghiệm của phương trình là:

$S = \left\{\dfrac{11}{5}\right\}$

b) $|x-2|-10 = 2x-6$

Tập nghiệm của phương trình là:

BÀI TẬP VỀ ĐỊNH LÝ TALET VÀ
TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

Nắm vững lại:

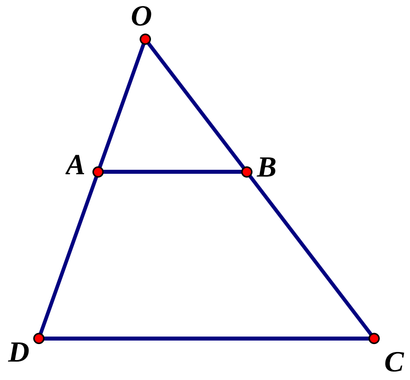
Ôn lại tốt

Mới làm phần sau được!

- Định lý Talet.
- Định lý đảo của định lý Talet.
- Hệ quả của định lý Talet.
- Tính chất đường phân giác của tam giác.

Bài 1: Cho AB // CD ; OA = 2cm ; OB = 3cm ; AB = 4cm ; OD = 6cm.
Tính OC và DC.

Giải



Do AB // CD (gt)

Nên ta có: $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$ (Hệ quả của định lý Talet)

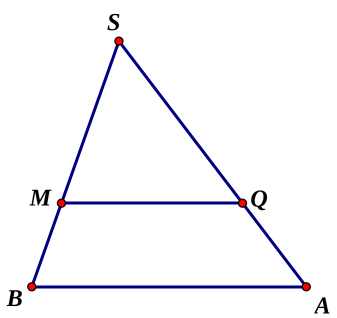
$$\frac{2}{6} = \frac{3}{OC} = \frac{4}{DC}$$

$$DC = \frac{6.4}{2} = 12(cm)$$

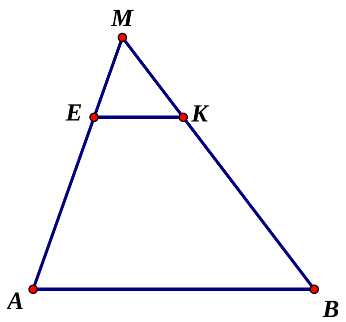
$$OC = \frac{6.3}{2} = 9(cm)$$

Tự làm:

Bài 1.1 Cho MQ // AB ; SM = 12cm ; SB = 18cm ;
SA = 24cm ; AB = 24cm. Tính SQ và MQ.

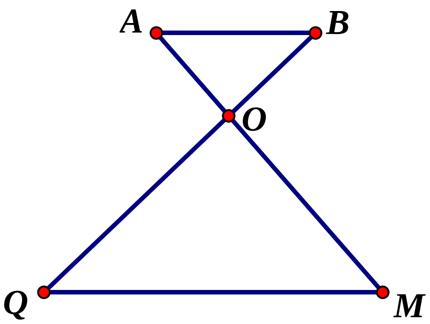


Bài 1.2 Cho EK // AB ; ME = 1,2cm ; MK = 1,8cm ;
AE = 4,8cm ; EK = 1,5cm.
Tính MB và AB.



Bài 2. Cho AB // MQ ; OA = 12cm ; OM = 18cm ; OB = 15cm ; AB = 18cm.
Tính OQ và MQ.

Giải



Ta có: AB // MQ (gt)

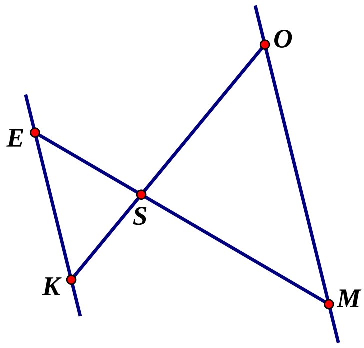
Nên: $\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{OQ} = \frac{AB}{MQ}$ (Hệ quả của định lý Talet)

$$\frac{12}{18} = \frac{15}{OQ} = \frac{18}{MQ}$$

OQ =

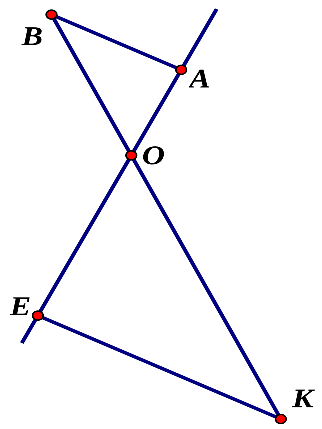
MQ =

Tự làm:



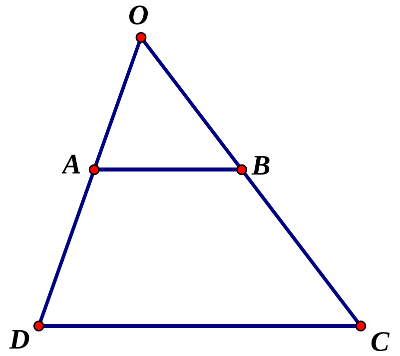
Bài 2.1 Cho EK // OM ; SE = 4,8cm ; SM = 12cm ;
SK = 3,6cm ; EK = 5,4cm.
Tính SO và OM.

Bài 2.2 Cho biết: AB // EK, OA = 3,6cm ; OB = 5,4cm ; OE = 6,3cm, AB = 4,8cm. Tính OK và EK.



Bài 3. (Sử dụng định lý Talet đảo)

Cho OA = 1,2cm ; OB = 1,6cm ; OD = 4,8cm ; OC = 6,4cm. Chứng minh AB // CD.



Giải

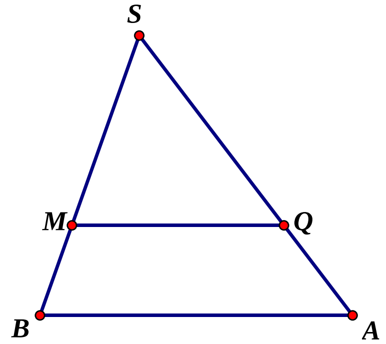
Ta có: $\frac{OA}{OD} = \frac{1,2}{4,8} = \frac{1}{4}$ và $\frac{OB}{OC} = \frac{1,6}{6,4} = \frac{1}{4}$

Nên: $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}$

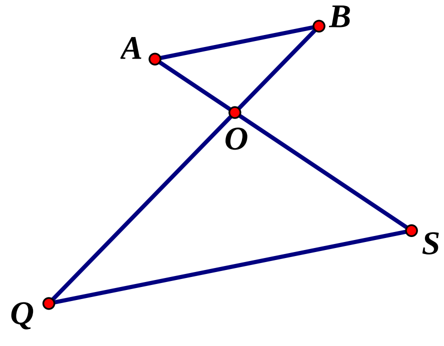
Do đó: AB // CD (định lý Talet đảo)

Tự làm:

Bài 3.1 Cho MS = 9cm ; MB = 3,6cm ; QS = 12cm ; QA = 4,8cm. Chứng minh: MQ // AB.



Bài 3.2 Cho OA = 24cm ; OS = 36cm ; OB = 30cm ; OQ = 45cm. Chứng minh: AB // SQ.



Bài 4. Cho ΔABC có AM là đường trung tuyến. Điểm Q nằm giữa A và M. BQ cắt AC tại K, CQ cắt AB tại E. Gọi O là đối xứng của Q qua M.

a) Chứng minh tứ giác BQCO là hình bình hành.

b) So sánh $\frac{AE}{AB}$ và $\frac{AQ}{AO}$ và chứng minh EK // BC.

c) AO cắt EK tại I. Chứng minh I là trung điểm của EK.

Giải

a) Chứng minh tứ giác BQCO là hình bình hành.

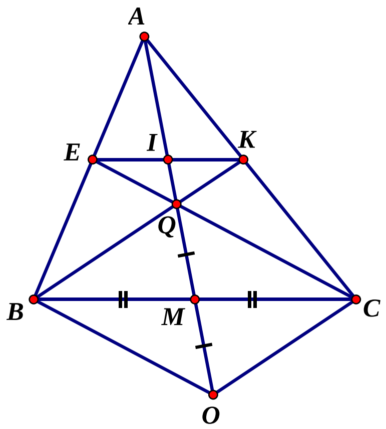
Xét tứ giác BQCO có:

M là trung điển của OQ (O là đối xứng của Q qua M)

M là trung điển của BC (AM là đường trung tuyến của ΔABC)

Vậy: tứ giác BQCO là hình bình hành.

b) So sánh $\frac{AE}{AB}$ và $\frac{AQ}{AO}$ và chứng minh EK // BC.



Ta có: EQ // BO (BQCO là hình bình hành)

Nên: $\frac{AE}{AB} = \frac{AQ}{AO}$ (định lý Talet)

Tương tự ta có: $\frac{AK}{AC} = \frac{AQ}{AO}$

Do đó: $\frac{AE}{AB} = \frac{AK}{AC}$

Suy ra: EK // BC (định lý Talet đảo)

c) AO cắt EK tại I. Chứng minh I là trung điểm của EK.

Ta có: EK // BC (gt)

Nên: $\frac{AI}{AM} = \frac{IE}{MB}$ và $\frac{AI}{AM} = \frac{IK}{MC}$ (Hệ quả của định lý Talet)

Suy ra: $\frac{IE}{MB} = \frac{IK}{MC}$

Mà: MB = MC (AM là đường trung tuyến của ΔABC)

Do đó: IE = IK

Vậy: I là trung điểm của EK.

Tự làm:

Bài 4.1 Cho ΔOBC có OA là đường trung tuyến. Điểm S nằm giữa O và A. Tia BS cắt OC tại H, tia CS cắt OB tại E. Gọi O là đối xứng của Q qua M.

a) Chứng minh tứ giác BSCR hình bình hành .

b) So sánh $\frac{OS}{OR}$ và $\frac{OH}{OC}$ và chứng minh EH // BC.

c) Gọi K là giao điểm của OA và EH. Chứng minh: K là trung điểm của EH.

Bài 4.2 Cho ΔABC có AS là đường trung tuyến. Điểm G nằm giữa A và S. BG cắt AC tại I, CG cắt AB tại H.

a) Chứng minh: HI // BC.

b) Gọi O là trung điểm của HI. Chứng minh: ba điểm A, O và S thẳng hàng.

Bài 4.3 Cho ΔABC cân tại A. Đường thẳng vuông góc với BC tại B cắt đường thẳng vuông góc với AC tại C ở D. Vẽ $BE \perp CD$ tại E. Gọi M là giao điểm của AD và BE. Vẽ EK vuông góc với BD tại K.

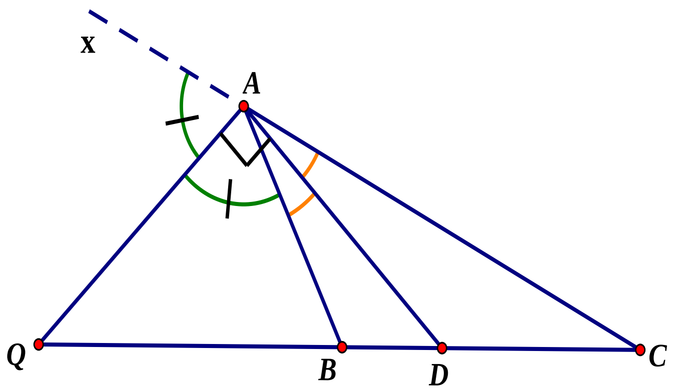
a) Chứng minh: MK // AB.

b) Chứng minh: M là trung điểm của BE.

Nhắc lại:

Nếu AD là đường phân giác trong và AQ là đường phân giác ngoài của ΔABC

thì $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{DB}{DC} = \frac{QB}{QC}$



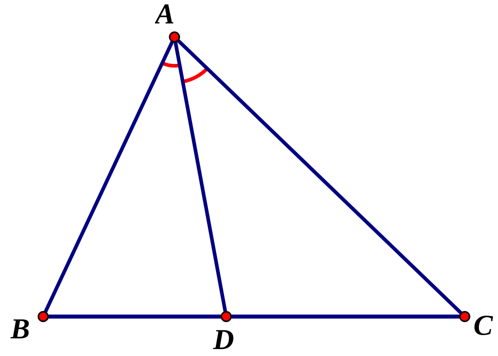
Chú ý:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$ (giả thiết các mẫu khác 0)

$$\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$$

Bài 5. Cho ΔABC có AD là đường phân giác. Biết AB = 8cm ; AC = 12cm ; BC = 15cm. Tính DB và DC.

Giải



Ta có: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$ (AD là đường phân giác của ΔABC)

$\frac{DB+DC}{DC}=\frac{AB+AC}{AC}$

$\frac{BC}{DC}=\frac{8+12}{12}$

$\frac{15}{DC}=\frac{20}{12}$

$DC=\frac{15.12}{20}=$

$DB=$

Tự làm:

Bài 5.1 Cho ΔABC có AO là đường phân giác. Biết AB = 15cm ; AC = 25cm ; BC = 30cm. Tính OB và OC.

Bài 5.2 Cho ΔABC có vuông tại A có AI là đường phân giác. Biết AB = 5cm ; AC = 12cm. Tính IB và IC.

Đảo lại: Cho ΔABC. Điểm D nằm giữa B và C. Điểm Q thuộc tia đối của tia BC.

❖ **Nếu $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}$ thì AD là đường phân giác trong của ΔABC.**

❖ **Nếu $\frac{QB}{QC}=\frac{AB}{AC}$ thì AQ là đường phân giác ngoài của ΔABC.**

❖ **Nếu AD là đường phân giác trong của ΔABC mà AD vuông góc với AQ thì AQ là đường phân giác ngoài của ΔABC.**

Bài 6. Cho ΔABC có AM là đường trung tuyến. Gọi ME, MK lần lượt là các đường phân giác của ΔAMB, ΔAMC.

