

Bài 8. TÍNH CHẤT BA ĐƯỜNG TRUNG TRỰC CỦA TAM GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý 1. Ba đường trung trực của

một tam giác cùng đi qua một điểm.

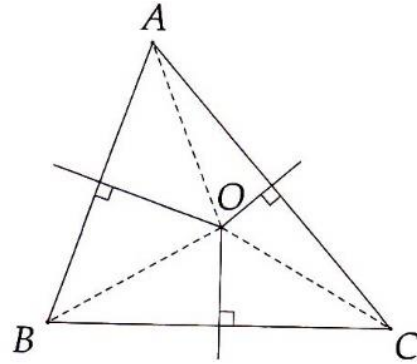
Điểm này cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

Trên hình bên, điểm O là giao điểm các

đường trung trực của $\triangle ABC$. Ta có

$OA = OB = OC$. Điểm O là tâm đường

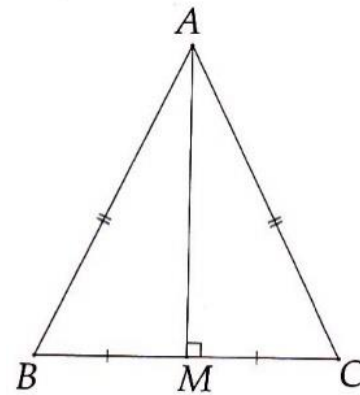
tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.



2. Định lý 2. Trong một tam giác cân,

đường trung trực của cạnh đáy đồng

thời là đường trung tuyến ứng với cạnh đáy.



II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

Phương pháp giải: Sử dụng tính chất giao điểm các đường trung trực trong tam giác thì cách đều ba đỉnh của tam giác đó.

1A. Cho A, B, C là ba điểm phân biệt không thẳng hàng. Hãy xác định đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.

1B. Ông Hùng có ba cửa hàng A, B, C không nằm trên một đường thẳng và đang muốn tìm địa điểm O để làm kho hàng. Phải chọn vị trí của kho hàng ở đâu để khoảng cách từ kho đến các cửa hàng bằng nhau.?

2A. Chứng minh trong tam giác vuông, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền.

2B. Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh O là trung điểm của BC thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

Dạng 2. Vận dụng tính chất ba đường trung trực trong tam giác để giải quyết các bài toán khác

Phương pháp giải: Từ Định lý 2, ta có tính chất trong một tam giác, giao điểm của hai đường trung trực thì thuộc đường trung trực còn lại của tam giác đó.

Lưu ý: Trong tam giác cân, đường trung trực ứng với cạnh đáy cũng là đường trung tuyến, đường phân giác và đường cao.

3A. Cho $\triangle ABC$. M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau tại O. Tính số đo góc OMB .

3B. Cho $\triangle MNP$. Đường trung trực của MN cắt đường trung trực của MP tại I. Hạ $IH \perp NP$. Chứng minh H là trung điểm của NP.

4A. Cho $\triangle ABC$ có góc $A = 110^\circ$. Đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) $\triangle BIC$ cân;

b) $\angle BIC = 2(180^\circ - \angle BAC)$ và tính số đo góc BIC .

4B. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Đường trung trực của các cạnh AB và AC cắt nhau tại I. Chứng minh:

a) $OB = OC$;

b) $\angle BOC = 2(180^\circ - \angle BAC)$ và O là trung điểm của BC.

5A. Cho $\triangle ABC$ ($AB = AC$). Đường trung trực của BC cắt trung tuyến BD tại G. Chứng minh G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

5B. Cho $\triangle ABC$ cân tại A. AM là đường trung trực của cạnh BC ($M \in BC$). Trên đoạn thẳng AM lấy điểm G sao cho $AG = \frac{2}{3} AM$. Chứng minh đường thẳng BG đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.

6A. Cho tam giác MNP cân tại M. Trên cạnh MN lấy điểm K, trên cạnh MP lấy điểm D sao cho $MK = DP$. Đường trung trực của MP cắt đường trung trực của DK tại O. Chứng minh:

a) $\angle MKO = \angle PDO$;

b) O thuộc đường trung trực của MN;

c) MO là tia phân giác của $\angle NMP$.