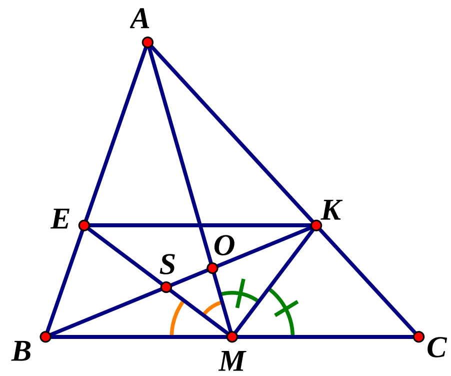
a) Chứng minh: $\frac{EA}{EB}=\frac{MA}{MC}$

b) Chứng minh: EK // BC

c) BK cắt MA, ME lần lượt ở O, S. Chứng minh: $KB.SO=KO.SB$

Giải

a) Chứng minh: $\frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MC}$



Ta có: $\frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MB}$ (AM là đường phân giác của ΔAMB)

MB = MC (gt)

Nên: $\frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MC}$

b) Chứng minh: EK // BC

Ta có: $\frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MC}$ (cmt)

$\frac{KA}{KC} = \frac{MA}{MC}$ (MA là đường phân giác của ΔAMC)

Do đó: $\frac{EA}{EB} = \frac{KA}{KC}$

Nên: EK // BC (định lý Talet đảo)

c) BK cắt MA, ME lần lượt ở O, S. Chứng minh: $KB.SO = KO.SB$

Xét ΔMOB có:

MS là đường phân giác trong

MK là đường phân giác ngoài

Nên: $\frac{SO}{SB} = \frac{KO}{KB}$

Hay: $KB.SO = KO.SB$

Tự làm:

Bài 6.1 Cho ΔABC có AM là đường trung tuyến. Gọi MS, MQ lần lượt là các đường phân giác của ΔAMB, ΔAMC.

a) Chứng minh: SQ // BC

b) SC cắt MA, MQ lần lượt ở V, I. Chứng minh: $SC.IV = SV.IC$

c) Chứng minh: BQ đi qua điểm V.

Bài 6.2 Cho ΔABC có AM là đường trung tuyến. Gọi ME là đường phân giác của ΔAMB. Từ E vẽ đường thẳng song song với BC cắt AC ở K. Chứng minh: MK là đường phân giác của ΔAMC.

SỰ ĐỒNG DẠNG

(*Muốn tự học tốt, phải kiên nhẫn đọc*)

Đồng dạng là gì? Để hiểu được vấn đề này ta hãy quan tâm một số ví dụ sau:

Ví dụ 1: Một bà mẹ sinh đôi hai bé gái giống hệt nhau.

Khi được 10 tuổi bé A thì cao hơn bé B một chút nhưng chúng vẫn giống hệt nhau.

Ví dụ 2: Bạn Nhã Ca chụp hình thẻ. Bạn rửa (cùng một kiểu hình):

5 tấm 3cm x 4cm

2 tấm 6cm x 8cm

1 tấm 30cm x 40cm

Chỗ nào lỗi sửa lại giùm nha.

Tuy nhiều kích cỡ như vậy nhưng những tấm hình đó lại giống hệt nhau.

Ví dụ 3: Khi đi chơi ta bắt gặp một số nơi xây dựng các khu dân cư:

. Khu A là các căn biệt thự giống hệt nhau (ngay cả kích thước và nhiều hướng khác nhau).

. Khu B là các nhà cao ốc giống hệt nhau nhưng chiều cao lại khác nhau.

Nhưng tại sao họ lại làm như vậy:

. Rất đẹp.

. Chỉ một bản vẽ sử dụng cho nhiều căn biệt thự, căn hộ.

. Giảm chi phí, giảm mặt bằng xây dựng.

. Dễ gia công và lắp ghép.

Ví dụ 4: Cùng một bản đồ địa chất của Việt Nam nhưng người ta có thể phóng to, nhỏ với nhiều kích thước khác nhau:

. Đưa vào sách giáo khoa cho học sinh xem.

. Phóng thành kích thước lớn hơn cho giáo viên giảng dạy.

. Đưa lên màn ảnh rộng trong các cuộc hội thảo.

Còn rất nhiều ví dụ nữa nói lên sự giống nhau giữa các sự vật.

Ở đây ta gán cho tên mới: sự đồng dạng.

Nói cho dễ hiểu: Bản chất của sự đồng dạng chính là sự giống hệt nhau.

Trong hình học của lớp 8 chúng ta học về tam giác đồng dạng

(tức là các tam giác này giống hệt nhau, chúng có thể:

. Bằng nhau.

. Hoặc có nhiều kích cỡ khác nhau.

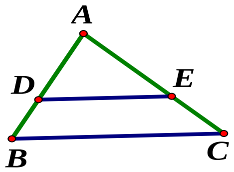
Để viết cho nhanh chúng ta dùng ký hiệu diễn tả hai tam giác đồng dạng:

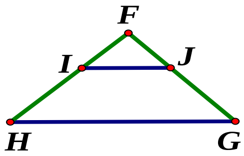
Ví dụ: $\Delta ABC \sim \Delta ODE$ (ΔABC đồng dạng với ΔODE)

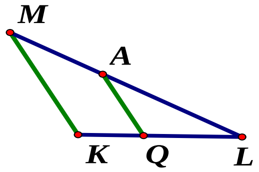
(ΔHPQ đồng dạng với ΔSAB)

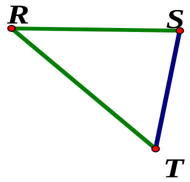
Trước khi đi sâu vào hai tam giác đồng dạng với nhau, chúng ta hãy quan sát một số hình vẽ về hai tam giác đồng dạng. (các phần còn lại học sinh tự ghi **theo thứ tự của đỉnh**)

Ví dụ 5:





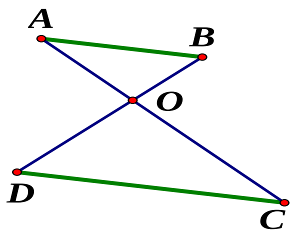


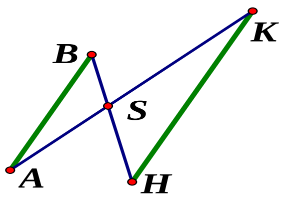


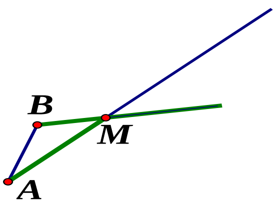
ΔADE ~ ΔABC
(DE // BC)

Vẽ ΔTAB ~ ΔTSR

Ví dụ 6:



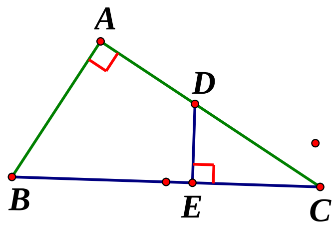


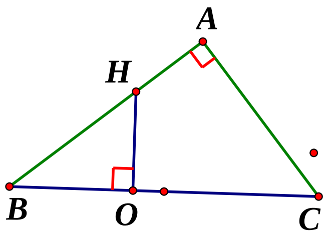


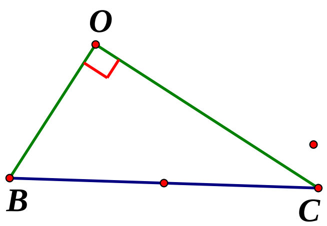
ΔOAB ~ ΔOCD
(AB // CD)

Vẽ ΔMAB ~ ΔMOQ

Ví dụ 7:





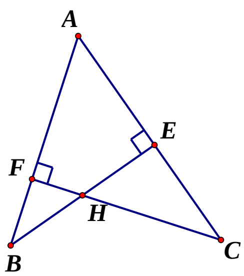


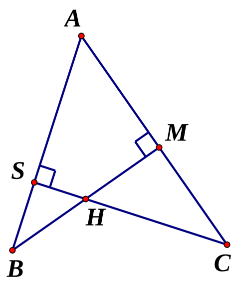
ΔCAB ~ ΔCED

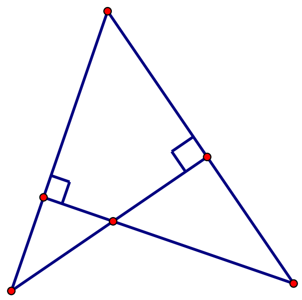
ΔBOH ~

Vẽ ΔCHK ~ ΔCOB

Ví dụ 8:

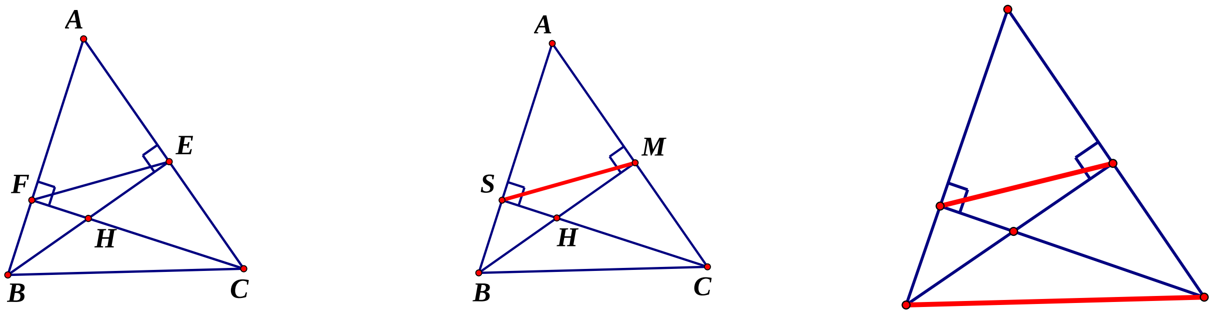






ΔAEB ~ ΔAFC
ΔHEC ~ ΔHFB

Ví dụ 9:



Δ AEF ~ Δ ABC

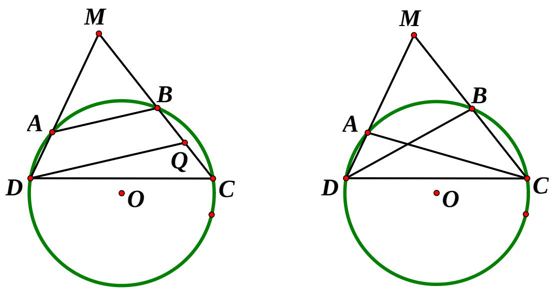
Δ HEF ~ Δ HCB

Ví dụ 10:

Lấy bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng thuộc đường tròn (O) (tâm O)

AD và BC giao nhau tại M

DQ //AB (Q thuộc MC)



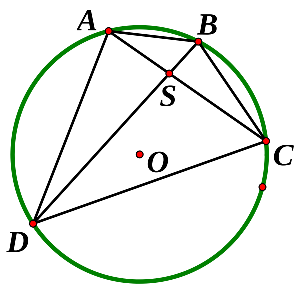
Ta có: Δ MAB ~ Δ MCD

Δ MDQ ~ Δ MCD

Δ MAC ~ Δ MBD

Lấy bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự cùng thuộc đường tròn (O) (tâm O)

AC và BD giao nhau tại S

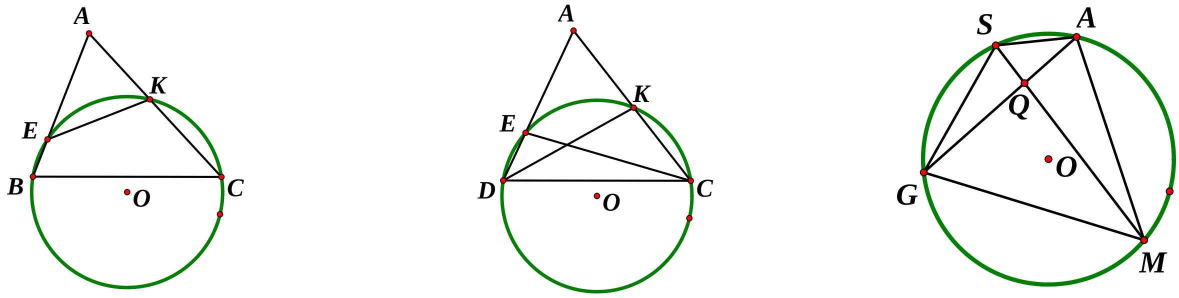


Ta có: Δ SAB ~ Δ SDC

Δ SAD ~ Δ SBC

Thực hành

Hãy ghi các tam giác đồng dạng ở các hình sau:

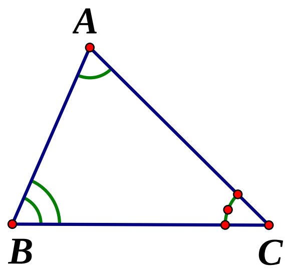


TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1/ Định nghĩa

Hai tam giác được gọi là đồng dạng với nhau nếu chúng có các góc tương ứng bằng nhau và các cạnh tương ứng tỉ lệ.

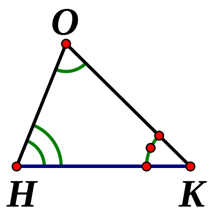
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{O},\ \hat{B} = \hat{H},\ \hat{C} = \hat{K} \\ \dfrac{AB}{OH} = \dfrac{AC}{OK} = \dfrac{BC}{HK} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta OHK$$



$$\Delta ABC \sim \Delta OHK \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{O},\ \hat{B} = \hat{H},\ \hat{C} = \hat{K} \\ \dfrac{AB}{OH} = \dfrac{AC}{OK} = \dfrac{BC}{HK} \end{cases}$$

Ta viết cho hai chiều

$$\Delta ABC \sim \Delta OHK \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{O},\ \hat{B} = \hat{H},\ \hat{C} = \hat{K} \\ \dfrac{AB}{OH} = \dfrac{AC}{OK} = \dfrac{BC}{HK} \end{cases}$$



Thực hành 1

Cho ΔABC có điểm E nằm giữa A và B. Từ E vẽ đường thẳng song song với BC cắt AC tại K. Chứng minh: $\Delta AEK \sim \Delta ABC$

Giải.

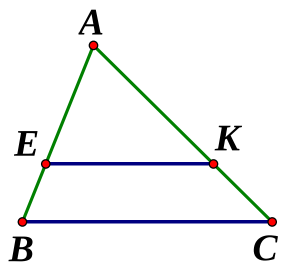
Xét ΔAEK và ΔABC có:

$\widehat{BAC}$ chung

$\widehat{AEK} = \widehat{ABC}$, $\widehat{AKE} = \widehat{ACB}$ (do EK // BC)

$\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{EK}{BC}$ (EK // BC, hệ quả của định lý Ta-lét)

Vậy: $\Delta AEK \sim \Delta ABC$



Nhận xét: Ở các ví dụ 5, ví dụ 6 hoàn toàn đúng

Về sau này chúng ta trình bày nhanh như sau:

Xét ΔAEK và ΔABC có:

EK // BC

Vậy: $\Delta AEK \sim \Delta ABC$

Thực hành 2

Cho $\Delta OHK \sim \Delta ABC$ có $\hat{O} = 70^0$, OH = 2cm, OK = 3cm, AB = 6cm. Tính $\hat{A}$ và AC.

Giải.

Do: $\Delta OHK \sim \Delta ABC$

Nên: $\hat{A} = \hat{O} = 70^0$

$$\frac{OH}{AB} = \frac{OK}{AC}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{AC}$$

$$AC = \frac{6.3}{2} = 9\ (cm)$$

Tự làm:

1. Cho $\Delta MSE \sim \Delta ABC$ có $\hat{M} = 50^0$, MS = 6cm, ME = 8cm, AB = 9cm. Tính $\hat{A}$ và AC.
2. Cho $\Delta SQG \sim \Delta ABC$ có $\hat{S} + \hat{Q} = 120^0$. Tính $\hat{A} + \hat{B}$

Thực hành 2

a) Cho $\Delta SEK \sim \Delta SCB$. Chứng minh: SE.SB = SK.SC

b) Cho $\Delta SAB \sim \Delta SCA$. Chứng minh: $SA^2 = SB.SC$

c) Cho $\Delta IAB \sim \Delta IDC$. Chứng minh: IA.IC = IB.ID

d) Cho $\Delta BAC \sim \Delta BHA$. Chứng minh: $BA^2 = BH.BC$

e) Cho $\Delta HAB \sim \Delta HCA$. Chứng minh: $HA^2 = HB.HC$

Giải.

a) Ta có: $\frac{SE}{SC} = \frac{SK}{SB}$ (Do $\Delta SEK \sim \Delta SCB$)

Hay: SE.SB = SK.SC

b) Ta có: $\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SA}$ (Do $\Delta SAB \sim \Delta SCA$)

Hay: $SA^2 = SB.SC$

c) Ta có: $\frac{IA}{ID} = \frac{IB}{IC}$ (Do $\Delta IAB \sim \Delta IDC$)

Hay: IA.IC = IB.ID

d) Ta có: $\frac{BA}{BH} = \frac{BC}{BA}$ (Do $\Delta BAC \sim \Delta BHA$)

Hay: $BA^2 = BH.BC$

e) Ta có: $\frac{HA}{HC} = \frac{HB}{HA}$ (Do $\Delta HAB \sim \Delta HCA$)

Hay: $HA^2 = HB.HC$

Tự làm:

a) Cho $\Delta OEK \sim \Delta OAB$. Chứng minh: OE.OB = OK.OA

b) Cho $\Delta OEK \sim \Delta OAE$. Chứng minh: $OE^2 = OK.OA$

c) Cho $\Delta MHK \sim \Delta MDQ$. Chứng minh: MH.MQ = MK.MD

d) Cho $\Delta CAB \sim \Delta CHA$. Chứng minh: $CA^2 = CH.CB$

e) Cho $\Delta OAB \sim \Delta OCA$. Chứng minh: $OA^2 = OB.OC$

2/ Tính chất

2.1 Nếu $\Delta ABC \sim \Delta OHK$ thì $\Delta OHK \sim \Delta ABC$

2.2 Nếu $\Delta ABC = \Delta SMQ$ thì $\Delta ABC \sim \Delta SMQ$

2.3 Nếu $\Delta ABC \sim \Delta OHK$ và $\Delta OHK \sim \Delta MEK$ thì $\Delta ABC \sim \Delta MEK$

3/ Dấu hiệu nhận biết hai tam giác đồng dạng.

Để chứng minh: $\Delta ABC \sim \Delta OHK$ ta phải chứng minh

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{O},\ \hat{B} = \hat{H},\ \hat{C} = \hat{K} \\ \dfrac{AB}{OH} = \dfrac{AC}{OK} = \dfrac{BC}{HK} \end{cases}$$

Xem ra ta phải làm nhiều việc quá. Vậy ta có thể giảm đi một số điều kiện nào đó không? Giả sử chỉ với hai điều kiện nào đã cho ta sẽ chứng minh các điều kiện còn lại cũng sẽ xảy ra. Các bạn thử nghĩ xem.

Sau một hồi suy nghĩ, bạn Hậu (nhỏ con nhất lớp) nói tớ sẽ giải quyết thử nha.

Cả lớp ồ lên ngạc nhiên vì bạn Hậu học tiến bộ nhiều (so với lớp 7) nhưng với câu này quá sức với bạn chăng.

Lớp trưởng Thùy Mai nhắc rằng chúng ta hãy đặt niềm tin ở bạn. Rồi bạn hãy thử làm xem:

Bạn Hậu đặt bài toán như sau:

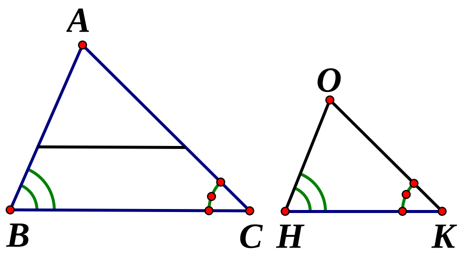
Cho ΔABC và ΔOHK có $\hat{B}=\hat{H}$ và $\hat{C}=\hat{K}$ ta chứng minh $\Delta ABC \sim \Delta OHK$

Giải.

Trường hợp: OH < AB

Do: ΔABC và ΔOHK có $\hat{B}=\hat{H}$ và $\hat{C}=\hat{K}$

Nên: $\hat{A}=\hat{O}$



Trên tia AB chọn điểm E sao cho AE = OH

Trên tia AC chọn điểm S sao cho AS = OK

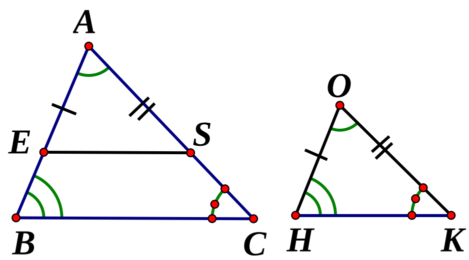
Xét ΔAES và ΔOHK có:

$\hat{A}=\hat{O}$ (cmt)

AE = OH

AS = OK

Vậy: $\Delta AES = \Delta OHK$



Do đó: $\widehat{AES} = \widehat{OHK}$

Mà: $\widehat{ABC} = \widehat{OHK}\,(gt)$

Nên: $\widehat{AES} = \widehat{ABC}$

Mặt khác hai góc này ở vị trí đồng vị

Do đó: ES // BC

Suy ra: $\Delta AES \sim \Delta ABC$

Mà: $\Delta AES \sim \Delta OHK$ ($\Delta AES = \Delta OHK$)

Cho nên: $\Delta ABC \sim \Delta OHK$

Các trường hợp còn lại ta cũng chứng minh được: $\Delta ABC \sim \Delta OHK$

Cả lớp im lặng nghe bạn Hậu trình bày xong, đồng loạt đứng lên tán thưởng bạn Hậu.

Cám ơn bạn Hậu đã giúp chúng tôi một cách chứng minh hai tam giác đồng dạng đơn giản.

Vậy ta có trường hợp đồng dạng thứ nhất của hai tam giác:

> **Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.**

Hệ quả:

> **Nếu hai tam giác vuông có một cặp góc nhọn bằng nhau thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.**

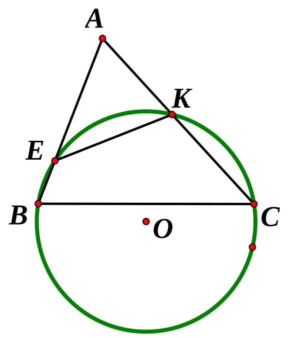
Xem ra lúc này ta chứng minh hai tam giác đồng dạng có vẻ dễ thở hơn.
Chúng ta sẽ làm một số bài nhẹ nhàng sau:

Bài 7. Cho ΔABC có điểm E nằm giữa A và B, điểm K nằm giữa A và C sao cho:
$\widehat{AEK} = \widehat{ACB}$. Chứng minh: $\Delta AEK \sim \Delta ACB$ và AE.AB = AK.AC

Giải.

Cách vẽ: giống như ví dụ 10:

- **Vẽ đường tròn (O)**
- **Lấy hai điểm B và C thuộc đường tròn (O)**
- **Lấy điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O)**
- **Đoạn thẳng AB cắt đường tròn (O) tại E**
  Đoạn thẳng AC cắt đường tròn (O) tại K
  Ta có ngay: $\widehat{AEK} = \widehat{ACB}$.
- **Dùng tẩy xóa đường tròn (O)**



Xét ΔAEK và ΔACB có:

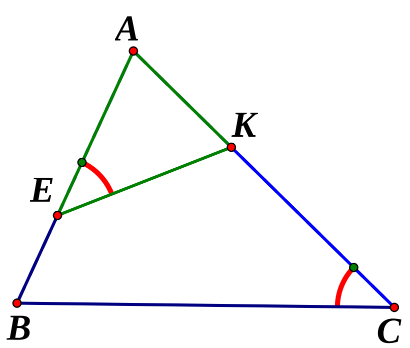
$\widehat{BAC}$ chung

$\widehat{AEK} = \widehat{ACB}$ (gt)

Vậy: $\Delta AEK \sim \Delta ACB$

Nên: $\frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AB}$

Hay: AE.AB = AK.AC



Tự làm:

Cho ΔSBC có điểm M nằm giữa S và B, điểm Q nằm giữa S và C sao cho:
$\widehat{SMQ} = \widehat{SCB}$. Chứng minh: $\Delta SMQ \sim \Delta SCB$ và SM.SB = SQ.SC

Bài 8. Cho ΔABC có điểm E nằm giữa A và B, điểm K nằm giữa A và C sao cho:
$\widehat{ABK} = \widehat{ACE}$. Chứng minh: $\Delta ABK \sim \Delta ACE$ và $\widehat{AKB} = \widehat{AEC}$ và AE.AB = AK.AC

Giải.

Cách vẽ: giống như ví dụ 10:

. Vẽ đường tròn (O)

. Lấy hai điểm B và C thuộc đường tròn (O)

. Lấy điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O)

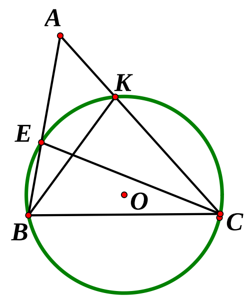
. Đoạn thẳng AB cắt đường tròn (O) tại E

Đoạn thẳng AC cắt đường tròn (O) tại K

Vẽ các đoạn thẳng BK và CE

Ta có ngay: $\widehat{ABK} = \widehat{ACE}$.

. Dùng tẩy xóa đường tròn (O)



Xét ΔABK và ΔACE có:

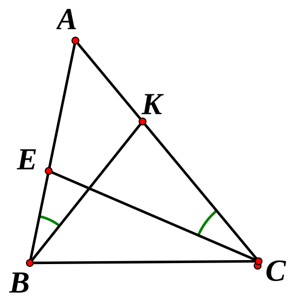
$\widehat{BAC}$ chung

$\widehat{ABK} = \widehat{ACE}$ (gt)

Vậy: $\Delta ABK \sim \Delta ACE$

Nên: $\widehat{AKB} = \widehat{AEC}$ và $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AK}{AE}$

Do đó: AE.AB = AK.AC



Tự làm:

Cho ΔMBC có điểm H nằm giữa M và B, điểm A nằm giữa M và C sao cho: $\widehat{MBA} = \widehat{MCH}$. Chứng minh: $\Delta MBA \sim \Delta MCH$ và $\widehat{MAB} = \widehat{MHC}$ và MH.MB = MA.MC

Bài 9. Hai đoạn thẳng AB và SH giao nhau tại điểm M. Cho biết : $\widehat{SAB} = \widehat{SHB}$. Chứng minh: $\Delta MAS \sim \Delta MHB$ và MA.MB = MS.MH

Giải.

Cách vẽ: giống như ví dụ 10:

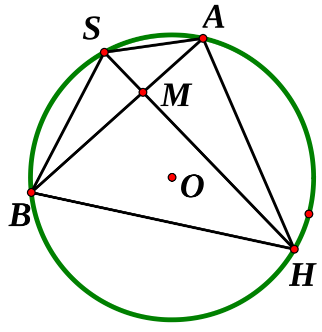
. Vẽ đường tròn (O)

. Lấy bốn điểm A, H, B, S theo thứ tự thuộc đường tròn (O)

. Đoạn thẳng AB cắt đoạn thẳng SH tại M

Ta có ngay: $\widehat{SAB} = \widehat{SHB}$.