6B. Cho $\triangle ABC$ cân tại A Gọi O là điểm cách đều ba đỉnh A, B, C. Nối OA, OB, OC.

a) Chứng minh $OBA = OAC$.

b) Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $BM = AN$. Chứng minh O thuộc đường trung trực của MN.

Dạng 3. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy, ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải: Vận dụng tính chất đồng quy của ba đường trung trực trong một tam giác.

7A. Cho tam giác ABC cân ở A. Gọi M là trung điểm của BC. Các đường trung trực của AB và AC cắt nhau ở E. Chứng minh ba điểm A, E, M thẳng hàng.

7B. Cho tam giác MNP cân ở M, đường cao MH. Các đường trung trực của MN và MP cắt nhau ở D. Chứng minh ba điểm M, D, H thẳng hàng.

8A. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa điểm A, dựng tam giác cân BCD. Chứng minh các đường trung trực của AB và AC đồng quy với đường thẳng AD,

8B. Cho tam giác ABC cân có A là góc tù. Gọi M là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A, dựng tam giác BNC cân tại N. Chứng minh đường thẳng AM và các đường trung trực của NB, NC đồng quy.

HƯỚNG DẪN

1A. Gọi đường tròn đi qua ba điểm A, B, C có tâm O. Ta có

$$OA = OB = OC.$$

Ba điểm phân biệt A, B, C không thẳng hàng tạo thành tam giác ABC. Vì $OA = OB = OC$ nên O là giao điểm ba đường trung trực của tam giác ABC.

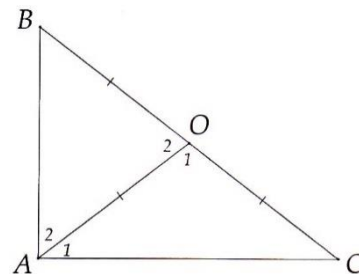
1B. Tương tự 1A.

2A. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đó, $OA = OB = OC$.

Suy ra: $B = A_2, C = A_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} O_2 = 180^\circ - 2A_2 \\ O_1 = 180^\circ - 2A_1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \angle BOC = \angle O_1 + \angle O_2 = 360^\circ - 2A = 180^\circ$$

$\Rightarrow B, O, C$ thẳng hàng, mà $OB = OC$

$\Rightarrow O$ là trung điểm của BC

2B. Tương tự **2A**

3A. Từ giả thiết suy ra O thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow OM$ là đường trung trực của BC

$$\Rightarrow \angle OMB = 90^\circ$$

3B. Tương tự **3A**

4A. a) Từ giả thiết suy ra I thuộc đường trung trực của BC

$\Rightarrow IB = IC = \Delta BIC$ cân tại I

$$\text{b) Có } \angle BIA = 180^\circ - 2A_2; \angle AIC = 180^\circ - 2A_1$$

$$\Rightarrow \angle BIC = \angle BIA + \angle AIC$$

$$= 180^\circ - 2A_1 + 180^\circ - 2A_2$$

$$= 2(180^\circ - \angle BAC)$$

Từ đó, suy ra $\angle BIC = 140^\circ$.

4B. Tương tự **4A**.

5A. Vì ΔABC cân tại A nên đường trung trực của cạnh đáy BC đồng thời là trung tuyến của ΔABC ứng với cạnh BC .

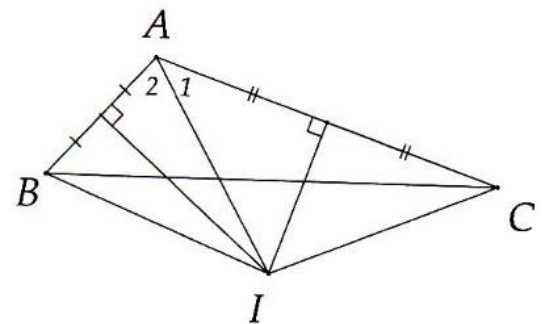
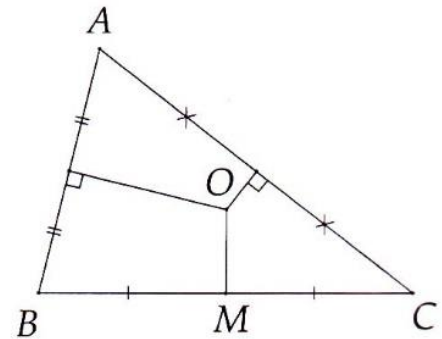
Kết hợp với giả thiết suy ra G là trọng tâm của ΔABC .