. Dùng tẩy xóa đường tròn (O)



Xét ΔMAS và ΔMHB có:

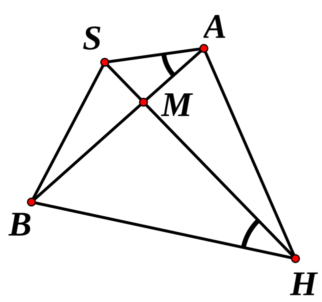
$\widehat{AMS} = \widehat{HMB}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{SAB} = \widehat{SHB}$ (gt)

Vậy: $\Delta MAS \sim \Delta MHB$

Nên: $\dfrac{MA}{MH} = \dfrac{MS}{MB}$

Do đó: MA.MB = MS.MH



Tự làm:

Hai đoạn thẳng EK và PQ giao nhau tại điểm S. Cho biết : $\widehat{PEK} = \widehat{PQK}$.

Chứng minh: $\Delta SEP \sim \Delta SQK$ và $SE.SK = SP.SQ$

Bây giờ ta dùng:

Hệ quả:

> **Nếu hai tam giác vuông có một cặp góc nhọn bằng nhau thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.**

Bài 10. Cho ΔABC vuông ở A. Điểm H nằm giữa A và C. Vẽ HD vuông góc với BC ở D.

Chứng minh: $\Delta CDH \sim \Delta CAB$ và $CH.CA = CD.CB$

Giải.

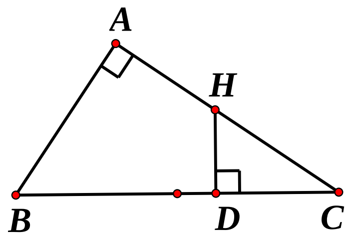
Xét hai tam giác vuông CDH và CAB có:

$\widehat{ACB}$ chung

Vậy: $\Delta CDH \sim \Delta CAB$

Nên: $\frac{CD}{CA} = \frac{CH}{CB}$

Do đó: $CH.CA = CD.CB$



Tự làm:

10.1 Cho ΔABC vuông ở A. Điểm H nằm giữa A và B. Vẽ HD vuông góc với BC ở D.

Chứng minh: $\Delta BDH \sim \Delta BAC$ và $BH.BA = BD.BC$

10.2 Cho ΔOBC vuông ở O. Điểm I nằm giữa O và C. Vẽ IM vuông góc với BC ở M.

Chứng minh: $\Delta CMI \sim \Delta COB$ và $CI.CO = CM.CB$

Bài 11. Cho ΔABC ($AB < AC$) nhọn có H là giao điểm của hai đường cao BE và CF.

a) Chứng minh: $\Delta AEB \sim \Delta AFC$ và $AF.AB = AE.AC$ và $AE < AF$

b) Chứng minh: $\Delta HFB \sim \Delta HEC$ và $HE.HB = HF.HC$

c) Chứng minh: $\Delta ECH \sim \Delta EBA$ và $EA.EC = EH.EB$

Tương tự ta có gì?

Giải.

a) Chứng minh: $\Delta AEB \sim \Delta AFC$ và $AF.AB = AE.AC$ và $AE < AF$

Xét hai tam giác vuông AEB và AFC có:

$\widehat{BAC}$ chung

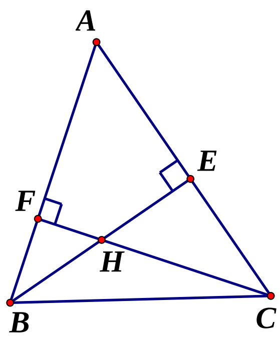
Vậy: $\Delta AEB \sim \Delta AFC$

Nên: $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Hay: $AF.AB = AE.AC$

Mà: $AB < AC$ (gt).

Nên: $AE < AF$



b) Chứng minh: ΔHFB ~ ΔHEC và HE.HB = HF.HC

Xét hai tam giác vuông HFB và HEC có:

$F\hat{H}B = E\hat{H}C$ (hai góc đối đỉnh)

Vậy: $\Delta HFB \sim \Delta HEC$

Nên: $\frac{HF}{HE} = \frac{HB}{HC}$

Hay: HE.HB = HF.HC

c) Chứng minh: ΔECH ~ ΔEBA và EA.EC = EH.EB

Tương tự ta có gì?

Xét hai tam giác vuông ECH và EBA có:

$E\hat{C}H = E\hat{B}A$ (cùng phụ $B\hat{A}C$)

Vậy: $\Delta ECH \sim \Delta EBA$

Nên: $\frac{EC}{EB} = \frac{EH}{EA}$

Hay: EA.EC = EH.EB

Tương tự ta có: FA.FB = FH.FC

Tự làm:

11.1 Cho ΔOBC (OB < OC) nhọn có H là giao điểm của hai đường cao BS và CK.

a) Chứng minh: $\Delta OSB \sim \Delta OKC$ và OK.OB = OS.OC và OS < OK

b) Chứng minh: $\Delta HKB \sim \Delta HSC$ và HS.HB = HK.HC

c) Chứng minh: $\Delta SCH \sim \Delta SBO$ và SO.SC = SH.SB

Tương tự ta có gì?

11.2 Cho ΔFBC vuông ở F. Điểm H nằm giữa F và C. Vẽ HD vuông góc với BC ở D.

a) Chứng minh: $\Delta CDH \sim \Delta CFB$ và CH.CF = CD.CB

b) Gọi A là giao điểm của BF và HD. Chứng minh: HA.HD = HC.HF

11.3 Cho ΔABC nhọn có H là giao điểm của ba đường cao AD, BE và CF.

a) Chứng minh: AF.AB = AE.AC = AH.AD

Tương tự ta có gì?

b) Chứng minh: HD.HA = HE.HB = HF.HC

c) Chứng minh: DB.DC = DH.DA.

Tương tự ta có gì?

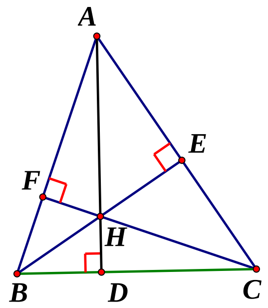
Bài 12. Cho ΔABC nhọn có H là giao điểm của ba đường cao AD, BE và CF.

a) Chứng minh: $\Delta BDH \sim \Delta BEC$ và BH.BE = BD.BC

b) Chứng minh: $BH.BE + CH.CF = BC^2$. Tương tự ta có gì?

Giải.

a) Chứng minh: $\Delta BDH \sim \Delta BEC$ và BH.BE = BD.BC



Xét hai tam giác vuông BDH và BEC có:

$\widehat{DBH}$ chung

Vậy: $\Delta BDH \sim \Delta BEC$

Nên: $\dfrac{BD}{BE} = \dfrac{BH}{BC}$

Hay: BH.BE = BD.BC

b) Chứng minh: $BH.BE + CH.CF = BC^2$

Ta có: BH.BE = BD.BC (cmt)

Chứng minh tương tự ta cũng có: CH.CF = CD.CB

Nên: $BH.BE + CH.CF = BD.BC + CD.CB = BC.(BD + CD) = BC.BC = BC^2$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $AH.AD + CH.CF = AC^2$

$AH.AD + BH.BE = AB^2$

Tự làm:

12.1 Cho ΔOBC nhọn có H là giao điểm của ba đường cao OS, BQ và CK.

a) Chứng minh: $\Delta BSH \sim \Delta BQC$ và BH.BQ = BS.BC

b) Chứng minh: $BH.BQ + CH.CK = BC^2$. Tương tự ta có gì?

Bài 13. Cho ΔABC vuông ở A. Có AH là đường cao.

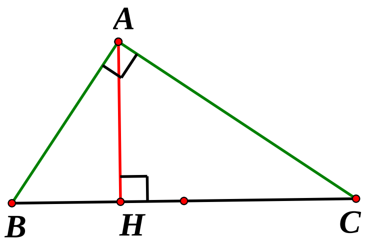
a) Chứng minh: $\Delta BAC \sim \Delta BHA$ và $BA^2 = BH.BC$

b) Chứng minh: $\Delta CAB \sim \Delta CHA$ và $CA^2 = CH.CB$

c) Chứng minh: $\Delta HAB \sim \Delta HCA$ và $HA^2 = HB.HC$

Giải.

a) Chứng minh: $\Delta BAC \sim \Delta BHA$ và $BA^2 = BH.BC$



Xét hai tam giác vuông BAC và BHA có:

$\widehat{ABC}$ chung

Vậy: $\Delta BAC \sim \Delta BHA$

Nên: $\dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BC}{BA}$

Hay: $BA^2 = BH.BC$

b) Chứng minh: $\Delta CAB \sim \Delta CHA$ và $CA^2 = CH.CB$

Xét hai tam giác vuông CAB và CHA có:

$\widehat{ACB}$ chung

Vậy: $\Delta CAB \sim \Delta CHA$

Nên: $\dfrac{CA}{CH} = \dfrac{CB}{CA}$

Hay: $CA^2 = CH.CB$

c) Chứng minh: $\Delta HAB \sim \Delta HCA$ và $HA^2 = HB.HC$

Xét hai tam giác vuông HAB và HCA có:

$\widehat{ACH} = \widehat{HAB}$ (cùng phụ $\widehat{HAC}$)

Vậy: $\Delta HAB \sim \Delta HCA$

Nên: $\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{HB}{HA}$

Hay: $HA^2 = HB.HC$

Tự làm:

13.1 Cho ΔOBC vuông ở O. Có OM là đường cao.

a) Chứng minh: $\Delta BOC \sim \Delta BMO$ và $BO^2 = BM.BC$

b) Chứng minh: $\Delta COB \sim \Delta CMO$ và $CO^2 = CM.CB$

c) Chứng minh: $\Delta MOB \sim \Delta MCO$ và $MO^2 = MB.MC$

TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG THỨ HAI CỦA HAI TAM GIÁC

Lớp trưởng Thùy Mai đặt ra: Còn cách nào để chứng minh hai tam giác đồng dạng không?

Một bạn nêu ra: Có ba trường hợp bằng nhau của hai tam giác. Vậy cũng có khả năng xảy ra có ba trường hợp đồng dạng của hai tam giác.

Hãy nêu ra ý tưởng xem các bạn, lớp trưởng Thùy Mai nhắc lại.

Bạn Phước thử xem nào và phác thảo ra:

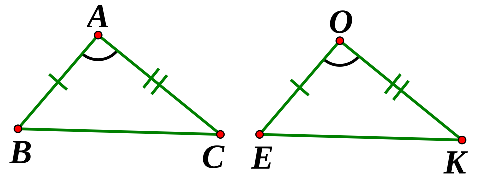
Cho hai tam giác ABC và OEK có:

$AB = OE$

$\widehat{BAC} = \widehat{EOK}$

$AC = OK$

Ta có ngay: $\Delta ABC = \Delta OEK$



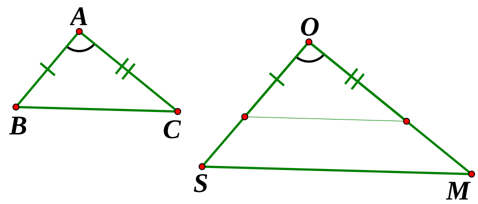
Vậy có khi nào:

Cho hai tam giác ABC và OSM có:

$\widehat{BAC} = \widehat{SOM}$

$\dfrac{AB}{OS} = \dfrac{AC}{OM}$

Ta có ngay: $\Delta ABC \sim \Delta OSM$

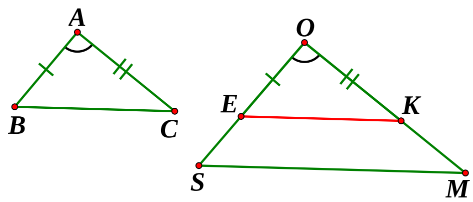


Các bạn cùng ồ lên: có khả năng làm được.

Bạn Ngân nói: Cũng như trường hợp một.

Ta tạo ra: $\Delta ABC = \Delta OEK$

Rồi chứng minh: $\Delta OEK \sim \Delta OSM$



Bạn Hoàng nói:

Tôi hiểu rồi, để tôi làm thử nha.

Trên cạnh OS chọn điểm E sao cho OE = AB

Bạn Hà coi chừng nha: Nếu AB > OS rồi sao.

Bạn Hoàng nói: Ừ nhỉ.

Vậy ta lập luận như sau:

. Nếu: AB = OS và AC = OM kết hợp $\widehat{BAC} = \widehat{SOM}$

Ta có: $\Delta ABC = \Delta OSM$ suy ra: $\Delta ABC \sim \Delta OSM$

. Nếu: $AB \neq OS$ và $AC \neq OM$

Trên tia OS chọn điểm E sao cho OE = AB

Trên tia OM chọn điểm K sao cho OK = AC

Kết hợp $\widehat{BAC} = \widehat{SOM}$

Ta có: $\Delta ABC = \Delta OEK$ suy ra: $\Delta ABC \sim \Delta OEK$

Bây giờ ta chứng minh: $\Delta OEK \sim \Delta OSM$

Ta có: $\frac{AB}{OS} = \frac{AC}{OM}$ (gt)

OE = AB ; OK = AC (Δ ABC = Δ OEK)

Nên: $\frac{OE}{OS} = \frac{OK}{OM}$

Do đó: EK // SM (định lý Ta-lét đảo)

Vậy: Δ OEK ~ Δ OSM

Suy ra: Δ ABC ~ Δ OSM (cùng đồng dạng với Δ OEK)

Cả lớp reo lên mừng quá: Ta có thêm một cách chứng minh hai tam giác đồng dạng rồi.

Lớp trưởng Thùy Mai tóm lại:

Trường hợp đồng dạng thứ hai của hai tam giác.

Nếu hai cạnh của tam giác này tỷ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.

Hệ quả:

Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỷ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Các bạn đều nhận xét: Các bài tập sử dụng trường hợp đồng dạng thứ hai của hai tam giác, xem ra không dễ dàng do khó nhận thấy.

Thầy nhận xét: Lớp này suy nghĩ được trường hợp đồng dạng này quá hay.

Đồng ý là bài tập cho khó nhận biết được hai tam giác đồng dạng như vậy.

Nhưng đừng quá lo lắng. Bây giờ ta tập làm quen với các bài dễ đã.

Sau đó có kinh nghiệm, mới làm các bài khó hơn một chút, rồi bài khó hơn một chút nữa.

Rồi thở phào: Ủa cũng bình thường thôi.

Kinh nghiệm: Khi chứng minh Δ OEK ~ Δ SMQ

Mà sử dụng: $\mathbf{O\hat{E}K = S\hat{M}Q}$

Cần phải sử dụng các cạnh: EO và EK ; MS và MQ

Sau đó chứng minh: $\mathbf{\frac{EO}{MS} = \frac{EK}{MQ}}$

Tương tự cho các cặp tam giác đồng dạng khác.

Thầy nhấn mạnh lại rằng:

. Nhắm thử cặp góc bằng nhau trước.

. Có xảy ra: **Hai cạnh của tam giác này tỷ lệ với hai cạnh của tam giác kia. (hai cạnh của góc sử dụng)**

Thực hành

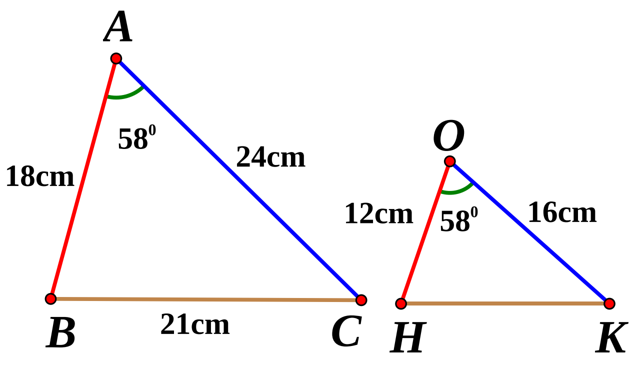
Bài 14. Chứng minh: Δ OHK và Δ ABC ở hình sau đồng dạng và tính HK

Giải

Ta có: $\frac{OH}{AB}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$

$\frac{OK}{AC}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$

Nên: $\frac{OH}{AB}=\frac{OK}{AC}$



Xét Δ OHK và Δ ABC có:

$\widehat{HOK}=\widehat{BAC}\ (=58^0)$

$\frac{OH}{AB}=\frac{OK}{AC}$ (cmt)

Vậy: Δ OHK ~ Δ ABC

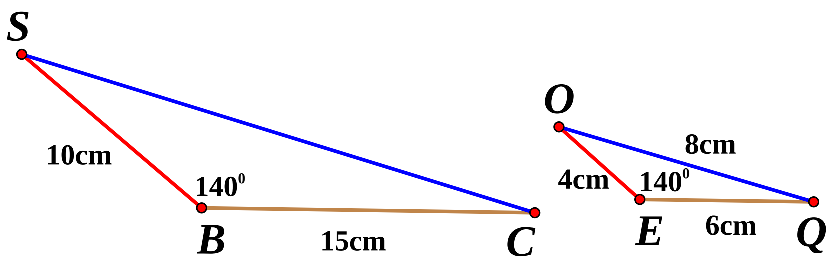
Nên: $\frac{OH}{AB}=\frac{HK}{BC}$

$\frac{12}{18}=\frac{HK}{21}$

HK = 14 cm

Bài 14.1 Chứng minh: Δ OEQ và Δ SBC ở hình sau đồng dạng và tính SC.

Giải **Các bạn tự giải.**

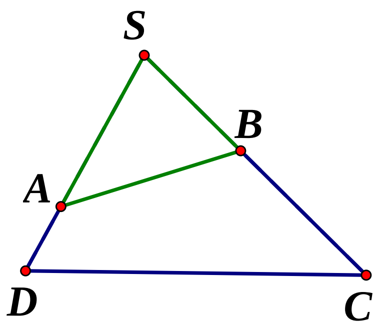


Bài 15. Ở hình sau cho: SB = 10cm, SA = 12cm, SD = 15cm, SC = 18cm, AB = 12cm.
Chứng minh: Δ SAB ~ Δ SCD ở hình sau đồng dạng và tính DC.

Giải

Ta có: $\frac{SA}{SC}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$; $\frac{SB}{SD}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

Nên: $\frac{SA}{SC}=\frac{SB}{SD}$



Xét $\Delta\,SAB$ và $\Delta\,SCD$ có:

$\widehat{ASB}$ chung

$\frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD}$ (cmt)

Vậy: $\Delta\,SAB \sim \Delta\,SCD$

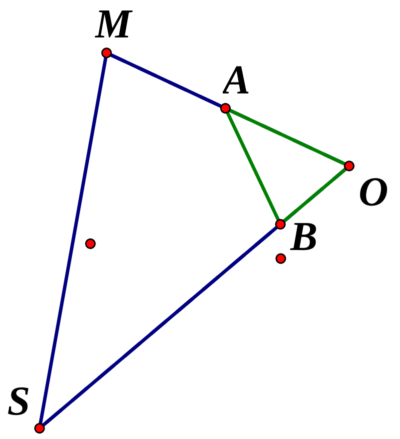
Nên: $\frac{SA}{SC} = \frac{AB}{CD}$

$\frac{12}{18} = \frac{12}{CD}$ Do đó: CD = 18 cm

Bài 15.1 Ở hình sau cho: OA = 5cm, OB = 3cm, OM = 9cm, OS = 15cm, MS = 14,4cm.

Chứng minh: $\Delta\,OAB \sim \Delta\,OSM$ và tính AB.

Các bạn tự giải

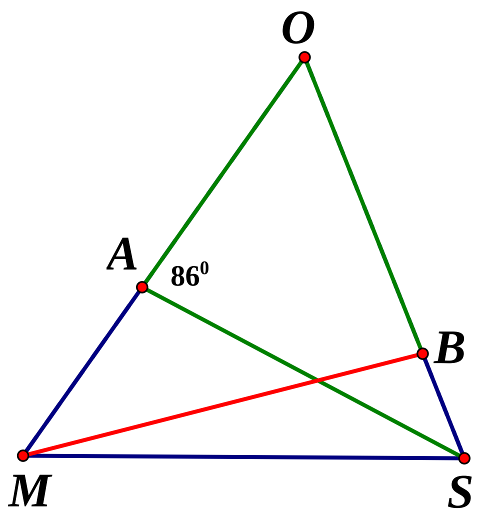


Bài 16 Ở hình sau cho: OA = 36cm, OB = 48cm, OS = 60cm, OM = 80cm, $\widehat{OAS} = 86^0$. Chứng minh: $\Delta\,OAS \sim \Delta\,OBM$ và tính $\widehat{OBM}$.

Giải

Ta có: $\frac{OA}{OB} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$; $\frac{OS}{OM} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$

Nên: $\frac{OA}{OB} = \frac{OS}{OM}$



Xét $\Delta\,OHK$ và $\Delta\,ABC$ có:

$\widehat{AOB}$ chung

$\frac{OA}{OB} = \frac{OS}{OM}$ (cmt)

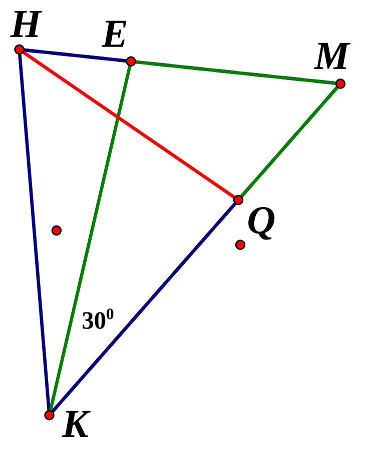
Vậy: $\Delta\,OAS \sim \Delta\,OBM$

Nên: $\widehat{OBM} = \widehat{OAS}$

Mà: $\widehat{OAS} = 86^0$

Do đó: $\widehat{OBM} = 86^0$

Bài 16.1 Ở hình sau cho: MQ = 3,6cm, ME = 6cm, MH = 9cm, MK = 15cm, $\widehat{MKE} = 30^0$. Chứng minh: Δ MQH ~ Δ MEK và tính $\widehat{MHQ}$.



Bài 17. Ở hình sau cho: OE = 4cm, OQ = 10cm, OH = 9cm, OK = 22,5cm, $\widehat{HQK} = 63^0$. Chứng minh: Δ HOE ~ Δ KOQ và tính $\widehat{HEK}$.

Giải

Ta có: $\frac{OE}{OQ} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$; $\frac{OH}{OK} = \frac{9}{22,5} = \frac{2}{5}$

Nên: $\frac{OE}{OQ} = \frac{OH}{OK}$

Xét Δ HOE và Δ KOQ có:

$\widehat{HOE} = \widehat{KOQ}$ (hai góc đối đỉnh)

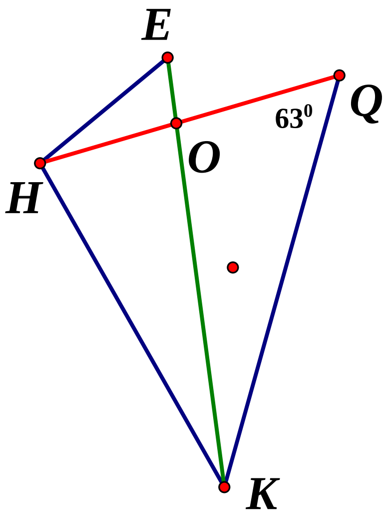
$\frac{OE}{OQ} = \frac{OH}{OK}$ (cmt)

Vậy: Δ HOE ~ Δ KOQ

Nên: $\widehat{HEK} = \widehat{HQK}$

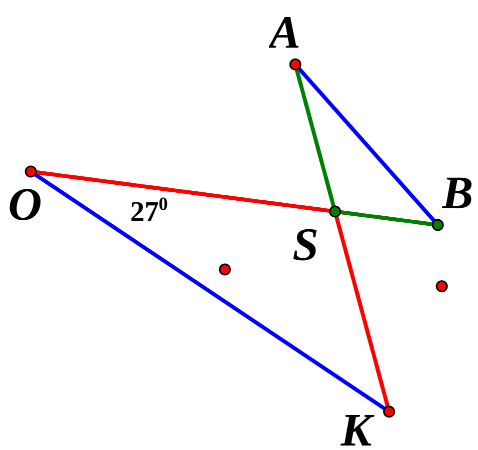
Mà: $\widehat{HQK} = 63^0$

Do đó: $\widehat{HEK} = 63^0$



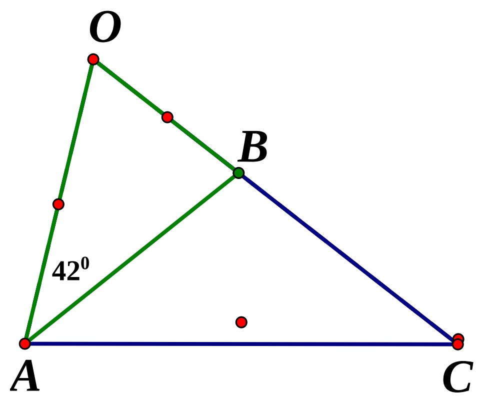
Bài 17.1 Ở hình sau cho: SA = 6cm, SO = 14cm, SB = 3,6cm, SK = 8,4cm, $\widehat{SOK} = 27^0$. Chứng minh: Δ SAB ~ Δ SOK và tính $\widehat{SAB}$.

Các bạn tự giải.



Bài 18. Ở hình sau cho: OA = 6cm, OB = 4cm, OC = 9cm, $\widehat{OAB} = 42^0$.

Chứng minh: $\Delta OAB \sim \Delta OCA$ và tính $\widehat{OCA}$.



Giải

Ta có: $\frac{OA}{OC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$; $\frac{OB}{OA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Nên: $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OA}$

Xét ΔOAB và ΔOCA có:

$\widehat{AOB}$ chung

$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OA}$ (cmt)

Vậy: $\Delta OAB \sim \Delta OCA$

Nên: $\widehat{OAB} = \widehat{OCA}$

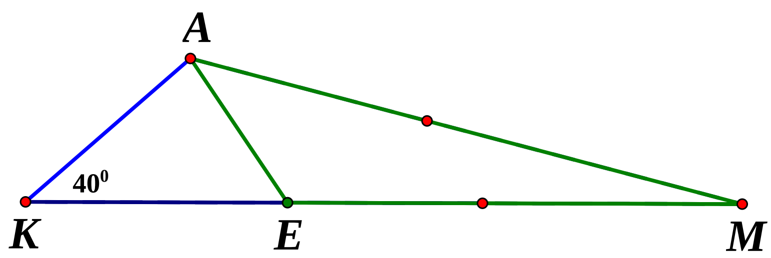
Mà: $\widehat{OAB} = 42^0$

Do đó: $\widehat{OCA} = 42^0$

Bài 18.1 Ở hình sau cho: MA = 12cm, ME = 9cm, MK = 16cm, $\widehat{MKA} = 40^0$.

Chứng minh: $\Delta MAE \sim \Delta MKA$ và tính $\widehat{MAE}$.

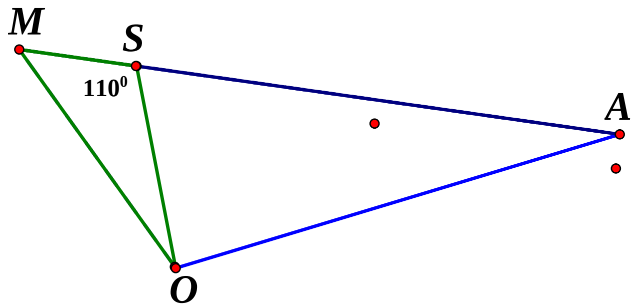
Các bạn tự giải.