5B. Tương tự **5A**.

6A. a) Từ giả thiết suy ra $OK = OD$,

$$OM = OP.$$

$$\Delta MKO = \Delta PDO \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \angle MKO = \angle PDO$$



b) Từ kết quả ý a), suy ra $OKN = ODM$.

Mặt khác $MN = MP$, $MK = PD$.

$\Rightarrow NK = MD$.

Chứng minh được

$\triangle OKN = \triangle ODM$ (c.g.c) $\Rightarrow ON = OM$.

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của MN .

c) Xét $\triangle MNP$ có O là giao điểm các

đường trung trực của MN

và MP .

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của NP .

Mà $\triangle MNP$ cân tại M nên MO đồng

thời là tia phân giác của góc NMP .

6B. a) Từ giả thiết suy ra $OA = OB = OC$.

Suy ra $\triangle AOB = \triangle AOC$ (c.c.c)

Mà $\triangle AOB$, $\triangle AOC$ là các tam giác

cân đỉnh O nên $OBA = OAC$

b) Chứng minh được $\triangle BMO = \triangle ANO$

(c.g.c) $\Rightarrow OM = ON$.

$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của MN .

7A. Chứng minh được: $\triangle ABM = \triangle ACM$ (c.c.c).

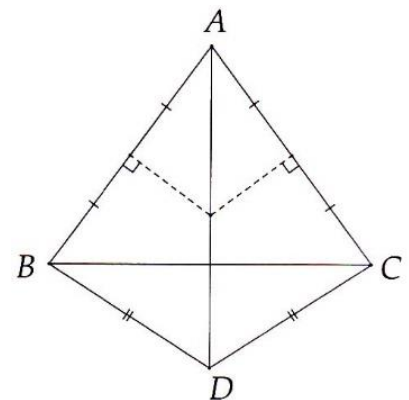
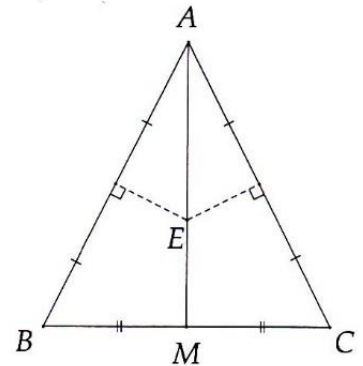
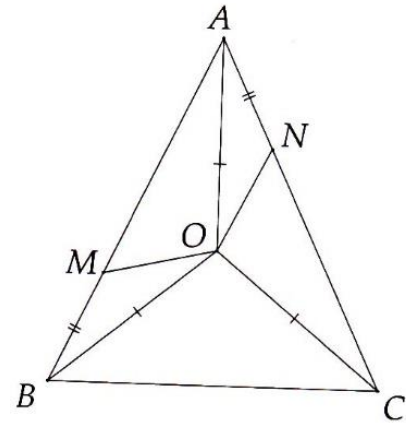
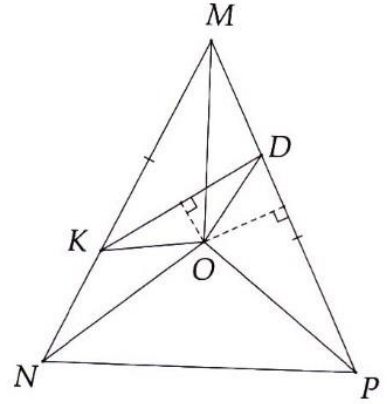
Từ đó, suy ra AM là đường trung trực của BC .

Theo tính chất ba đường trung trực của

tam giác, ta suy ra điểm E thuộc đường

trung trực của BC .

Vậy ba điểm A, E, M thẳng hàng.



7B. Tương tự 7A.

8A. Từ giả thiết, ta có: $AB = AC$, $DB = DC$.

$\Rightarrow AD$ là đường trung trực của BC .

Xét $\triangle ABC$, theo tính chất ba đường

trung trực trong tam giác ta có các

đường trung trực của AB và AC

đồng quy với đường thẳng AD .

8B. Tương tự 8A.