Bài 18.2 Ở hình sau cho: MS = 1,6cm, MA = 8,1cm, MO = 3,6cm, $\widehat{MSO} = 110^0$.

Chứng minh: $\Delta MOS \sim \Delta MAO$ và tính $\widehat{MOA}$.

Các bạn tự giải.

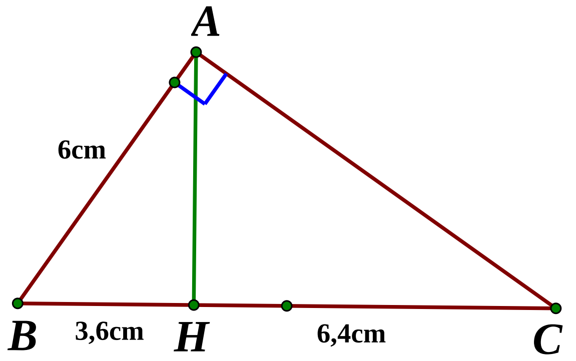


Bài 19. Cho tam giác ABC vuông ở A. Điểm H nằm giữa B và C thỏa điều kiện AB = 6cm, HB = 3,6cm, HC = 6,4cm. Chứng minh: $\Delta BAC \sim \Delta BHA$ và $AH \perp BC$

Giải

Ta có: $\dfrac{BA}{BH} = \dfrac{6}{3,6} = \dfrac{5}{3}$; $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{3,6+6,4}{6} = \dfrac{5}{3}$

Nên: $\dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BC}{BA}$



Xét ΔBAC và ΔBHA có:

$\widehat{ABH}$ chung

$\dfrac{BA}{BH} = \dfrac{BC}{BA}$ (cmt)

Vậy: $\Delta BAC \sim \Delta BHA$

Nên: $\widehat{BAC} = \widehat{BHA}$

Mà: $\widehat{BAC} = 90^0$ (gt)

Do đó: $\widehat{BHA} = 90^0$

Hay: $AH \perp BC$

Hoặc ghi: Vậy: $\Delta BAC \sim \Delta BHA$

Mà: tam giác ABC vuông ở A

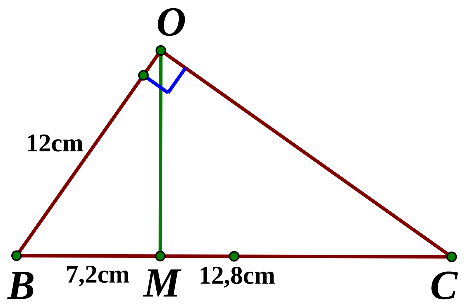
Do đó: tam giác BHA vuông ở H

Hay: $AH \perp BC$

Bài 19.1 Cho tam giác OBC vuông ở O. Điểm M nằm giữa B và C thỏa điều kiện OB = 12cm, MB = 7,2cm, MC = 12,8cm.

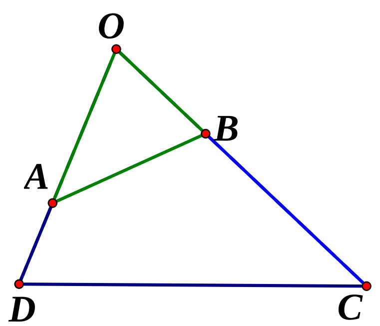
Chứng minh: $\Delta BOC \sim \Delta BMO$ và $OM \perp BC$

Các bạn tự giải.



Bài 20. Ở hình sau cho biết: OA.OD = OB.OC. Chứng minh: $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ và suy ra: $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$

Giải



Xét ΔOAB và ΔOCD có:

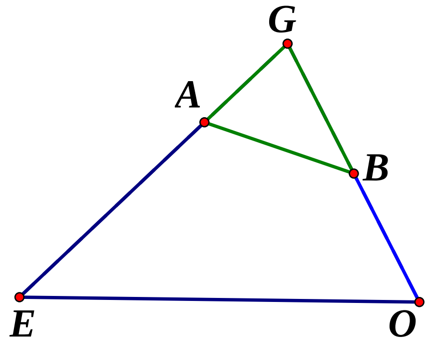
$\widehat{AOB}$ chung

$\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$ (OA.OD = OB.OC)

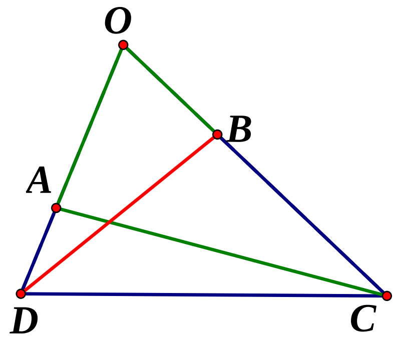
Vậy: $\Delta OAB \sim \Delta OCD$

Nên: $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$

Bài 20.1 Ở hình sau cho biết: GA.GE = GB.GO. Chứng minh: ΔGAB ~ ΔGOE và suy ra: $\widehat{GBA} = \widehat{GEO}$



Bài 21. Ở hình sau cho biết: OA.OD = OB.OC. Chứng minh: ΔOAC ~ ΔOBD và suy ra: $\widehat{ODB} = \widehat{OCA}$



Giải

Xét ΔOAC và ΔOBD có:

$\widehat{AOB}$ chung

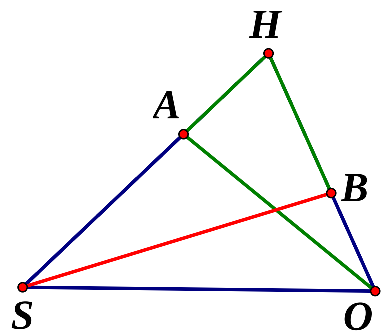
$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ (OA.OD = OB.OC)

Vậy: ΔOAC ~ ΔOBD

Nên: $\widehat{ODB} = \widehat{OCA}$

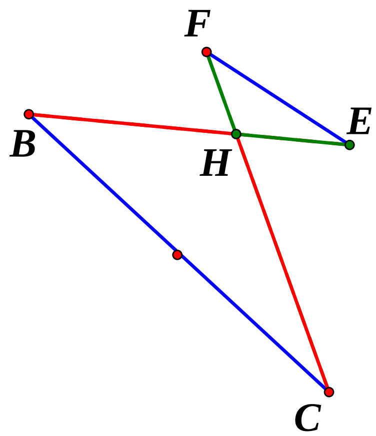
Bài 21.1 Ở hình sau cho biết: HA.HS = HB.HO. Chứng minh: ΔHAO ~ ΔHBS và suy ra: $\widehat{HAO} = \widehat{HBS}$

Giải



Bài 22. Ở hình bên cho biết: HE.HB = HF.HC.

Chứng minh: ΔHEF ~ ΔHCB và suy ra: $\widehat{HEF} = \widehat{HCB}$



Giải

Xét ΔHEF và ΔHCB có:

$\widehat{EHF} = \widehat{CHB}$ (hai góc đối đỉnh)

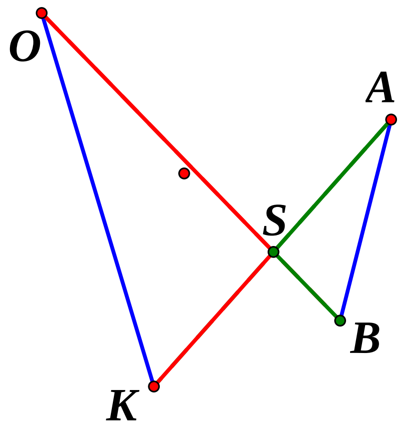
$\frac{HE}{HC} = \frac{HF}{HB}$ (HE.HB = HF.HC)

Vậy: ΔHEF ~ ΔHCB

Nên: $\widehat{HEF} = \widehat{HCB}$

Bài 22.1 Ở hình sau cho biết: $SA.SK = SB.SO$
Chứng minh: $\Delta\, SAB \sim \Delta\, SOK$

và suy ra: $\widehat{SAB} = \widehat{SOK}$



Giải

Bài 23. Ở hình sau cho biết: $AB^2 = AE.AK$. Chứng minh: $\Delta\, ABE \sim \Delta\, AKB$

và suy ra: $\widehat{ABE} = \widehat{AKB}$

Giải

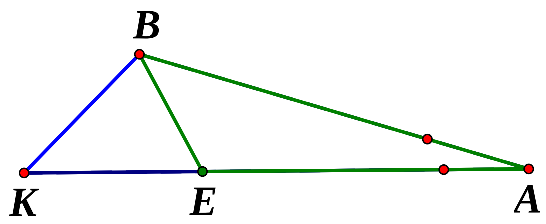
Xét $\Delta\, ABE$ và $\Delta\, AKB$ có:

$\widehat{BAE}$ chung

$\frac{AB}{AK} = \frac{AE}{AB}$ $(AB^2 = AE.AK)$

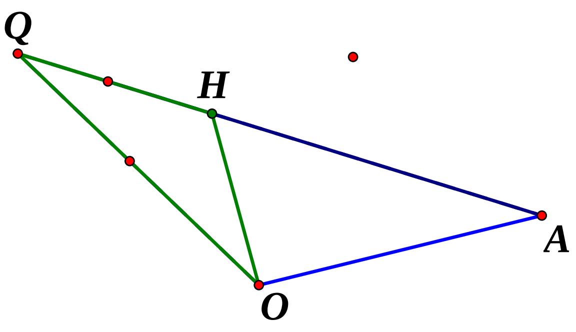
Vậy: $\Delta\, ABE \sim \Delta\, AKB$

Nên: $\widehat{ABE} = \widehat{AKB}$



Bài 23.1 Ở hình bên cho biết: $QO^2 = QH.QA$
Chứng minh: $\Delta\, QOH \sim \Delta\, QAO$

và suy ra: $\widehat{QHO} = \widehat{QOA}$



Bài 23.2 Cho tam giác ABC vuông ở A. Điểm H nằm giữa B và C thỏa điều kiện $BA^2 = BH.BC$. Chứng minh: $\Delta\, BAC \sim \Delta\, BHA$ và $AH \perp BC$

Sau khi làm được các bài tập trên chúng ta nhận thấy rằng trường hợp đồng dạng thứ hai này cũng không có gì là khó khăn quá . Vấn đề là chúng ta phải tự đọc và phải siêng giải bài tập.

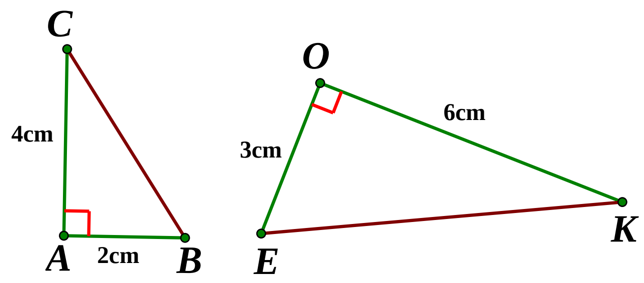
Bây giờ chúng ta làm bài tập sử dụng hệ quả

Hệ quả:

> **Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỷ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.**

Bài 24. Ở hình sau cho: AB = 2cm, AC = 4cm, OE = 3cm, OK = 6cm.
Chứng minh: Δ ABC ~ Δ OEK và suy ra $\mathbf{\widehat{ABC} = \widehat{OEK}}$

Giải



Ta có: $\frac{AB}{OE} = \frac{2}{3}$

$\frac{AC}{OK} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Nên: $\frac{AB}{OE} = \frac{AC}{OK}$

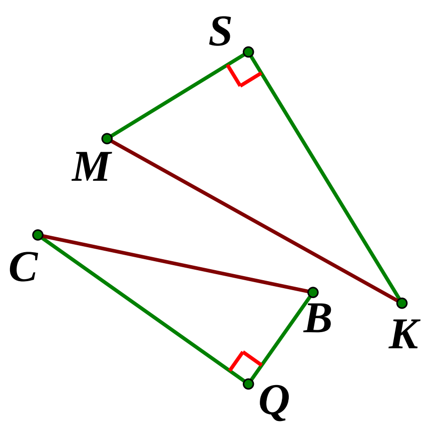
Xét hai tam giác vuông: ABC và OEK có:

$\frac{AB}{OE} = \frac{AC}{OK}$ (cmt)

Vậy: Δ ABC ~ Δ OEK.

Suy ra: $\mathbf{\widehat{ABC} = \widehat{OEK}}$

Bài 24.1 Ở hình sau cho: QB = 4,5cm, QC = 6cm, SM = 7,5cm, SK = 10cm .
Chứng minh: Δ QBC ~ Δ SMK và $\mathbf{\widehat{QBC} = \widehat{SMK}}$



Bài tập kết hợp hai trường hợp đồng dạng và các hệ quả

1/ Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

2/ Nếu hai cạnh của tam giác này tỷ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.

Hệ quả:

1. Nếu hai tam giác vuông có một cặp góc nhọn bằng nhau thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

2. Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỷ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

3. Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỷ lệ với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Chúng ta phải thật kiên nhẫn, bài tập lúc đầu hơi khó khăn một chút. Nếu biết áp dụng các bài tập đã làm ở phần trên thì cũng thấy dễ chịu. Hiểu rồi thấy thích môn toán. Ta cũng bắt đầu với các bài đơn giản trước.

Bài 25. Cho tam giác ABC. Điểm E nằm giữa A và B. Điểm K nằm giữa A và C sao cho: $\widehat{AEK} = \widehat{ACB}$.

a) Chứng minh: $\Delta AEK \sim \Delta ACB$ và $AE.AB = AK.AC$

b) Chứng minh: $\Delta AEC \sim \Delta AKB$ và suy ra: $\widehat{ACE} = \widehat{ABK}$

c) BK và CE cắt nhau tại O . Chứng minh: $\Delta OBE \sim \Delta OCK$ và $OE.OC = OK.OB$

d) Chứng minh: $\Delta OEK \sim \Delta OBC$ và suy ra: $\widehat{OEK} = \widehat{OBC}$

Chú ý: Vòng lập của hai tam giác đồng dạng

. Nếu có hai tam giác đồng dạng thì sẽ có tích các đoạn thẳng bằng nhau (hoặc tỷ số giữa các đoạn thẳng bằng nhau).

. Nếu có tích các đoạn thẳng bằng nhau ((hoặc tỷ số giữa các đoạn thẳng bằng nhau) kết hợp với hai góc bằng nhau (xen giữa) thì sinh ra hai tam giác đồng dạng khác.

. Nếu có hai tam giác đồng dạng thì sẽ có hai góc tương ứng bằng nhau, kết hợp với cặp góc bằng nhau có sẵn thì sẽ sinh ra hai tam giác đồng dạng khác.

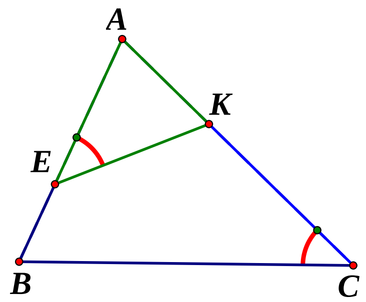
Vòng lập lại tiếp tục như vậy

Nếu nắm được quy tắc này thì bài tập dạng này cũng dễ hiểu.

Bài 25. Là điển hình cho dạng bài tập này

Giải

a) **Chứng minh: Δ AEK ~ Δ ACB và AE.AB = AK.AC**



Xét Δ AEKvà Δ ACB có:

$\widehat{BAC}$ chung

$\widehat{AEK} = \widehat{ACB}$ (gt)

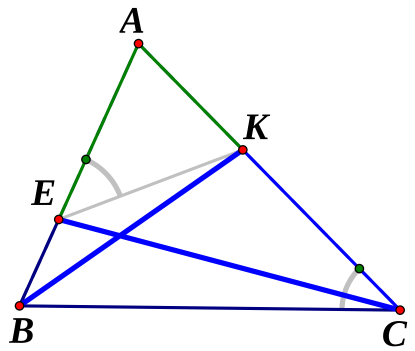
Vậy: Δ AEK ~ Δ ACB

Nên: $\frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AB}$

Hay: AE.AB = AK.AC

b) **Chứng minh: Δ AEC ~ Δ AKB và suy ra: $\widehat{ACE} = \widehat{ABK}$**

Bây giờ ta nhận thấy đã có $\frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AB}$ ở câu a



Suy ra: $\frac{AE}{AK} = \frac{AC}{AB}$

Lại có thêm **$\widehat{EAK}$** chung nữa nên sinh ra hai tam giác đồng dạng khác: Δ **AEC** ~ Δ **AKB**

Ta trình bày:

Xét Δ AEC và Δ AKB có:

$\widehat{EAK}$ chung

$\frac{AE}{AK} = \frac{AC}{AB}$ $\left(\frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AB}\ cmt\right)$ hoặc ghi Δ **AEK ~** Δ **ACB**

Vậy: Δ AEC ~ Δ AKB

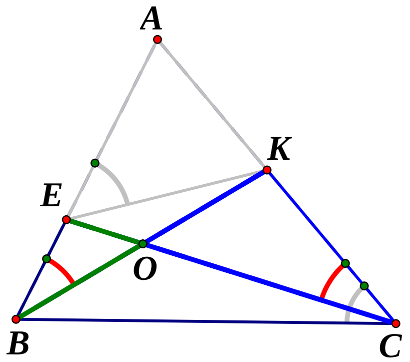
Nên: **$\widehat{ACE} = \widehat{ABK}$**

c) **Chứng minh: Δ OBE ~ Δ OCK và OE.OC = OK.OB**

Ta nhận thấy thêm: câu b cho **$\widehat{ACE} = \widehat{ABK}$**

Thêm cặp góc đối đỉnh bằng nhau **$\widehat{EOB} = \widehat{KOC}$**

Sinh ra hai tam giác đồng dạng khác: Δ **OBE** ~ Δ **OCK**



Ta trình bày:

Xét Δ **OBE** và Δ **OCK** có:

$\widehat{EOB} = \widehat{KOC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\widehat{ABK} = \widehat{ACE}$ (cmt)

Vậy: Δ **OBE** ~ Δ **OCK**

Nên: $\frac{OE}{OK} = \frac{OB}{OC}$

Hay: OE.OC = OK.OB

d) **Chứng minh: Δ OEK ~ Δ OBC và suy ra: $\widehat{OEK} = \widehat{OBC}$**

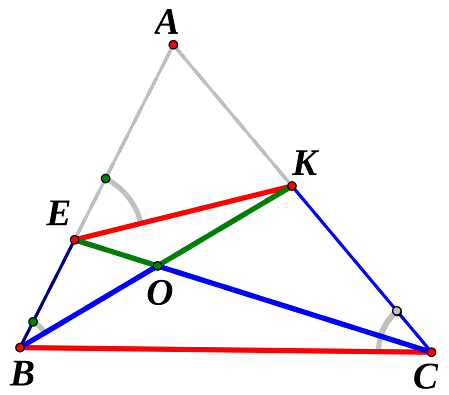
Bây giờ ta nhận thấy đã có: $\dfrac{OE}{OK} = \dfrac{OB}{OC}$ ở câu c

Suy ra: $\dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OK}{OC}$

Lại có thêm $\widehat{EOK} = \widehat{BOC}$ đối đỉnh nữa

Nên sinh ra hai tam giác đồng dạng khác:

Δ **OEK ~** Δ **OBC**



Ta trình bày:

Xét Δ **OEK** và Δ **OBC** có:

$\widehat{EOK} = \widehat{BOC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OK}{OC}$ $\left(\dfrac{OE}{OK} = \dfrac{OB}{OC} cmt\right)$ hoặc ghi Δ **OBE ~** Δ **OCK**

Vậy: Δ **OEK ~** Δ **OBC**

Nên: $\widehat{OEK} = \widehat{OBC}$

Khi giải bài tập kỹ thuật trình bày hình vẽ rất quan trọng giúp chúng ta thấy được các yếu tố quan trọng cần nổi rõ lên. Điều này giúp chúng ta nhìn nhanh được hướng giải.

Bài 25.1 Cho tam giác ABC. Điểm S nằm giữa A và B. Điểm Q nằm giữa A và C sao cho: $\widehat{ASQ} = \widehat{ACB}$.

a) Chứng minh: Δ ASQ ~ Δ ACB và AS.AB = AQ.AC

b) Chứng minh: Δ ASC ~ Δ AQB và suy ra: $\widehat{ACS} = \widehat{ABQ}$

c) BQ và CS cắt nhau tại M . Chứng minh: Δ MBS ~ Δ MCQ và MS.MC = MQ.MB

d) Chứng minh: Δ MSQ ~ Δ MBC và suy ra: $\widehat{MSQ} = \widehat{MBC}$

Bài 25.2 Cho tứ giác BSQC có M là giao điểm của hai đường chéo.

Cho biết: $\widehat{MSQ} = \widehat{MBC}$

a) Chứng minh: Δ MSQ ~ Δ MBC và MS.MC = MQ.MB

b) Chứng minh: Δ MBS ~ Δ MCQ và suy ra: $\widehat{MCQ} = \widehat{MBS}$

c) Giả sử BS và CQ cắt nhau tại A.
Chứng minh: Δ ASC ~ Δ AQB và AS.AB = AQ.AC

d) Chứng minh: Δ ASQ ~ Δ ACB và suy ra: $\widehat{ASQ} = \widehat{ACB}$

Các bạn tự giải nha.

Bài 26. Cho Δ ABC nhọn (AB < AC) có H là giao điểm của hai đường cao BE và CF.

a) Chứng minh: Δ AEB ~ Δ AFC và AF.AB = AE.AC và AE < AF và BE < CF

b) Chứng minh: Δ AFE ~ Δ ACB và suy ra: $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

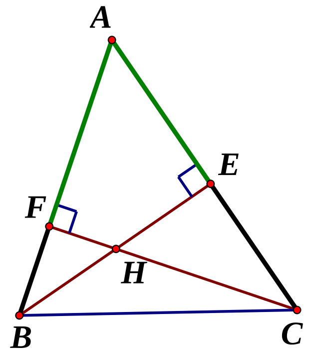
c) Chứng minh: Δ HFB ~ Δ HEC và HE.HB = HF.HC

d) Chứng minh: Δ HFE ~ Δ HBC và suy ra: $\widehat{HEF} = \widehat{HCB}$

Giải

a) **Chứng minh: Δ AEB ~ Δ AFC và AF.AB = AE.AC và AE < AF và BE < CF**

Câu a rất quen thuộc



Xét hai tam giác vuông AEB và AFC có:

$\widehat{BAC}$ chung

Vậy: Δ AEB ~ Δ AFC

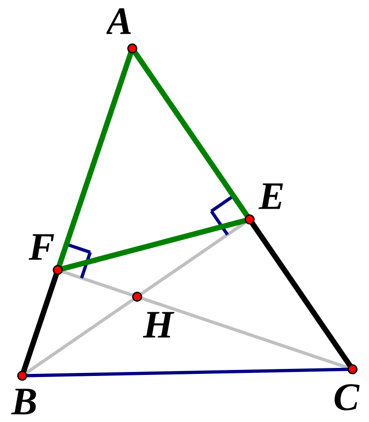
Nên: $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{CE}$

Hay: AF.AB = AE.AC và AC.BE = AB.CF

Mà: AB < AC (gt). Nên: AE < AF và BE < CF

b) **Chứng minh: Δ AFE ~ Δ ACB và suy ra: $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$**

Xét Δ **AFE** và Δ **ACB** có:



$\widehat{BAC}$ chung

$\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB}$ ($\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$ cmt)

hoặc ghi Δ AEB ~ Δ AFC

Vậy: Δ AFE ~ Δ ACB

Nên: $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$

c) **Chứng minh: Δ HFB ~ Δ HEC và HE.HB = HF.HC**

Xét hai tam giác vuông HFB và HEC có:

$\widehat{FHB} = \widehat{EHC}$ (hai góc đối đỉnh)

Vậy: Δ HFB ~ Δ HEC

Nên: $\dfrac{HF}{HE} = \dfrac{HB}{HC}$

Hay: HE.HB = HF.HC

d) **Chứng minh: Δ HFE ~ Δ HBC và suy ra: $\widehat{HEF} = \widehat{HBC}$**

Xét Δ **HFE** và Δ **HBC** có:

$\widehat{FHE} = \widehat{BHC}$ (hai góc đối đỉnh)

$\dfrac{HF}{HB} = \dfrac{HE}{HC}$ (Δ HFB ~ Δ HEC)

Vậy: Δ **HFE** ~ Δ **HBC**

Nên: $\widehat{HEF} = \widehat{HBC}$

Trường hợp đồng dạng thứ ba của hai tam giác.

> **Nếu ba cạnh của tam giác này tỷ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.**

Ví dụ. Chứng minh: Δ OHK và Δ ABC ở hình sau đồng dạng và suy ra $\widehat{HOK} = \widehat{BAC}$

Giải

Ta có: $\dfrac{OH}{AB} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

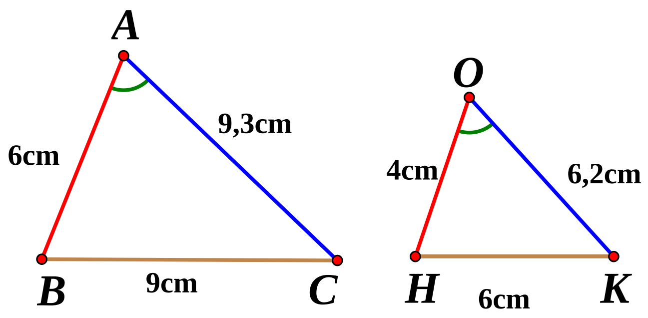
$\dfrac{OK}{AC} = \dfrac{6,2}{9,3} = \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{HK}{BC} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

Nên: $\dfrac{OH}{AB} = \dfrac{OK}{AC} = \dfrac{HK}{BC}$

Vậy: Δ **OHK ~** Δ **ABC**

Do đó: $\widehat{HOK} = \widehat{BAC}$



SỰ ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC LIÊN QUAN ĐẾN ĐƯỜNG CAO VÀ DIỆN TÍCH CỦA HAI TAM GIÁC ĐÓ

Cho: Δ OHK có đường cao là OM, diện tích là S_{OHK}

Δ ABC có đường cao là AH, diện tích là S_{ABC}

> **Nếu** Δ **OHK ~** Δ **ABC thì:**
>
> **1/** $\dfrac{OH}{AB} = \dfrac{OK}{AC} = \dfrac{HK}{BC} = \dfrac{OM}{AH}$
>
> **2/** $\dfrac{S_{OHK}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{OH}{AB}\right)^2 = \left(\dfrac{OK}{AC}\right)^2 = \left(\dfrac{HK}{BC}\right)^2 = \left(\dfrac{OM}{AH}\right)^2$

Ví dụ1. Cho Δ ABC nhọn có $\hat{A} = 60^0$, **các** đường cao là BE và CF.

Chứng minh: Δ ABC ~ Δ AEF và $S_{ABC} = 4S_{AEF}$

Ví dụ2. Cho Δ ABC vuông ở A có AH là đường cao. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC.

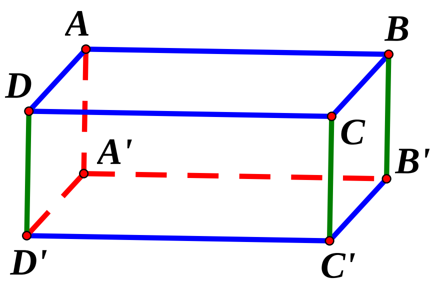
a) Chứng minh: Δ ABC ~ Δ AED

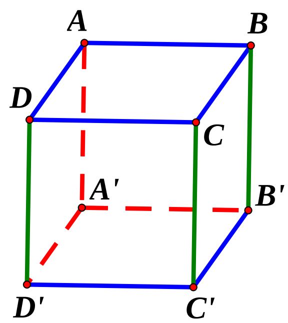
b) Giả sử $S_{ABC} = 2S_{ADHE}$. Chứng minh: Δ ABC vuông cân ở A.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

A. Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật có 6 mặt là hình chữ nhật.   Hình lập phương có 6 mặt là hình vuông.





Ta gọi hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’

1. Một số khái niệm

Mặt phẳng và đường thẳng

- Nếu đường thẳng d có hai điểm A, B thuộc mp(ABCD) thì mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mp(ABCD).

- Hai đường thẳng phân biệt trong không gian các vị trí:

. Cắt nhau, nếu có một điểm chung.
. Song song, nếu cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.
. Không cùng nằm trong một mặt phặt phẳng.

- Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

- Khi đường thẳng AB không nằm trong mp(A’B’C’D’) mà AB song song với một đường thẳng của mặt phẳng đó thì AB song song với mp(A’B’C’D’).

  Ký hiệu: AB // mp(A’B’C’D’)

- Khi mp(ABCD) chứa hai đường thẳng AD, DC cắt nhau và cùng song song với mp(A’B’C’D’) thì ta nói rằng mp(ABCD) song song với mp(A’B’C’D’).

  Ký hiệu: mp(ABCD) // mp(A’B’C’D’)

- Khi đường thẳng AA’ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AD và AB của mp(ABCD) ta nói AA’ vuông góc với mp(ABCD).

  Ký hiệu: AA’ ⊥ mp(A’B’C’D’)

- Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng tại điểm A thí nó vuông góc với mọi đường thẳng đi qua điểm A và nằm trong mặt phẳng đó.

- Khi một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại thí ta nói hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

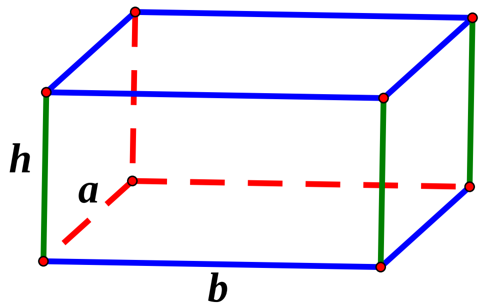
  Ví dụ: mp(ADD’A’ ⊥ mp(A’B’C’D’)

2. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình hộp chữ nhật

Cho hình hộp chữ nhật có kích thước đáy là a.b và chiều cao là h.

Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật:

$$S_{\text{xung quanh}} = \text{chu vi đáy . chiều cao}$$
$$= 2(a + b).h$$



Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật:

$$S_{\text{toàn phần}} = S_{\text{xung quanh}} + 2S_{\text{đáy}}$$
$$= 2(a + b).h + 2ab$$

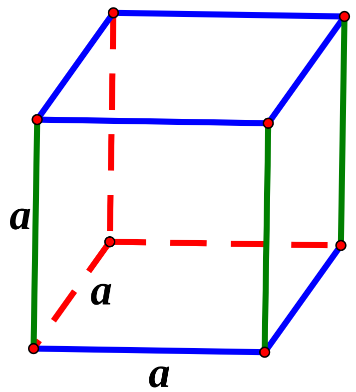
Thể tích của hình hộp chữ nhật:

$$V = \text{diện tích đáy . chiều cao}$$
$$= a.b.h$$

Cho hình lập phương có cạnh là a

Diện tích xung quanh của hình lập phương:

$$S_{\text{xung quanh}} = \text{chu vi đáy . chiều cao}$$
$$= 2(a + a).a$$
$$= 4a^2$$



Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật:

$$S_{\text{toàn phần}} = S_{\text{xung quanh}} + 2S_{\text{đáy}}$$
$$= 4a^2 + 2a^2$$
$$= 6a^2$$

Thể tích của hình hộp chữ nhật:

$$V = \text{diện tích đáy . chiều cao}$$
$$= a^2.a$$
$$= a^3$$

Ví dụ1. Cho hình hộp chữ nhật có chiều dài là 60cm, chiều rộng là 40cm, chiều cao là 20cm. Diện tích xung quanh và thể tích của hình hộp chữ nhật:

Giải

Diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật là:

$2(60 + 40).20 = 4000$ (cm^2)

Thể tích của hình hộp chữ nhật là:

$60.40.20 = 48000$ (cm^3)

Ví dụ2. Tính các kích thước của một hình hộp chữ nhật, biết rằng chúng tỷ lệ với 3; 7; 6 và thể tích của hình hộp này là 126000 cm^3.

Giải

Gọi kích thước của hình hộp chữ nhật là: x, y, z.

Ta có: x, y, z. tỷ lệ với 3; 7; 6

Nên: $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z}{6} = k$

Do đó: x = 3k; y = 7k; z = 6k

Ta có: xyz = 126000

3k.7k.6k = 126000

$126k^3$ = 126000

k^3 = 1000

k = 10

Nên: x = 3k = 3.10 = 30 ; y = 7.10 = 70 ; z = 6.10 = 60

Kích thước của hình hộp chữ nhật là: 30cm; 70cm; 60cm

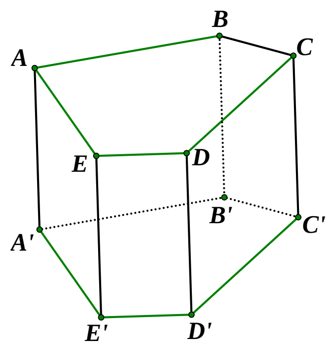
Bài 27. Diện tích toàn phần của một hình lập phương là $54cm^2$. Tính thể tích của hình lập phương đó.

Bài 28. Thể tích của một hình lập phương là $125cm^3$. Tính diện tích toàn phần hình lập phương đó.

Bài 29. Một căn phòng dài 10m, rộng 8m, cao 4m. Người ta muốn quét vôi trần nhà và 4 bức tường. Biết rằng tổng diện tích các cửa là $29,8m^2$. Tính diện tích cần quét vôi.

B. Hình lăng trụ đứng

1. Một số khái niệm



Hình bên là hình lăng trụ đứng. Trong hình này:

. A, B, C, D, E, A’, B’, C’, D’, E’ là các đỉnh.

. Các mặt ABB’A’, BCC’B’,…là các hình chữ nhật, gọi là các mặt bên.

. Các đoạn thẳng AA’, BB’, CC’, DD’, EE’ song song với nhau và bằng nhau, gọi là cạnh bên.

. Hai mặt ABCDE, A’B’C’D’E’ song song với nhau, gọi là hai đáy.

Hình lăng trụ ở hình bên có hai đáy là ngũ giác nên gọi là lăng trụ đứng ngũ giác.

Hình hộp chữ nhật, hình lập phương là những hình lăng trụ đứng.

Hình lăng trụ đứng có dáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.

2. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ đứng

Cho hình lăng trụ đứng có chu đáy là 2p, diện tích đáy là S và chiều cao là h.

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng:

$$S_{\text{xung quanh}} = \text{chu vi đáy . chiều cao} = 2p.h$$

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng:

$$S_{\text{toàn phần}} = S_{\text{xung quanh}} + 2S_{\text{đáy}}$$

Thể tích của hình lăng trụ đứng:

$$V = \text{diện tích đáy . chiều cao} = S.h$$

Ví dụ1. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng ở hình bên:

Giải

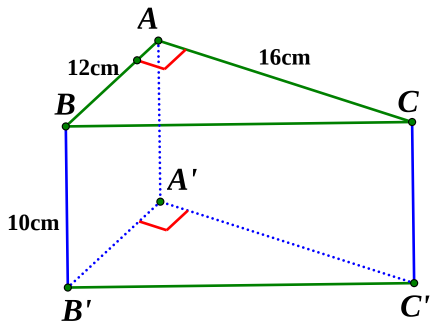
Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lý Pytago ở tam giác ABC vuông ở A)

$= 12^2 + 16^2$

$= 144 + 256$

$= 400$

$BC = 20cm$



Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng là:

$$S_{\text{xung quanh}} = (12 + 16 + 20).10 = 480\ (cm^2)$$

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng:

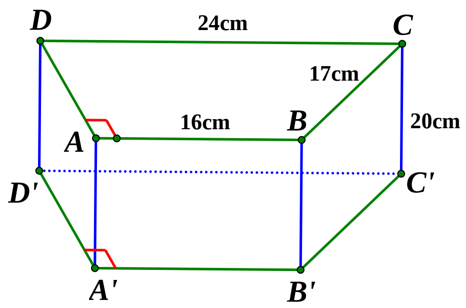
$$S_{\text{toàn phần}} = S_{\text{xung quanh}} + 2S_{\text{đáy}}$$
$$= 480 + 2.12.16:2$$
$$= 480 + 192$$
$$= 672\ (cm^2)$$

Thể tích của hình lăng trụ đứng:

$$V = 2.12.16:2.\ 10 = 1920\ (cm^3)$$

Bài 30. Một hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác vuông, cạnh huyền BC = 5cm. Biết diện tích xung quanh là 108 cm^2, diện tích toàn phần 120 cm^2. Tính độ dài các cạnh của mặt đáy.

Bài 31. Tính diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng đáy là hình thang vuông, theo các kích thước ở hình bên.



Bài 32. Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang cân, đáy lớn là 7dm, đáy nhỏ 3dm, góc ở đáy 45^0. Biết thể tích của hình lăng trụ đứng là $40dm^3$. Tính chiều cao của hình lăng trụ.

C. Hình chóp đều.

1. Hình chóp

Hình bên là một hình chóp có:

. Đáy là một đa giác

. Các mặt bên là các tam giác có chung một đỉnh. Đỉnh chung này gọi là đỉnh của hình chóp.

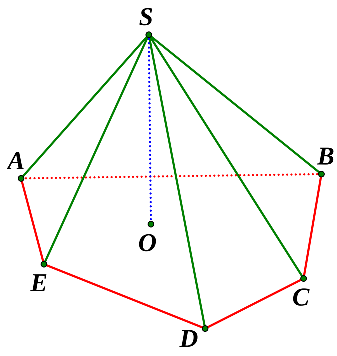
. Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là đường cao của hình chóp.

Hình bên là hình chóp S.ABCDE có:

Đỉnh là S.

Đáy là ngũ giác ABCDE.

Ta gọi là hình chóp tứ giác.



2. Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có:

. Mặt đáy là một đa giác đều.

. Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.

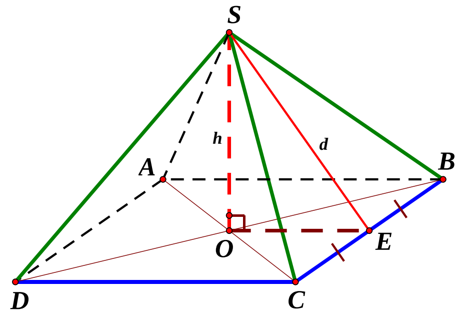
Ở hình chóp đều hình bên S.ABCD:

. Mặt đáy là hình vuông ABCD.

. Các tam giác cân: SAB, SBC, SCD, SDA bằng nhau có chung đỉnh S.

. Đường cao là h = SO.

. Trung đoạn là SE = d (E là trung điểm của cạnh đáy BC).

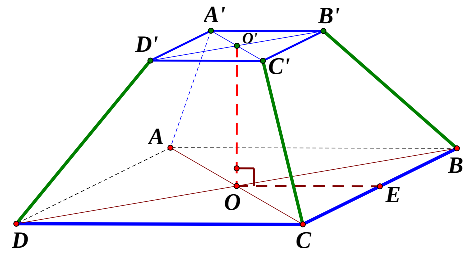


3. Hình chóp cụt đều

Cắt hình chóp đều bằng một mặt phẳng song song với đáy.

Phần hình chóp nằm giữa mặt phẳng đó và mặt phẳng đáy của hình chóp gọi là hình chóp cụt đều.

Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là hình thang cân.



4. Diện tích xung quanh của hình chóp đều

Nửa chu vi đáy: p

Trung đoạn: d

$$S_{\text{xung quanh}} = \text{nửa chu vi đáy . trung đoạn}$$
$$= p.d$$

5. Diện tích toàn phần của hình chóp đều

$$S_{\text{toàn phần}} = S_{\text{xung quanh}} + S_{\text{đáy}}$$

6. Thể tích của hình chóp đều

$$V = \frac{1}{3} \text{ diện tích đáy . chiều cao}$$
$$= \frac{1}{3} S.h$$

Ví dụ1. Cho hình chóp tứ giác đều có độ dài cạng bên là 30cm, đáy là hình vuông ABCD cạnh 36cm. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Giải

Ta có: BE = BC : 2 = 36:2 = 18(cm)

$SE^2 + BE^2 = SB^2$ (định lý Pytago ở tam giác SBE vuông ở E)

$SE^2 + 18^2 = 30^2$

$SE^2 = 900 - 324$

$= 576$

SE = 24cm

Diện tích xung quanh của hình chóp là:

$$S_{\text{xung quanh}} = \frac{1}{2}.4.30.24 = 1440\ (cm^2)$$

Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng:

$$S_{\text{toàn phần}} = S_{\text{xung quanh}} + S_{\text{đáy}}$$

$$= 1440 + 30.30$$

$$= 2340\ (cm^2)$$

Bài 31. Tính thể tích của mỗi hình chóp đều sau đây: